UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 31-36
ISSN: 1815-0640

Patrones de solución de polinomios y reglas de conteo: Aplicación a un polinomio elevado a la cuarta

David Gómez Sánchez, José Manuel Romo Orozco, Adoración Gómez Sánchez.

Resumen

Se presenta una propuesta de solución de un polinomio elevado a la cuarta potencia, con la forma de un producto notable, lo que facilita los cálculos del resultado, optimiza el tiempo y la exactitud; la técnica está basada en los patrones de solución de los polinomios elevados al cuadrado y al cubo, además de utilizar técnicas de conteo de permutaciones y combinaciones que permiten prever la cantidad de términos en el resultado, lo que da mayor confianza al estudiante.

Abstract

We presented a solution proposed of a polynomial fourth degree, with polynomial identities, which facilitates the calculation of the result, optimizes the time and accuracy. The technique is based on standard solution of the polynomial second degree and third degree. Too we used permutations and combinations that can anticipate the number of terms, which gives more self assurance to the student.

Resumo

Apresenta-se uma proposta de solução de um polinômio elevado à quarta potência, com a forma de um produto notável, o que facilita os cálculos do resultado, otimiza o tempo e a exatidão; a técnica está baseada nos padrões de solução dos polinômios elevados ao quadrado e ao cubo, além de utilizar técnicas de contagem de permutações e combinações que permitem prever a quantidade de términos no resultado, o que dá maior confiança ao estudante.

Introducción

La población de 15 a 19 años que estudia en el nivel medio y superior tiene serias dificultades en el estudio del algebra, ya que para realizar operaciones que impliquen la multiplicación de polinomios, se requieren de concentración y cuidados minuciosos, pues al ser mayor el número de elementos que contiene el polinomio, las operaciones a realizar crecen de manera proporcional, lo que minimiza la precisión del resultado y maximiza el tiempo para obtener una solución correcta.

Esta propuesta implica una mejora en tiempo y precisión de la técnica derivada de los productos notables y del Triángulo de Pascal, además de introducir criterios como el conteo de términos en el resultado final. Trabajos previos, (Álgebra de Baldor en sus diferentes ediciones) muestran la ventaja de conocer y utilizar los productos notables para disminuir el tiempo de solución y aumentar la precisión en el resultado: conocemos que la multiplicación de dos binomios con un término en común da como resultado un trinomio cuadrado, la multiplicación de binomios conjugados da como resultado una diferencia de cuadrados, y para un binomio elevado al cuadrado el resultado es un trinomio cuadrado perfecto, solución que a su vez es un caso específico del triángulo de Pascal, el cual nos compete para proponer la técnica de mejora, así como la solución de un trinomio elevado al cubo y de un cuatrinomio elevado a la cuarta

Patrones de solución de un polinomio elevado al cuadrado y conteo de términos del resultado

Para obtener el resultado se comienza con identificar los patrones de solución de un binomio elevado al cuadrado utilizando los productos notables. Los productos notables son operaciones simplificadas donde un polinomio se expresa en factores mientras que el producto de los factores se convierte en un polinomio. (Thomson, 1981). Si la solución de un binomio elevado al cuadrado es:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Analizando la respuesta se tiene que:

- En el resultado hay tantos términos al cuadrado como términos en el polinomio.
- Existe un doble producto de los términos que forman el binomio.

Si el binomio se resuelve con el Triángulo de Pascal y no con el producto notable, la respuesta es la misma pero se observa lo siguiente:

- Que la suma de los exponentes de los elementos que forman el resultado tiene el mismo grado que el polinomio a resolver, en este caso dos, y por ningún motivo el grado aumentará o disminuirá en cada uno de ellos.

Por lo anterior, el razonamiento lógico para obtener el resultado es el siguiente:

> El resultado de un polinomio de k términos elevado al cuadrado es el cuadrado de los términos que lo forman, más el doble producto de todas las combinaciones de dos términos que se puedan obtener sin repetir alguna.

Para saber cuántos términos forman el resultado, sólo basta con sumar el número de términos al cuadrado (mismo número de términos que forman el polinomio, k términos) con el número de términos formados por un doble producto que se puede calcular mediante una regla de combinaciones igual a:

$$\frac{k!}{2!\,(k-2)!}$$

En donde k es el número de términos del polinomio y el dos representa la cantidad de términos que se juntan para formar una combinación.

Una combinación "es el número de modos de seleccionar X número de objetos de k objetos posibles, sin tomar en cuenta el orden de los objetos en la combinación" (Berenson, 1996).

En el caso analizado, no existen combinaciones de tres o más términos ya que como se concluyó por el Triángulo de Pascal, no puede existir en el resultado final un término con mayor o menor grado que el polinomio mismo.

Ejemplo:

Resolver $(a+b+c+d+e+f\,)$

El número de términos que contendrá el resultado es el siguiente:

$$k + \frac{k!}{2!\,(k-2)!}$$

$$7 + \frac{7!}{2!\,(7-2)!}$$

$$7 + \frac{1x2x3x4x5x6x7}{1x2(1x2x3x4x5)}$$

$$7 + 21 = \mathbf{28\ t\acute{e}rminos}$$

Y la solución final es:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2ae + 2af + 2ag + 2bc + 2bd + 2be + 2bf + 2bg + 2cd + 2ce + 2cf + 2cg + 2de + 2df + 2dg + 2ef + 2eg + 2fg$$

Patrones de solución de un polinomio elevado al cubo y conteo de términos.

Para obtener el resultado, se parte de los patrones de solución de un trinomio elevado al cubo:

Si la solución de un trinomio al cubo es:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc$$

Analizando el resultado se observa que:

- Hay tantos términos al cubo como términos en el polinomio.
- Existe un triple producto de cada dos términos que forman el trinomio, la primera posición corresponde al término que se eleva al cuadrado y la segunda al término lineal.
- Existe un séxtuplo producto de los tres términos que forman el trinomio.
- La suma de los exponentes de los elementos que forman el resultado tiene el mismo grado, en este caso tres, que el polinomio a resolver, y por ningún motivo el grado aumentará o disminuirá en cada uno de los términos del resultado.

El razonamiento lógico para obtener el resultado es el siguiente: El resultado de un polinomio de k términos elevado al cubo es: el cubo de los términos que forman el polinomio más el triple producto de todas las combinaciones (permutaciones) de dos términos que se puedan obtener tomando en cuenta el orden debido a que el primer término tiene una potencia dos y el segundo uno, más el séxtuplo producto de todas las combinaciones de tres términos que se puedan obtener sin repetirse.

Una permutación "es cada uno de los diferentes arreglos que pueden hacerse de una parte de los elementos, o con todos los elementos, tomando en cuenta el orden de los elementos en la permutación" (MarcadorDePosición1) (Ch., 1984)Para saber cuántos términos forman el resultado sólo basta con sumar el número de términos al cuadrado que son los mismos que forman el polinomio, k términos, más el número de términos formados por un triple producto, que se puede calcular con una regla de conteo para permutaciones:

$$\frac{k!}{(k-2)!}$$

Más los términos formados por el séxtuplo producto, que se calcula con la siguiente regla de conteo para combinaciones:

$$\frac{k!}{3!\,(k-3)!}$$

En las expresiones anterior k es el número de términos del polinomio, mientras que el tres y el dos representan la cantidad de términos que se juntan para formar una combinación.

No existen combinaciones de cuatro ó más términos, ya que como se concluyó al hacer el análisis en el Triángulo de Pascal no puede existir en el resultado final un término con mayor o menor grado que el polinomio mismo.

Ejemplo:

Resolver $(a+b+c+d+e)^3$

Los términos que forman el resultado son:

$$k+\frac{k!}{(k-2)!}+\frac{k!}{3!\,(k-3)!}$$

$$5+\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{3!\,2!}$$

$$5+\frac{1x2x3x4x5}{1x2x3}+\frac{1x2x3x4x5}{(1x2x3)(1x2)}$$

$$5+20+10=\boldsymbol{35\ t\acute{e}rminos}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+3a^2b+3a^2c+3a^2d+3a^2e+3b^2a+3b^2c+3b^2d+3b^2e$$
$$+3c^2a+3c^2b+3c^2d+3c^2e+3d^2a+3d^2b+3d^2c+3d^2e+3e^2a+3e^2b$$
$$+3e^2c+3e^2d+6abc+6abd+6abe+6adc+6aec+6ade+6bcd$$
$$+6bce+6bed+6cde$$

Propuesta de una solución de un polinomio elevado a la cuarta

Como se ha analizado en los casos anteriores, la solución para un polinomio elevado al cuadrado está basada en los patrones de solución de un binomio al cuadrado y la solución para un polinomio elevado al cubo está basada en la de un trinomio a esa potencia, por lo que se deduce que el polinomio elevado a la cuarta se basa en el patrón de solución del cuatrinomio elevado a la cuarta, como se muestra a continuación.

La solución de $(a+b+c+d)^4$ es la siguiente: $((a+b+c+d)^2)^2$

$$(a^2+b^2+c^2+d^2+2bc+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd)^2$$

$$a^4+b^4+c^4+d^4+4a^2b^2+4a^2c^2+4a^2d^2+4b^2c^2+4b^2d^2+4c^2d^2+2a^2b^2 \\ +2a^2c^2+2a^2d^2+4a^3b+4a^3c+4a^3d+4a^2bc+4a^2bd+4a^2cd+2b^2c^2 \\ +2b^2d^2+4ab^3+4ab^2c+4ab^2d+4b^3c+4b^3d+4b^2cd+2c^2d^2+4abc^2 \\ +4ac^3+4ac^2d+4bc^3+4bc^2d+4c^3d+4abd^2+4acd^2+4ad^3+4bcd^2 \\ +4bd^3+4cd^3+8a^2bc+8a^2bd+8ab^2c+8ab^2d+8abcd+8a^2cd \\ +8abc^2+8acdb+8ac^2d+8acbd+8abd^2+8acd^2+8b^2cd+8bc^2d \\ +8bcd^2$$

Que simplificado queda de la siguiente forma:

$$a^4+b^4+c^4+d^4+6a^2b^2+6a^2c^2+6a^2d^2+6b^2c^2+6b^2d^2+6c^2d^2+4a^3b+4ab^3 \\ +4a^3c+4ac^3+4a^3d+4ad^3+4b^3c+4bc^3+4b^3d+4bd^3+4c^3d \\ +4cd^3+12a^2bc+12a^2bd+12a^2cd+12ab^2c+12ab^2d+12b^2cd \\ +12abc^2+12ac^2d+12bc^2d+12abd^2+12acd^2+12bcd^2+24abcd$$

La solución de un polinomio elevado a la cuarta es: cada uno de los términos que lo forman elevado a la cuarta, más el cuádruple producto de las permutaciones de dos términos que se puedan hacer donde el primer término de la permutación tiene un exponente tres y el segundo uno, más el séxtuplo producto de las combinaciones de dos términos que se puedan obtener sin repetirse alguna y en donde cada término tiene un exponente dos, más el doceavo producto de las combinaciones de tres términos donde para cada combinación posible se eleva al cuadrado cada uno de los términos a la vez, más el vigésimo cuarto producto de las combinaciones de cuatro términos que puedan existir.

La cantidad de términos que se deben obtener en el resultado se calcula con las reglas de conteo para combinaciones y permutaciones, es decir:

$$k+\frac{k!}{(k-2)!}+\frac{k!}{2!\,(k-2)!}+3\frac{k!}{3!\,(k-3)!}+\frac{k!}{4!\,(k-4)!}$$

En donde k es el número de términos del polinomio, el cuatro, el tres y el dos que están indicados en las operaciones factoriales representan la cantidad de términos que se juntan para formar una combinación y el tres del producto de la combinación es la cantidad de posibilidades diferentes en que el exponente cambiará para cada uno de los términos de la combinación. El cálculo de términos para el caso anterior de un cuatrinomio elevado a la cuarta es:

$$4+\frac{4!}{(4-2)!}+\frac{4!}{2!\,(4-2)!}+3\frac{4!}{3!\,(4-3)!}+\frac{4!}{4!\,(4-4)!}$$

$$4+\frac{1x2x3x4}{1x2}+\frac{1x2x3x4}{1x2(1x2)}+3\frac{1x2x3x4}{1x2x3(1)}+\frac{1x2x3x4}{1x2x3x4(1)}$$

$$4+12+6+3(4)+1$$

$$4+12+6+12+1=\mathbf{35\ t\acute{e}rminos}$$

Que comprueba el patrón de conteo para definir la cantidad de términos en el resultado de un polinomio elevado a la cuarta potencia.

Conclusiones

Después del análisis anterior se concluye que la solución de los polinomios elevados al cuadrado, al cubo y a la cuarta potencia toman la forma simple de un producto notable, como se muestra siendo el caso del polinomio elevado a la cuarta la propuesta de mejora.

La inclusión de las técnicas de conteo de permutaciones y combinaciones es factible de utilizarse para determinar de manera precisa la cantidad de términos que contendrá el resultado de un polinomio elevado al cuadrado, al cubo y a la cuarta potencia, lo que facilita la enseñanza y el aprendizaje de éstos.

Bibliografía

Baldor, A. (2007). *Algebra*. Segunda edición, ed. Grupo editorial patria, 376-388.

Berenson, M. L. Levine, D. M. (1996). *Estadística básica en administración*. sexta edición, ed. Pearson/Prentice Hall, 230-231

Lehmann, Ch. H. (1984). *Algebra*. Decimonovena reimpresión, ed. Limusa, 287.

Thompsom, J. E. (1981). *Algebra*. Segunda edición, ed. Unión tipográfica editorial Hispano-Americana, 63.

David Gómez Sánchez. Nació en Cd. Fernández, San Luis Potosí, México el 4 de octubre de 1980, egresado de la carrera de Ingeniero Mecánico Electricista, de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí (UASLP), y estudió la Maestría en Administración en la misma Universidad. Actualmente es Profesor Investigador de Tiempo Completo en la Unidad Académica Multidisciplinaria Zona Media de la UASLP. **david.gomez@uaslp.mx**

José Manuel Romo Orozco. Originario de Cd. de México (1966-), Ingeniero civil por la Universidad la Salle y Máster en Medio Ambiente Urbano y Sostenibilidad Urbana por la Universidad Politécnica de Cataluña. Actualmente es Profesor Investigador de la Unidad Académica Multidisciplinaria Zona Media de la UASLP. **jmromo@uaslp.mx**

Adoración Gómez Sánchez. Nació en Cd. Fernández, San Luis Potosí, México el 6 de mayo de 1978, es Ingeniera Civil por la UASLP y Doctora Ingeniera de Caminos, Canales y Puertos por la Universidad Politécnica de Madrid. Actualmente es docente en la carrera de Ingeniero Civil de la Unidad Académica Multidisciplinaria de la Unidad Zona Media, UASLP. **adoracion@uaslp.mx**