UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 129-143
SSN: 1815-0640

De la tortura mental a los fractales

Antonio Rosales Góngora

Resumen

Desde la tortura mental que suponía para Cardano los números negativos, hasta las imágenes obtenidas mediante programación en el ordenador para los fractales, hay una distancia de cuatro siglos. La aceptación de la representación geométrica de los imaginarios ilustra la historia de múltiples progresos en matemáticas. Las dificultades de interpretación y utilización necesitaban un tiempo de maduración, hasta obtener una respuesta.

Abstract

Since the mental torture it was for negative numbers Cardano, to the images obtained by programming the computer to the fractal, is a distance of four centuries. The acceptance of the geometric representation of imaginaries multiple story illustrates progress in math. The difficulties of interpretation and use needed a period of maturation, to get an answer.

Resumo

Desde a tortura mental que supunha para Cardano os números negativos, até as imagens obtidas mediante programación no computador para os fractales, há uma distância de quatro séculos. A aceitação da representação geométrica dos imaginarios ilustra a história de múltiplos progressos em matemáticas. As dificuldades de interpretação e utilização precisavam um tempo de maduración, até obter uma resposta.

1. Introducción

Para comprender los progresos intelectuales que llevaron a las herramientas matemáticas que manejamos hoy, es fundamental situar los documentos históricos en el contexto de conocimientos de su época.

Euclides	Al Khawarizmi	Fibonacci	Cardano	Bombelli	Descartes
-300	830	1202	1545	1572	1673
Wallis	Foncenex	Khun	Euler	D'Alambert	Wessel
1673	1747	1759	1747	1774	1797
Carnot	Argand	Buee	Playfair	Servois	Francais
1803	1805	1805	1808	1813	1813
Gergonne	Warren	Mourey	Gauss	Faure	Cauchy
1813	1825	1828	1831	1845	1847
Poncelet	Lill	Transon	Bellavitis		
1864	1867	1868	1854		

Es necesario, para entender las necesidades que hubo para progresar, tener muy en cuenta la situación matemática durante el siglo XV. En Europa, tras siglos de baja actividad científica, el regreso de las ciencias se realiza por el canal de escritos científicos de lengua árabe. Esto se hace a través de España con la traducción del árabe al latín de textos de fuentes griegas y de producciones de lengua árabe o por Italia con la obra de Fibonacci, Liber Abacci.

Se produce un lento redescubrimiento de textos olvidados pero también el descubrimiento de la contribución vital de la ciencia en lengua árabe en contacto con la ciencia de Asia. La geometría euclidea es la referencia que se impone y quien valida las demostraciones.

Los irracionales llegan pronto a perturbar la geometría. Estos números, llamados inconmensurables, que no pueden asociarse a la multiplicación o a la subdivisión de una unidad tienen una existencia reconocida porque responden a una construcción geométrica simple, la geometría dice que $\sqrt{2}$ existe porque es la medida de la diagonal del cuadrado de lado unidad pero los racionales dicen que tal número es extraño.

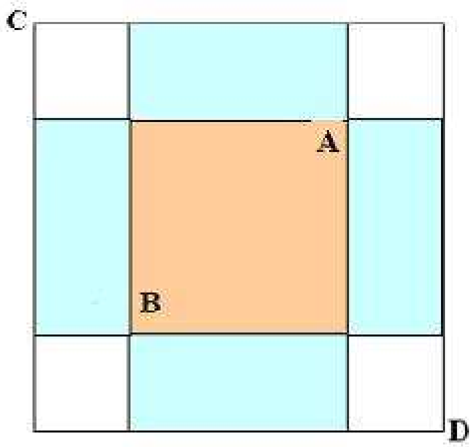
Con la llegada del álgebra nace una nueva perturbación. Esta herramienta, desarrollada inicialmente para responder a los problemas de sucesiones en el marco del derecho árabe, responde también a problemas geométricos. Una gran referencia es Al Khawarizmi cuyo tratado "*Compendio del cálculo por el álgebra y la muq$\bar{a}$bala*" contiene por ejemplo la resolución del siguiente problema " *Un cuadrado y diez veces su raíz tienen una suma de 39 dirhams*" . Se trata de la ecuación $x^2 + 10x = 39$ y razona de la siguiente forma:

> "*Divide el número de raíces por dos, lo que da 5 en nuestro caso. Este número, multiplícalo por el mismo, lo que da 25. Añádeselo a 39, lo que da 64. Ahora tola la raíz de ese número. Que es 8, y réstale la mitad del número de raíces,5. La resta da 3. es la raíz del cuadrado buscado, el cuadrado del mismo es 9*"

En notación actual la ecuación sería: $x^2+10x=39$ y la solución:

$$(x+5)^2 = 39 + 25 = 64 \Rightarrow x + 5 = \sqrt{64} = 8 \Rightarrow x = 8 - 5 = 3$$

La solución geométrica es: Supongamos que el cuadrado AB tiene por lado la raíz buscada



Sobre los cuatro lados del cuadrado, se construye un rectángulo de anchura ¼ de las raíces, es decir 2'5

La superficie del cuadrado y de los 4 rectángulos es 39

Para completar la figura y obtener el cuadrado CD debemos añadir 4 veces el cuadrado de lado 2'5. Como el área del cuadrado es 64, su raíz es 8, de donde el lado del cuadrado buscado será 8-2x2'5=3

El razonamiento algebraico está ligado a una representación geométrica y así será durante mucho tiempo. Pero el álgebra, al emanciparse de la geometría va a producir resultados "parásitos": Los números negativos y los complejos. Hay que hacer notar que estos dos conjuntos de números tienen historias paralelas.

Aceptados por unos, ignorados o rechazados por otros, deberán pasar varios siglos para ser reconocidos, el tiempo que se les da un estatus geométrico. Aún más, todos los que se embarcaron para la representación geométrica de los imaginarios comenzaron hablando de los números negativos. El reconocimiento de la existencia de estos últimos es imprescindible para la aceptación de los primeros.

2. Cardano: El iniciador

Cardano (1501 – 1576) fue un sabio italiano del siglo XVI de vida mas bien tumultuosa y con múltiples competencias, aunque es de las matemáticas y de la medicina de las que vive.

Fue el primero en escribir en una obra impresa la raíz cuadrada de un número negativo:

,

es decir, 0 5p: ℞ m : 15 , en su obra Artis Magnae de Regulis Algebraicis publicada en 1545, luego en 1570 y 1663. Esta obra es un compendio de los conocimientos matemáticos de la época incluyendo los algebraicos. Doscientos cincuenta años separan a Cardano de Leonardo de Pisa que a principios del siglo XIII es el trasmisor, a través de Italia, de las matemáticas en lengua árabe y en particular del álgebra.

En esta obra Cardano, apoyándose en sus predecesores, trata las ecuaciones algebraicas en la tradición euclidiana, pues él se formó en esta geometría. Así en su obra "*De propria vita*" , publicada a titulo póstumo en 1643, declara:

> "*Desde mi primera infancia, hacia los nueve años, mi padre me enseña los elementos de la aritmética así como tipos de arcanos. No se donde había adquirido esos conocimientos. Un poco más tarde, él me enseña la astrología de los árabes y se esfuerza en inculcarme la memoria artificial para la cual me faltaba habilidad. Al pasar los doce años, me hizo saber los seis primeros libros de Euclides pero sin tomarse la molestia de preguntas que yo podía entender por mí mismo*".

En cuanto al álgebra declara en el primer capítulo de Artis Magnae "*este arte se originó con Mahomet el hijo de Moisés al árabe (Mohammed Ibn Moussa Al*

Khwarizmi), Leonardo de Pisa es una fuente digna de confianza para esta declaración”

En la obra de Cardano aparece una iniciativa que sobrepasa las practicas usuales, partiendo de un problema de formulación análoga a los resueltos, Cardano empieza la resolución a la manera clásica pero los datos que pone no le permiten la resolución. Cambia de registro y continua de una forma teórica que le conduce a nuevos números “**sofisticos**” dice él, raíces cuadradas de números negativos. Es en este pasaje donde aparece su “ dimissis incruciationibus “que algunos traducen como tortura mental.

m:℞ m: 15, duc 5 p:℞ m: 15 in 5 m:℞ m: 15, dimissis incruciationi-
bus, fit 25 m:m: 15, quod est p: 15, igitur hoc productum est 40, natu

En otra obra menos conocida pero posterior a Ars Magnae, Ars Magna Aritmética “ las califica de “ oscuro tercer tipo de cosa”.

Este texto da la resolución de la ecuación de segundo grado definida por la suma dada de sus raíces 10 (divide 10 en dos partes) y por su producto (cuyo producto es 30 o 40), en notación actual $x^2-10x+40=0$. En la resolución Cardano utiliza la raíz de un número negativo:

Capítulo XXXVI regla II:

Doy un ejemplo: si se nos dice dividir 10 en dos partes cuyo producto es 30 o 40, es evidente que este caso es imposible. Salvo que lo resolvamos de esta manera: Dividimos 10 en dos partes iguales haciendo cada una 5, multiplicando por ese mismo da 25. De 25 sustraemos el producto. 40. Eso como ya he mostrado en el capítulo sobre las operaciones en el libro VI, deja un resto m:15. La raíz de esta añadida y luego sustraída de 5 da las partes que multiplicadas entre ellas dan 40. Por consiguiente estas son:

$$5p:\mathfrak{R}_{x}\, m : 15 \qquad y \qquad 5m:\mathfrak{R}_{x}\, m : 15.$$

Para la prueba de lo anterior escribe:

El verdadero significado de esta ley puede darse claramente. Sea el segmento AB, que diremos que es 10, que debe ser dividido en dos partes cuyo rectángulo debe ser 40.

Ahora, como 40 es el cuádruplo de 10, queremos obtener 4 veces AB entero. Por consiguiente construimos el cuadrado AB sobre AC la mitad de AB. De AD quitamos cuatro veces AB, sin prestar atención particular a este número. Si hay un remanente, su raíz debe ser añadida y restada de AC, la mitad de AB, te muestra entonces las partes (en las cuales AB debe ser dividida).

Incluso cuando tal resta es negativa , se debe no obstante imaginar

$$\mathfrak{R}_{x}\, m : 15$$

como *la diferencia entre AD y el cuádruplo de AB, la cual debe ser añadida y restada de AC para encontrar lo que buscamos, eso hace:*

$$5p:\mathfrak{R}_{x}\, v : 25m : 40 \qquad y \qquad 5m :\mathfrak{R}_{x}\, v : 25\ m\ 40$$

Y es decir:

$$5p{:}\mathfrak{R}_{x}m \;:\; 15 \qquad \text{y} \qquad 5m{:}\mathfrak{R}_{x}m \;:\; 15.$$

Esta tortura mental acabará multiplicando:

$$5p{:}\mathfrak{R}_{x}m \;:\; 15 \qquad \text{por} \qquad 5m{:}\mathfrak{R}_{x}m \;:\; 15.$$

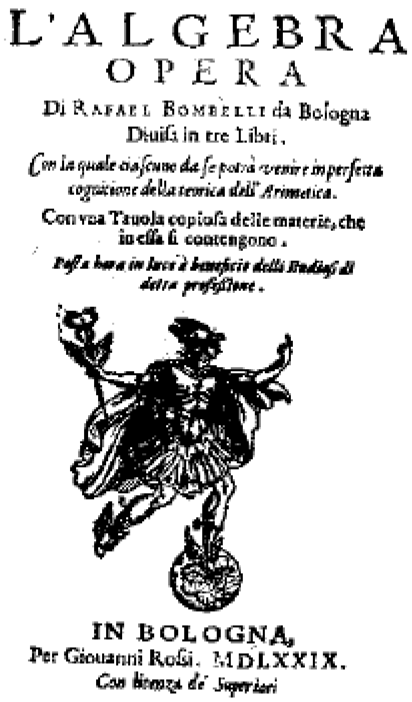
Lo que da 25m : m : 15 que es 40, por consiguiente el producto es 40.

Además la naturaleza de AD no es la misma que la de 40 o la de AB porque una superficie esta alejada de la naturaleza de un número o de la de la línea aunque muy próximo a esta última. Esto en verdad es sofistica, esta cantidad es verdaderamente imaginaria porque las operaciones no pueden ser realizadas con ellas como con un puro número negativo, ni como con los otros números.

Como vemos Cardano nos deja dos herencias, los cálculos con la raíz cuadrada de números negativos $Rm:-15(\sqrt{-15})$ y una construcción geométrica inacabada.

Se abren dos vías para los imaginarios, la del cálculo y la de la representación geométrica. Para los que van a calcular el camino se recorrerá rápidamente. Los imaginarios permiten responder a la afirmación, aunque aún no es más que un sentimiento, que una ecuación algebraica tiene tantas raíces como su grado y, sobre todo, los imaginarios demuestran su eficacia para efectuar cálculos que llevan a soluciones no controvertidas. Para los que participan en la representación geométrica, el camino va a ser mucho más largo porque las controversias serán numerosas y sobretodo porque las primeras proposiciones no esclarecerán los cálculos y dependerán de una voluntad de ilustración sin gran alcance.

3. Bombelli, el primer cálculo

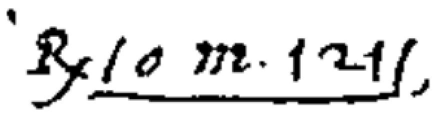

L'ALGEBRA
OPERA
DI RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

En el último cuarto del siglo XV Rafael Bombelli demuestra poseer herramientas de cálculo de probada utilidad para resolver ecuaciones de tercer grado.

En su famoso manuscrito **El Álgebra** se lee la resolución de la ecuación:

$$2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4,$$

igualar $\overset{3}{\smile}1$ a $\overset{1}{\smile}15 + 1$,se toma el tercio de la cosa (coeficiente de la incógnita 15 dividido entre3) y se eleva al cubo (5^3=125) y eso se quita del cuadrado de la mitad (2) del número (la constante 4) que es 4, dará 0m.121 y de eso se toma la raíz cuadrada



que dará: $\mathfrak{R}_{x}\llcorner \underline{0\text{ m. }121}\lrcorner$ que añadida a la mitad del número da $2.\text{ p }\mathfrak{R}_{x}\llcorner \underline{0\text{ m. }}\ \underline{121}\lrcorner$

es decir $2+\sqrt{-121}$, luego se toma la raíz cúbica y añadida a su conjugado dará

$$\mathfrak{R}_{x}{}^{3}\llcorner 2.\text{p. }\mathfrak{R}_{x}\llcorner \underline{0\text{ m. }121}\lrcorner\lrcorner\text{ p. }\ \mathfrak{R}_{x}{}^{3}\ \llcorner\_2\text{ m }\mathfrak{R}_{x}\llcorner \underline{0\text{ m. }121}\lrcorner\lrcorner$$

es decir $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$,

lo que da en nuestra notación $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$.

En otro pasaje describe su método para encontrar las raíces cúbicas:

Para $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ encuentra $2+\sqrt{-1}$ Así obtiene $2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$.

Con este ejemplo simple, escribió muchos otros, demuestra la realidad del cálculo con imaginarios que son útiles para la resolución de algunas ecuaciones de tercer grado. Los irracionales habían causado confusión en la geometría euclidea, aquí no se cita la geometría.

Bombelli no sabe prácticamente nada de esos “números”, ¿cómo podemos, por otra parte, hablar de números?. Y sin embargo los utilizó en los cálculos tomando a contrapié a Stevin que había dicho: H*ay tantas cosas seguras sobre las que trabajar que no hay ninguna necesidad de cansarse con las cosas inciertas.*

Como en otras situaciones, un rigor extremo habría bloqueado todo avance, hacer caso omiso se revela productivo.

4. D´Alambert, intento de validación

Más de un siglo y medio después, mientras que aún se discutía sobre la interpretación geométrica de los imaginarios, estos intervienen en los cálculos más elaborados. Así en *Reflexión sobre la causa general de las ventas*, D’Alambert los utiliza y da una demostración justificando que todo número complejo elevado a una potencia compleja es un número complejo:

$$\left[a+b\sqrt{-1}\right]^{g+h\sqrt{-1}}=A+B\sqrt{-1}\ \left[a+b\sqrt{-1}\right]^{g+h\sqrt{-1}}=A+B\sqrt{-1}.$$

Como vemos, pese a no ser el objetivo de su obra, D’Alambert siente la necesidad de validar las herramientas matemáticas que utiliza.

5. De la indiferencia al rechazo

5.1. René Descartes, la indiferencia

Los imaginarios no parecen haber suscitado el interés de René Descartes. La lectura de *La Geometrie* da la impresión que se trata de falta de consideración. Aunque utiliza el término álgebra, contrariamente a sus contemporáneos y predecesores, no habla de los fundadores árabes del álgebra y, salvo de Cardano y Scipion del Ferro, de sus sucesores italianos. Habla de los antiguos y cita solo a Euclides, Apolonio y Pappus. Es sorprendente que más de 100 años después de su publicación, no evoque en ninguna parte el álgebra de Bombelli mientras que trata ecuaciones de tercer grado.

Wallis, contemporáneo suyo, que escribió distintos ensayos sobre la interpretación geométrica de los imaginarios, evoca la obra de Bombelli en una carta a Roger Cotes. Descartes no puede enmarcarse en la línea de los opositores sino en la de los ignorantes porque parece no haber tenido conocimiento de los trabajos de sus contemporáneos o no haberlos tenido en cuenta.

Si conoce el trabajo de Cardano aunque no se pronuncia sobre las interrogantes dejadas por este. En la *Geometrie*, Descartes describe inicialmente la construcción geométrica de las operaciones de la aritmética que " no está compuesta más que por cuatro o cinco operaciones, que son, adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces". Afirma querer desmarcarse de los antiguos " yo quiero hacer notar que los escrúpulos que tenían los antiguos de usar los términos *de la aritmética en geometría, no pueden proceder más que de que ellos no veían con claridad su razón, usando mucha oscuridad y confusión en la manera en que se expresaban*".

La geometría euclídea es la base de sus razonamientos lo que naturalmente excluye toda interrogación sobre una representación geométrica de los imaginarios. De ahí que no aparezca en la *Geometrie* la escritura del símbolo $\sqrt{\ }$ asociado a una cantidad negativa por mas que se trate sólo de una escritura simbólica de números negativos, sin embargo plantean menos problemas porque exponiendo su habilidad a manipular las ecuaciones, muestra que se puede transformar las soluciones falsas (negativas) en soluciones verdaderas (positivas) *" y es necesario notar que aumentando las verdaderas raíces de una ecuación se disminuye las falsas de la misma cantidad"*. Las soluciones falsas, debido a esta posibilidad de transformarlas adquieren una forma de existencia. Resuelve geométricamente las ecuaciones de la forma $z^2=az+b^2$; $y^2=-ay+b^2$; $z^2=az-b^2$ y confirma su pensamiento cuando declara *" no hay raíz alguna en la ecuación, de manera que se puede asegurar que la construcción del problema propuesto es imposible".* Aún va más lejos, en su método de resolución de ecuaciones, admite las raíces "falsas" (negativas) y las designa sin su signo, con lo que evita escribir algo imposible.

Así, la ecuación $x^2+4x+2=0$ tiene por soluciones las raíces falsas $r = e^{\sqrt{-1}\alpha}$ que en realidad son $-\left(2+\sqrt{2}\right),-\left(2-\sqrt{2}\right)$ números negativos, para la ecuación $x^2+4x+7=0$ declara que las soluciones son imaginarias sin escribir nada.

Lo paradójico es que Descartes al ampliar la geometría euclídea apoyándose en la creación de un punto de referencia se aproxima a lo que hoy llamamos referencia cartesiana que era una puerta para la representación geométrica de los complejos.

5.2. Jean Victor Poncelet, el rechazo

Se trata de un personaje de la geometría del primer cuarto del siglo XIX que, como dice CHASLES en su "Rapport sur les progrès de la geometrie..." *sus buenas dotes para las investigaciones en geometría pura le han conducido a brillantes descubrimientos... en 1822 pone al día el TRATADO DE LAS PROPIEDADES PROYECTIVAS DE LAS FIGURAS, que supone un paso considerable para la ciencia".*

Su trayectoria no deja de ser original. Salido del politécnico en 1810, participa en las guerras imperiales como teniente de ingeniería. Dado por muerto en el campo de batalla de Krasnoï, cerca de Smolensk, después de la derrota de las tropas del mariscal Ney, es hecho prisionero en Saratoff, en el Volga, entre 1813 y 1814. Tenía 24 años y durante sus dos años de prisionero escribe, sin fuente documental alguna y sólo a partir de lo que recordaba de matemáticas, siete cuadernos que servirán de fundamento a su tratado. A continuación deja el estudio de la geometría y se consagra a la la enseñanza de las ciencias mecánicas e industriales, no teniendo "*otro principio que ser útil a la clase obrera y a los jóvenes de nuestras escuelas, quería inspirarles su amor a las verdades eternas de la ciencia, el odio de la trama y de las sofisticas sutilezas de unos charlatanes codiciosos...*". Lo esencial de su trabajo fueron las propiedades proyectivas de las figuras.

Los trabajos de Poncelet en geometría son importantes pero se podría pensar que cuarenta años después de escribirlos, aceptaría poner en cuestión algunas de sus afirmaciones. El hecho es que hasta 1864 parece haber sido impermeable a trabajar en la representación geométrica de los complejos. Es contemporáneo de Cauchy y de sus escritos se deduce un buen conocimiento de la evolución de las matemáticas. Así conoce los trabajos contemporáneos de Cauchy, Coriolis, Plucker y otros, pero mantiene su posición.

La asociación de $\sqrt{-1}$ a una rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$, la perpendicularidad es el resultado de analogías engañosas aunque atractivas, lo que no le impidió la práctica de la misma analogía. Afirma que si la curva en polares $\rho = ae^{\theta}$ es una espiral logarítmica entonces la curva $r = e^{\sqrt{-1}\alpha}$ es una espiral logarítmica... imaginaria.

Quizás sea su hostilidad hacia Cauchy, que en esta época ya había hecho su " *Síntesis algebraica*", lo que le lleva a mantener esta posición; aunque hay que reconocer que Cauchy había dejado de considerar numerosos trabajos en su justo valor. Así guarda los trabajos de los jóvenes Galois y Abel que se revelarían como fundamentales.

Poncelet utiliza el término imaginario en geometría. Así si una recta corta a una cónica en dos puntos él le llama cuerda o secante real y los puntos, puntos de intersección reales.

Cuando la recta no es secante, los puntos de intersección se vuelven imaginarios. Una recta así, no construible, se llama recta imaginaria. Este principio de continuidad que permite pasar de una figura a otra con continuidad en los cálculos es lo que le ha llevado a persistir. Él aplica este principio para pasar de la espiral logarítmica a la espiral logarítmica imaginaria, que solo existe en la imaginación.

6. Los que construyen

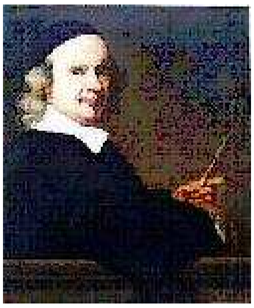
Los que se ocuparon de construir una interpretación geométrica de los imaginarios podemos clasificarlos en tres grupos no excluyentes. El primero se ocupa de la interpretación por áreas negativas; los otros dos corresponden a las interpretaciones comúnmente admitidas. La ortogonalidad y las transformaciones del plano.

Entre los autores implicados hay unos sobradamente conocidos como Wallis, Euler, Gauss y Cauchy, mientras que otros son casi desconocidos y algunos no eran ni matemáticos “profesionales”. BUEE, abad organista de Saint Martín de Tours, emigra a Inglaterra el 10 de agosto de 1793 y no tiene más que una sola comunicación matemática publicada en las Actas de la Royal Society de Londres. ARGAND era contable en Paris y WESSEL era agrimensor – cartógrafo del rey de Dinamarca. Para lo que se ha publicado bajo el nombre de Mourey no se sabe quien pueda ser, ¿ un matemático conocido con seudónimo? , ¿ Un grupo de alumnos de la Politécnica?. En su obra “*verdadera teoría de las cantidades negativas y de las cantidades pretendidas imaginarias”* publicada en 1828 y reeditada en 1861, muy citada por los matemáticos de la época, dice en el prólogo: “ *para desarrollar completamente esta teoría, habría que rehacer todas las ramas de las matemáticas. Yo no puedo ocuparme, como se puede comprender, mas que de los principios fundamentales, y sin embargo, he compuesto un manuscrito bastante considerable. Pero las circunstancias no me permiten imprimir una obra tan voluminosa, he decidido publicar primero este opúsculo, que es sólo un breve compendio”.* De hecho el opúsculo introduce un vocabulario nuevo y nuevas notaciones que quedaron sin continuidad.

¿ Que impacto real han tenido todos estos escritos en la finalización de una representación geométrica de los complejos?. La de Wessel pese a su gran calidad, no ha tenido influencia pues estaba escrita en danés y pasó desapercibida en su época.. Las otras si han sido citadas y conocidas. Contrariamente a la época de Descartes, la cuestión está suficientemente madura como para resolverla.

7. John Wallis, tentativas por todas partes

Wallis, contemporáneo de Newton, profesor de Geometría en Oxford desde 1649 a 1703, es uno de los fundadores de la Royal Society, equivalente a la Academia de Ciencias de Paris. En 1685 publicó *Traitise of Álgebra, Both historical and practical*. Comienza por justificar la existencia de números negativos examinando los desplazamientos de un hombre sobre una recta hacia delante y atrás de un punto A. Explica que cuando se trata de una aplicación física, una cantidad menor que nada no indica mas que una cantidad real, como con signo más pero en sentido contrario. Esta relación entre el más y el menos le lleva a querer interpretar los cuadrados negativos buscando definir las áreas negativas. Como para los retrocesos esto no es más que una cuestión de lenguaje, las áreas negativas se vuelven superficies perdidas, superficies cuadradas cuyo lado es imaginario. La inducción no parece muy adecuada porque es una manera muy complicada de decir las cosas y sobre todo porque no se ve la utilidad operatoria.



Wallis explica en **De las cantidades negativas y sus raíces imaginarias en álgebra:**

“Por ejemplo, supongamos que en un lugar, se gana al mar 30 Acres, pero que en otro lugar se pierden 20 Acres. Si preguntamos ¿cuántos acres se han ganado en total? La respuesta es 10 Acres o +10 lo que hace 1600 varas cuadradas (pues el Acre inglés es una superficie de 40 varas de longitud y 4 de largo, cuya área es 160, 10 Acres son 1600 varas).

Representadas como un cuadrado, nos da un lado de 40 varas o (admitiendo la raíz negativa) –40.

Pero si nosotros perdemos 20 Acres más y planteamos la misma cuestión ¿cuánto hemos ganado en total?. La respuesta debe ser – 10 Acres (30-20-20=-10), lo que quiere decir, la ganancia es 10 Acres menos que nada que es lo mismo que decir: hay una perdida de 10 Acres o 1600 varas cuadradas.

Hasta aquí no aparece ninguna nueva dificultad ni otra imposibilidad que las ya encontradas. Excepto que $\sqrt{1600}$ *es ambiguo, y puede ser +40 o –40 y que tal ambigüedad resulta que las ecuaciones cuadráticas admiten dos raíces.*

Pero ahora, suponiendo que esta superficie negativa, -1600 varas, tenga la forma de un cuadrado ¿cuál es su lado?.

Nosotros no podemos decir que es 40 ni –40 porque cada uno de ellos multiplicado por el mismo dará +1600 y no –1600, sino que es $\sqrt{-1600}$ *o lo que es equivalente* $10\sqrt{-16}$ *o* $40\sqrt{-1}$ $20\sqrt{-4}$ *o* $40\sqrt{-1}$*"*

Esta interpretación es un poco forzada y además no tiene utilidad operativa. Su segunda aproximación es la de las medias proporcionales:

"$\sqrt{\ }$ *implica una media proporcional entre una cantidad positiva y una cantidad negativa. Así, de la misma manera que* $\sqrt{bc}$ *significa una media proporcional entre +b y +c o entre –b y –c,* $\sqrt{-bc}$ *significa una media proporcional entre +b y –c o entre –b y +c. Y esto considerado algebraicamente es la verdadera naturaleza de las raíces imaginarias"*

Las medias proporcionales que tienen una interpretación geométrica cuando se trata de longitudes va a ser extendida a los números negativos.

Todas estas tentativas, pese a la falta de rigor, tienen el merito de tratar de encontrar una salida por una interpretación geométrica que por ahora no conducen a una buena respuesta de las raíces cuadradas dadas.

8. Buee, operación aritmético – geométrica y rotación

El abad Buee envió su "*Memoria sobre las cantidades imaginarias*" en 1805 a la Royal Society de Londres. Su memoria comienza por dar una interpretación de + y – sobre la que no hay nada que decir. Enseguida se percibe que los números indican en geometría más de lo que aparece allí, que pueden ser considerados como una asociación longitud – dirección.

> "*Considerados como signos de operaciones aritméticas + y – son los signos, uno de adición y el otro de sustracción.*
>
> *Considerados como signos de operaciones geométricas, indican direcciones opuestas. ... Cuándo se describe una línea de una longitud determinada en una dirección determinada, se hacen dos cosas 1º se da a esta línea su longitud; 2º se le da su dirección. La primera de estas operaciones es puramente aritmética. La segunda es puramente geométrica. En la 1ª se hace abstracción de la dirección. En la 2ª se hace abstracción de la longitud. Cuando se reúnen estas dos operaciones, se hace realmente una operación aritmético – geométrica".*

Ilustra estas nociones con la ayuda de tiempos pasados y futuros y también con propiedades y deudas. Luego viene el tema principal de su memoria, $\sqrt{-1}$.

Al igual que Wallis, da una interpretación de áreas negativas un poco más elaborada. Introduce la noción de rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$, lo que es una buena intuición pues efectivamente se puede asociar a $\sqrt{-1}$ una rotación de este ángulo, sin embargo el uso que hace de ella no va más allá que el de Wallis.

La preocupación de Buee como de sus predecesores es llevar a la convicción de la eficiencia de sus interpretaciones sobre la geometría y el cálculo.

Comienza con sumas debidas y no debidas, cuadrados con espesor y problemas de marmolistas que se plantean cuestiones de cubos llenos y cubos vacíos y los resuelven de manera muy complicada. Todo esto es muy poco convincente. Va más lejos y vuelve sobre su cuadrado que gira y llega a una conclusión mucho más interesante.

John Warren, pastor de Gravelay que no era científico de profesión, publica en 1829 una memoria "*consideración sobre las objeciones elevadas contra la representación geométrica de las raíces cuadradas de los números negativos",* en la cual justifica la realidad de los imaginarios por una aproximación en el dominio de la física por la composición de movimientos en dinámica. Atrae negativamente la atención sobre esta parte de la memoria de Buee diciendo que no puede comprender la prueba $\overline{KP}\left(\sqrt{-1}\right)^n = n\sqrt{-1}$ que asocia imaginarios y rotación en el plano. La confusión proviene de una mala extensión de una notación inadecuada, la primera parte $\left(\sqrt{-1}\right)^n = nT\left(\frac{\pi}{2}\right)$es suficientemente explicita para indicar que la multiplicación de $\sqrt{-1}$ n veces por el mismo corresponde a una sucesión de n rotaciones de ángulo $\frac{\pi}{2}$.

9. Robert Argand, una definición y un modo de operar claro

Fue después de un artículo de J.F. Francais, profesor de la Escuela Imperial de Artillería e Ingeniería aparecido en 1813 en los Annales de Mathematiques pures et apliquées dites aussi Annales de Gergonne, que Robert Argand declara ser el autor del "*Essai sur une maniere de representer les quantités imaginaires dans la constructions geometriques "* publicada anónimamente en 1806.

Argand nació en Genova en 1768 y murió en Paris en 1822 donde era " tenedor de libros". Es muy poco lo que se sabe de él, no hay datos sobre sus posibles estudios. Argand empieza con los números negativos y da unas ilustraciones con pesos sobre las bandejas de una balanza y fortunas activas y pasivas expresadas en francos. Muy hábilmente separa magnitud y dirección: "*La segunda es que, dos cantidades de una especie susceptible de proporcionar valores negativos comparadas entre ellas, la idea de su razón es compleja. Ella comprende: 1º la idea de razón numérica dependiendo de sus magnitudes respectivas consideradas absolutamente; 2º la idea de la razón de sus direcciones o sentidos a los que pertenecen, la misma u opuesta".*

La proeza, como podríamos decir, es que Argand llega a presentar su interpretación geométrica sin recurrir a una indicación del plano pero con la ayuda de un círculo trigonométrico. Hasta va un poco más lejos en su interpretación aproximándose a la noción de vector: *" Observemos ahora que, por la existencia de las relaciones que acaban de ser establecidas entre las cantidades* $\overline{KA}, \cdots \overline{KB}, \cdots \overline{KC} \cdots$*, no es necesario que la salida de la dirección, que constituye una parte de la esencia de estas cantidades, este fija en un punto único K; estas relaciones también se dan si se supone que cada expresión, como* $\overline{KA}$*, designa en general una magnitud igual a KA y tomada en la misma dirección..."*

Presenta también la diferencia de naturaleza de las operaciones introduciendo una nueva notación:

" Cantidades imaginarias, escribiendo, por ejemplo, $\sqcup$ a y $\Downarrow$ a en lugar de $+a\sqrt{-1}$*,* $-a\sqrt{-1}$*, los signos $\sqcup$ y $\Downarrow$ son positivos y negativos recíprocos "*

Esta propuesta no tendrá éxito. Pero, lo más importante, define la suma y multiplicación de lo que llama líneas dirigidas. Para la suma se trata, casi, de una suma vectorial:

" *Aplicando este mismo principio a las líneas de otros ordenes, se concluirá que, los puntos K, P, R cualesquiera, se tiene siempre* $\overline{KP} + \overline{PR} = \overline{KR}$ "

Y para la multiplicación:

" Para construir el producto de dos rayos dirigidos, hay que tomar, a partir del origen de los arcos, la suma de los dos arcos que pertenecen a esos rayos, y el extremo del arco suma determinará la posición del rayo producto. Es una multiplicación logarítmica. No es necesario mostrar que esta regla es válida para un número cualquiera de factores.

Si los factores no son unidades, se podrá poner bajo la forma $m\overline{KP}$*,..., m, n coeficientes o líneas primas positivas, y el producto será* $(mn...).(\overline{KB}.\overline{KC}...) = (M.N...)\overline{KP}$ *donde el producto de la línea positiva m.n por el rayo* $\overline{KP}$ *no es otra cosa que esta misma línea tirada en la dirección del rayo.*

La división se operará por un camino inverso que sería superfluo detallar"

Con este escrito se puede considerar que una representación geométrica de los complejos empieza a emerger. Quedará precisar su utilización en otros dominios como las transformaciones del plano que Buee había entreabierto. La iniciación del desarrollo de las teorías vectoriales con Bellavitis (primeros trabajos publicados en 1835) completará la utilización general que puede hacerse de los imaginarios en geometría. La unificación final se hará con el desarrollo de la noción de estructura ampliamente iniciada por Galois en un texto de 1830.

Será Hamilton quien, en 1837, fundamente el estatus aritmético de los complejos al considerarlos como pares ordenados de números reales. Por ello hay que admitir que dichos pares ordenados, con su adición y multiplicación, nada natural por cierto, puedan considerarse como números en sí, que satisfacen las mismas propiedades que los racionales, constituyen un cuerpo, aunque no puedan ordenarse como aquellos.

Tanto con fundamentación aritmética como algebraica, dada por Cauchy en 1847 apoyándose en las clases de restos en el anillo de polinomios en una indeterminada módulo x^2+1, los complejos quedan incorporados en el hacer matemático (aunque Borel en 1953 aún los denominaba ficticios).

Resulta interesante observar que los complejos se definen usando como base los reales que aún están indefinidos. Incluso Cauchy ha de suprimir, en aras del rigor, el que un limite caracterice un irracional para no incurrir en circulo vicioso.

10. Nuevas tecnologías y renacimiento de la representación

El estudio del estado de los sistemas dinámicos relanza la representación geométrica de los complejos. El origen de la teoría de sistemas dinámicos complejos data de comienzos del siglo XX con los trabajos de Gaston Julia y Pierre Fatou.

Louis Pierre Fatou nació en Lorient el 28 de Febrero de 1878 en el seno de una familia de marinos. Tras estudiar en le liceo de Lorient, comienza sus estudios matemáticos en la Ecole Normale Superieure de Paris en 1898. Tras los estudios, se presenta a un puesto en el observatorio de la ciudad pues pensaba que era imposible obtener uno como matemático. Obtiene el puesto, en 1901, pero siguió con su tesis de doctorado sobre integración y funciones complejas. La termina en 1906 y en 1907 obtiene el grado de doctor con " Series trigonométricas y series de Taylor " donde se muestra como uno de los mejores conocedores de la integral de Lebesque, una novedad en la época. La cuestión por la que se interesa es natural y antigua: estudiar una serie entera en su entorno de convergencia, el método es nuevo: la integral de Lebesque. El ha dejado su nombre a un lema cuya conclusión es $\int lim \inf f_n d\mu \leq \lim\inf \int f_n d\mu$ siendo f_n una sucesión de funciones medibles.

Fatou había empezado a estudiar la iteración en 1906, por una u otra razón (la tesis, problemas de salud, trabajo, su enorme afición a la música, la fotografía ...), a pesar de la originalidad de su aportación y de los sorprendentes resultados obtenidos, no había publicado nada sobre el tema. En 1915 la Academia de Ciencias publicaba el tema para el " Grand Prix des sciences mathematiques " de 1918, un estudio sobre iteraciones. Fatou comenzó a estudiar la cuestión y en 1917 comienza a publicar sus resultados en forma de notas en Comptes Rendus. En junio de este año, Montel publicaba también una artículo en Comptes Rendus sobre otro tema pero que contenía una idea que tomó Fatou, lo que se llamaría, sesenta años más tarde, el conjunto de Julia. Mientras tanto, Gaston Julia había leído también el artículo de Montel y tenía ideas parecidas. Montó en cólera, reclamó la prioridad y la Academia se la otorga. Fatou continua trabajando tranquilamente en su rincón, Julia envía un dossier para la candidatura del Grand Prix y vence.

Resulta interesante preguntarse por qué la Academia escoge este tema para el premio. La respuesta, posiblemente, se encuentre en el concurso propuesto por Oscar II, rey de Noruega y Suecia, en el cual retaba a mostrar rigurosamente que el sistema solar modelado por las ecuaciones de Newton era dinámicamente estable. El concurso fue ganado por Poincaré quien, pese a no dar la solución completa, usó la iteración en sus estudios de mecánica celeste, creando un nuevo método analítico y vislumbrando lo que con el tiempo sería la teoría del caos.

Tampoco debemos olvidar, como respuesta, el interés por estudiar la iteración de Köening en 1880 y por el matemático alemán Ernst Schröder.

Parece ser que a Fatou, un hombre meditativo, reflexivo, reservado, silencioso y discreto, a veces taciturno, no le interesaban demasiado los fractales, pero preparó el camino para los futuros trabajos de Julia y Mandelbrot, quizás por eso se conoce, en su honor, a las figuras de Julia provenientes del exterior del conjunto de Mandelbrot, “Polvos de Fatou”.

Gaston Maurice Julia nació el 3 de Febrero de 1863 en Siddi Abbes, Argelia. Fue llamado al ejercito el 4 de Agosto de 1914, ascendió a Teniente y mandó su destacamento el 25 de Enero de 1915 en un combate de extrema violencia en el que una bala destrozó su cara y le arrancó la nariz.

Para distraerse del dolor que le producían las heridas, se sumergió en un problema matemático: El comportamiento de la fórmula que se encuentra tras los fractales de Julia.

Tras la salida del hospital militar y con la guerra terminada, publica, en 1918, un libro de unas 200 paginas titulado “*Memoria sobre la iteración de las funciones racionales*”. Gracias a él gana el Grand Prix de las Academia de Ciencias y adquiere una gran reputación en los círculos matemáticos.

En 1925 se dan seminarios en Berlín para estudiar sus trabajos a fondo pero, como no se conocían los ordenadores para trabajarlos, sus trabajos caen en el olvido.

Será Benoit Mandelbrot quien redescubre los trabajos de Julia justo antes de su muerte en 1978.

Benoit Mandelbrot nació el 20 de Noviembre de 1924 en Polonia. En 1936 sus padres emigran a Francia donde su tío, Szolem Mandelbrot, se encarga de su formación. Esta influencia fue positiva pero también negativa pues su tío admiraba a Hardy y su filosofía en matemáticas, lo que provocó la aversión de Mandelbrot por las matemáticas teóricas.

La guerra le impidió una asistencia regular al Liceo pero aprendió como autodidacta. En 1944 empieza sus estudios en la Politécnica donde tenia como profesores, entre otros, a Julia y Paul Levy, este último de gran influencia para él.

En 1945 su tío le enseña la memoria de Julia (1918) como una buena fuente de problemas interesantes, pero en ese momento no le interesó.

En 1970 cambiaría su interés. En esta época trabajando en IBM obtiene por primera vez una representación del conjunto de Julia.

Julia y Fatou se plantearon el problema de determinar que sucede con un punto z del plano complejo cuando se le aplica iteradamente la transformación $f_c(z)=z^2+c$, es decir, en lenguaje actual, estudiar la orbita de los puntos z de $\mathbb{C}$ en el sistema dinámico $\left(\mathbb{C}, f_c(z) = z^2 + c\right)$.

Observaron que, para ciertos valores de c, la orbita de los puntos de un entorno del origen convergía a un determinado punto del plano complejo, que resultaba ser un punto fijo de la aplicación $f_c(z)=z^2+c$, mientras que la orbita de los puntos más alejados del origen se dispersaba hacía infinito. Cada uno de estos tipos de puntos constituye una región, y en medio queda una frontera infinitamente delgada que se conoce con el nombre de conjunto de Julia.

La orbita de los puntos de ambas regiones se va alejando del conjunto de Julia, hacia dentro o hacia fuera, respectivamente.

A la vista de los diferentes conjunto de Julia que se van obteniendo, asociados al sistema dinámico cuadrático, al elegir distintos valores del parámetro $c \in \mathbb{C}$, nos podemos preguntar si existe alguna posibilidad de clasificarlos y ordenarlos según su forma y estructura. Esta idea se basa en un hecho ya conocido por Julia y Fatou, que nos dice que para cualquier valor del parámetro $c \in \mathbb{C}$ el conjunto Julia asociado resulta ser de uno de los dos tipos siguientes: a) Conexo, es decir formado por una sola pieza b) Completamente disconexo, es decir formado por una nube de puntos dispersos con la misma estructura que los conjuntos de Cantor.

Pues bien, el conjunto de Mandelbrot es el conjunto de puntos $c \in \mathbb{C}$ para los que el conjunto de Julia asociado al sistema dinámico $\left(\mathbb{C}, f_c(z) = z^2 + c\right)$ resulta ser conexo.

Bibliografia

Boyer, C.B. (1986). *Historia de la matemática*, A.U./94,Madrid
Bourbaki, N. N. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas*, AE
Collete, J. (1985). *Historia de las matemáticas*, siglo XXI, Madrid
Crowe, M.J. (1985). *A History of Vector Analysis*(.Univ. Notre Dame Press,Notre Dame1967 y Dover ,1985)
Garcia Doncell, M. (1984). Orígens Físics de l'analisi vectorial en *El desenvolupament de les matemátiques al segle XIX,* Institut d'estudis catalans, Barcelona.
De Guzman, M.; Martín, M.; Morán, M.; Reyes, M. (1993). *Estructuras fractales y sus aplicaciones* , Labor, Barcelona
De Lorenzo, J. (1977). *La matemática y el problema de su historia*, Tecnos, Madrid
Gibbs; J. (1891). On the Role of Quaternions in the Algebra of Vector, Nature, 43,511
Hestenes, D. (1986). *New Foundations for Classical Mechanics*, Kluwer, Dordrecht
Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días* (II),AU/724, Madrid
Mandelbrot, B. (1993). *Los objetos fractales*, Tusquet Editores, S.A. Barcelona
Parra Serra (1997). *L'Algebra vectorial* (IEC)
Taton, R. (1988). *Historía general de la ciencia*,(VIII),Orbis, Barcelona

Antonio Rosales Góngora Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada, ejerzo la docencia en el IES Bahía de Almería. He publicado artículos relacionados con la Historia de las Matemáticas en la revista Epsilon, en el Boletín matemático de la UAL, revista Unión, revista Virtual Matemáticas, Educación e Internet. anrogo58@yahoo.es