UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2010, Número 22, páginas 151-156
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Estimación y generalización

Problema

En la tabla siguiente, como parte de un estudio ecológico en una zona de la sierra, se daba información sobre la cantidad de integrantes de la población de cierta especie animal, en miles, durante seis años consecutivos. La información sobre el 2005, por un error, se borró:

2000	2001	2002	2003	2004	2005
4	4,8	5,76	6,91	8,29	

Asumiendo que se mantuvo la forma en que creció esta población, dar una estimación de los miles de integrantes que hubo en el 2005.

En esta ocasión, quiero compartir con los lectores una experiencia tenida en una clase de 90 minutos, con 65 alumnos y luego unos comentarios al respecto. Este problema lo propuse a mis alumnos del primer ciclo de estudios superiores, en un curso de matemáticas dirigido a estudiantes que optaron por estudiar especialidades en las que el uso de las matemáticas no es muy intensivo. Cabe mencionar que ya habíamos estudiado la función lineal y la función cuadrática.

La primera reacción de ellos ante el problema, fue usar una función lineal, pero pronto verificaron que el crecimiento de un año al siguiente no era siempre el mismo; así, por ejemplo, del 2000 al 2001 la población aumentó en 0,8 miles de habitantes, pero del 2001 al 2002 la población aumentó en 0,96 miles de habitantes.

Con cierto escepticismo, algunos alumnos pensaron en usar una función cuadrática, considerando el año 2000 como el "año cero" y así el punto (0; 4) como el vértice de una parábola y los otros datos como puntos de su rama creciente. Luego de unos cálculos, se convencieron de que esta situación no se podía modelizar con una función cuadrática[1].

De pronto uno de los alumnos dijo:

> *"El dato que se borró fue 9,95".*

Mi pregunta natural fue

> *"¿Y cómo sabes?",*

[1] Los cálculos correspondientes los considero al final, como un apéndice, para no distraer la atención del lector sobre el aspecto que ahora me propongo destacar.

a lo cual respondió con un gráfico como el siguiente:

4 4,8 5,76 6,91 8,29

0,8 0,96 1,15 1,38

0,16 0,19 0,23

0,03 0,04

Con estos resultados, el número correspondiente al 2005 lo estimó con la siguiente suma:

$$0{,}05 + 0{,}23 + 1{,}38 + 8{,}29 = 9{,}95$$

El esquema que hizo, le sirvió para conjeturar que la siguiente diferencia sería 0,05 y a partir de ese número, fue reconstruyendo los que faltaban, que en verdad son las sumas parciales de dos, tres y cuatro sumandos (en el orden en el que están escritos).

Admitimos el procedimiento como una forma de hacer la estimación, pero pedí a los alumnos que piensen en alguna otra forma de hacerla, de modo que nos facilite hacer estimaciones con menos cálculos y también para otros años, no necesariamente próximos al 2004.

Luego de unos segundos, una alumna dijo:

"*Tengo otra forma más sencilla*"

Al pedirle que la explique, mostró las siguientes divisiones:

$$\frac{4{,}8}{4} = 1{,}2; \qquad \frac{5{,}76}{4{,}8} = 1{,}2; \qquad \frac{6{,}91}{5{,}76} = 1{,}199652778; \qquad \frac{8{,}29}{6{,}91} = 1{,}199710564$$

Luego afirmó que puede considerarse que los cocientes son todos iguales a 1,2 y que en consecuencia, para el año 2005 la población de tal especie animal se obtendría multiplicando la población en el 2004 por 1,2.

Así, se tiene:

$$8{,}29 \times 1{,}2 = 9{,}948$$

Fue gratamente sorprendente para todos que esta forma de hacer la estimación esté tan próxima a la estimación anterior (9,95) ¡Solo 2 milésimas de diferencia! (o sea 2 integrantes de la población, recordando que la información está en miles de habitantes).

Hice notar que este modelo para estimar la población en el 2005 es fácilmente usable para estimar la población en otros años, pues observamos que considerando el 2000 como el "año cero" y en consecuencia los otros como los años 1, 2 , 3, etc., podemos llamar f a la función que asigna a cada año el número de integrantes de esa población; y usando la notación funcional, escribimos del siguiente modo la información dada:

$$f(0) = 4;\quad f(1) = 4{,}8;\quad f(2) = 5{,}76;\quad f(3) = 6{,}91;\quad f(4) = 8{,}29$$

Teniendo en cuenta las divisiones hechas y asumiendo que se mantendrá el cociente 1,2 al dividir la población de un año entre la población del año anterior, tenemos que:

$f(0) = 4$
$f(1) = 4{,}8 = 4(1{,}2)$
$f(2) = 5{,}76 = 4{,}8\,(1{,}2) = 4\,(1{,}2)\,(1{,}2)$; o sea $\qquad f(2) = 4\,(1{,}2)^2$
$f(3) = 6{,}91 \approx 5{,}76\,(1{,}2) = 4\,(1{,}2)^2\,(1{,}2)$; o sea $\qquad f(3) = 4\,(1{,}2)^3$
$f(4) = 8{,}29 \approx 6{,}91\,(1{,}2) = 4\,(1{,}2)^3\,(1{,}2)$; o sea $\qquad f(4) = 4\,(1{,}2)^4$

En consecuencia, para el año 2005:

$f(5) = 8{,}29\,(1{,}2) = 4\,(1{,}2)^4\,(1{,}2) = 4\,(1{,}2)^5$; o sea $\qquad f(5) = 4\,(1{,}2)^5$.

Recordando que $(1{,}2)^0 = 1$ y que $(1{,}2)^1 = 1{,}2$ también podemos escribir

$$f(0) = 4\,(1{,}2)^0 \qquad \text{y} \qquad f(1) = 4\,(1{,}2)^1$$

y, generalizando, asumimos que

$$f(x) = 4\,(1{,}2)^x\,,\qquad x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \ldots\}$$

Así podemos estimar, por ejemplo, que el número miles de habitantes de tal población en el 2010 será

$$f(10) = 4\,(1{,}2)^{10} = 4\,(6{,}191736422) = 24{,}76694569 \approx 24{,}77.$$

Ciertamente, el problema fue propuesto pensando en llegar a una función exponencial y ya habíamos llegado. Con la experiencia desarrollada, se allanó el camino para explicitar y comentar otras propiedades de esta función, relacionadas con la variación porcentual (incremento o decremento relativo en porcentaje) y la transformación de progresiones aritméticas en progresiones geométricas. Específicamente:

a) La variación porcentual de la población, considerando dos años cualesquiera, se obtiene con la conocida fórmula $\dfrac{Valor\ \ final - Valor\ inicial}{Valor\ inicial}\times 100\%$. Si consideramos como valor inicial la población de un año cualquiera x y como valor final la población h años después, tal fórmula se puede escribir como

$$\frac{4(1{,}2)^{x+h} - 4(1{,}2)^x}{4(1{,}2)^x}\times 100\%$$

Y es fácil ver que esta expresión es igual a

$$[(1{,}2)^h - 1]\mathrm{x}100\%,$$

lo cual nos dice que no depende de x. Vemos que solo depende de h, que es la diferencia entre los años considerados. Es claro que si tomamos años consecutivos, el valor de h es 1 y entonces la variación porcentual es

$$[(1{,}2)^1 - 1]\text{x}100\% \; ;$$

es decir, del 20%. Esto nos permite decir que, según el modelo asumido, la variación porcentual de la población de un año al siguiente es del 20%.

Si consideramos otro valor de h, por ejemplo 3, tendremos que la variación porcentual de la población cada tres años es

$$[(1{,}2)^3 - 1]\text{x}100\% \; .$$

O sea 72,8%.

b) En la modelización hecha, la secuencia de años considerados es

$$\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\},$$

que es una progresión aritmética de razón 1; y la secuencia de valores correspondientes, según la función encontrada es

$$\{4;\ 4(1{,}2);\ 4(1{,}2)^2;\ 4(1{,}2)^3;\ 4(1{,}2)^4;\ 4(1{,}2)^5\}$$

que evidentemente es una progresión geométrica de razón 1,2.

Luego se pasó a definir la función exponencial de manera más general, a graficarla, considerar los casos decrecientes y enunciar las propiedades características de la función exponencial, a partir de las observaciones hechas a la función encontrada. Se destacó la propiedad característica de la función exponencial

$$g(x) = b\,a^x$$

de tener variaciones porcentuales constantes, correspondientes a variaciones iguales en la variable independiente (fijado el cambio de la variable independiente en h unidades) y de hacer corresponder a toda progresión aritmética de razón h una progresión geométrica de razón a^h. [2]

Comentarios

1. La experiencia con este problema nos lleva a reflexionar sobre la estimación, la conjetura, la generalización. La primera está relacionada con aspectos prácticos de la matemática en la vida cotidiana, pues es natural que con frecuencia estemos haciendo estimaciones y no necesariamente con recursos formales de la matemática; por ejemplo, al estimar el tiempo que nos tomará hacer determinado trabajo, el monto que tendremos que pagar por ciertas compras en un mercado, el tiempo que tardaremos en llegar a determinado lugar, etc. En todos los casos, para estimar se busca algún referente y hay diversas técnicas de estimación, como hacer comparaciones, simulaciones, muestreos, modelizaciones, interpolaciones o extrapolaciones. Ciertamente, es un aspecto

[2] Un tratamiento formal y riguroso y orientado a profesores de la enseñanza media, se encuentra en el libro de Elon Lages Lima y colaboradores (2008). *La Matemática de la Enseñanza Media*, Vol.1. Lima: IMCA.
En la tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de Elizabeth Advíncula (2010), defendida en la Pontificia Universidad Católica del Perú, hay una investigación interesante para la enseñanza de la función exponencial, en el marco de las situaciones didácticas.

muy importante de la matemática, de la cual debemos ser muy conscientes los profesores y brindar experiencias de estimación a nuestros estudiantes.

2. El problema de estimación propuesto se resolvió mediante comparaciones y una modelización con una función exponencial. Para ello se observó la información recibida, se hicieron unos cálculos (las diferencias sucesivas en la primera forma de obtener la estimación y las divisiones entre valores para años consecutivos en la segunda), se asumió cierto comportamiento aproximativo (observando las diferencias en la primera forma, se asume que la siguiente diferencia será 0,05; y en la segunda, observando que los cocientes son 1,2 o muy cercanos a este valor, se asume que todos los cocientes serán 1,2) y con estos supuestos se encontró un valor estimado del dato buscado. Luego se pasó a generalizar (se asumió como modelo la función exponencial $f(x) = 4\ (1{,}2)^x$). Así se posibilitó otras estimaciones y se aprovechó la notación funcional para encontrar propiedades del comportamiento de la población.

   Al optar por un modelo, juega papel importante la intuición y la conjetura, interactuando con la formalización. Cuando unos alumnos pensaron usar un modelo lineal o un modelo cuadrático, algunos cálculos relacionados con estos modelos, hicieron que se abandone tales intentos.

3. La generalización es uno de los procesos importantes del pensamiento matemático. Ciertamente, pasar de lo particular a lo general es un proceso que va más allá de las matemáticas y es materia de estudio en la epistemología y en las diversas ciencias. El enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, conocido como EOS, lo considera en las facetas duales extensivo/intensivo y ostensivo/no ostensivo y un trabajo interesante en esta línea es el artículo de V. Font y A. Contreras "*The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education*" publicado en Educational Studies in Mathematics, 2008, 69:33-52.

   Ciertamente, la intuición y las conjeturas están vinculadas con el paso de lo particular a lo general; y las afirmaciones generales están vinculadas con la formalización y la demostración

   Es importante que los docentes, cualquiera que sea el nivel educativo en el que ejerzamos la docencia, tengamos claridad sobre estas perspectivas.

4. Un breve comentario final es el relacionado con la continuidad de la función exponencial (que se refleja al hacer las gráficas) y el carácter discreto que tiene el problema y el tratamiento que se ha hecho. La vinculación entre lo discreto y lo continuo es otro aspecto importante en la matemática y en la educación matemática, en el que se ha investigado y todavía hay mucho que investigar. Nuestras clases y las reacciones de nuestros alumnos nos brindan elementos para ello.

Apéndice

Si la situación se pudiera modelizar con una función cuadrática, considerando el punto (0; 4) como el vértice de una parábola y los otros datos como puntos de su rama creciente, tal función sería de la forma

$$f(x) = a\ (x - 0)^2 + 4$$

o sea $$f(x) = a\,x^2 + 4$$

Se determina el coeficiente a usando un punto de paso, por ejemplo el punto (1; 4,8); así:

$$f(1) = 4{,}8 \ = a\,1^2 + 4$$

de donde $a = 0{,}8$ y la forma concreta de la función sería

$$f(x) = 0{,}8x^2 + 4$$

Es fácil verificar que este modelo cuadrático no corresponde a la situación descrita, pues

$$f(2) = 0{,}8(2)^2 + 4 = 7{,}2$$

que es diferente al valor 5,76 que se da en el cuadro para el año 2002.