UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 165-172
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

De lo particular a lo general, usando grafos

Problema

En una reunión hay n personas. Algunas de ellas se conocen entre sí (relación simétrica) y otras no. Se sabe que cada persona conoce solamente a otras tres personas en la reunión. Determinar los valores posibles del número natural n.

Este fue uno de los problemas presentados en un taller sobre resolución de problemas, para profesores de secundaria, en el marco del *V Coloquio Internacional de Enseñanza de las Matemáticas*, organizado por el IREM – Perú y la Maestría en Enseñanza de las matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, que tuvo lugar en febrero de este año en Lima. El taller fue preparado y desarrollado por Jorge Tipe, John Cuya y Sergio Vera, tres estudiantes universitarios, ex olímpicos y ganadores de medallas en olimpiadas matemáticas nacionales e internacionales. La coordinación general y la adecuación de los problemas en cuestiones de dificultad graduada para ser trabajadas individualmente y en grupo, estuvo a mi cargo.

Este problema lo trajo Jorge Tipe a la discusión en el grupo. Ciertamente, la dificultad principal del problema es el nivel general que se pide examinar. Para llegar a tal nivel, resulta esencial – didáctica y matemáticamente – examinar casos particulares y, mejor aún si son escogidos de tal modo que vayan dando luces para llegar a una conclusión de carácter general. Con estos criterios, y considerando que es muy importante un trabajo individual que brinde elementos para un trabajo grupal, el problema fue presentado de la siguiente manera:

Situación: **Conocidos y desconocidos**
En una reunión hay cierto número de personas; algunas de ellas se conocen entre sí (relación simétrica) y otras no. Se sabe que cada persona conoce solamente a otras tres personas.

Actividades individuales:
I1. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 4 personas.
I2. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 8 personas.
I3. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 6 personas.

Algunos comentarios a las soluciones individuales de los participantes

1. Alrededor de un 70% de los participantes, recurrió a esquemas usando puntos que representaban personas y líneas que unían estos puntos cuando asumían que representaban a personas que se conocían; es decir, esquemas que en verdad eran *grafos.* El resto usó otro tipo de esquemas, que no los ayudó mucho a tener una visión clara de la situación en cada caso. Cabe aclarar que en ningún momento se mencionó la palabra grafo. A continuación muestro la solución de un participante (lo llamo Participante 1), de este segundo grupo:

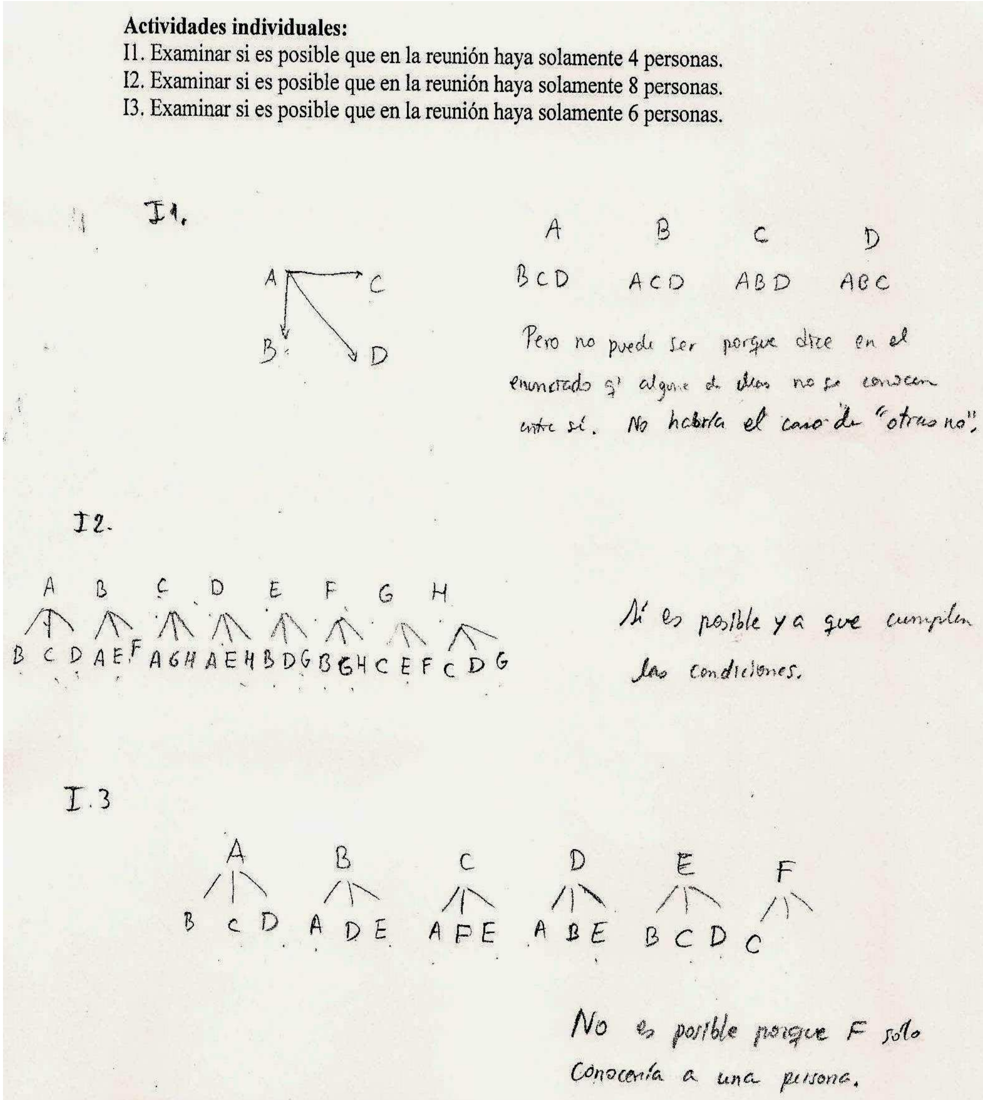


Fig. 1: Solución de la actividad I1, del Participante 1

Y a continuación muestro la solución de un participante, al que llamo "Participante 2", el que resuelve usando esquemas de grafos:

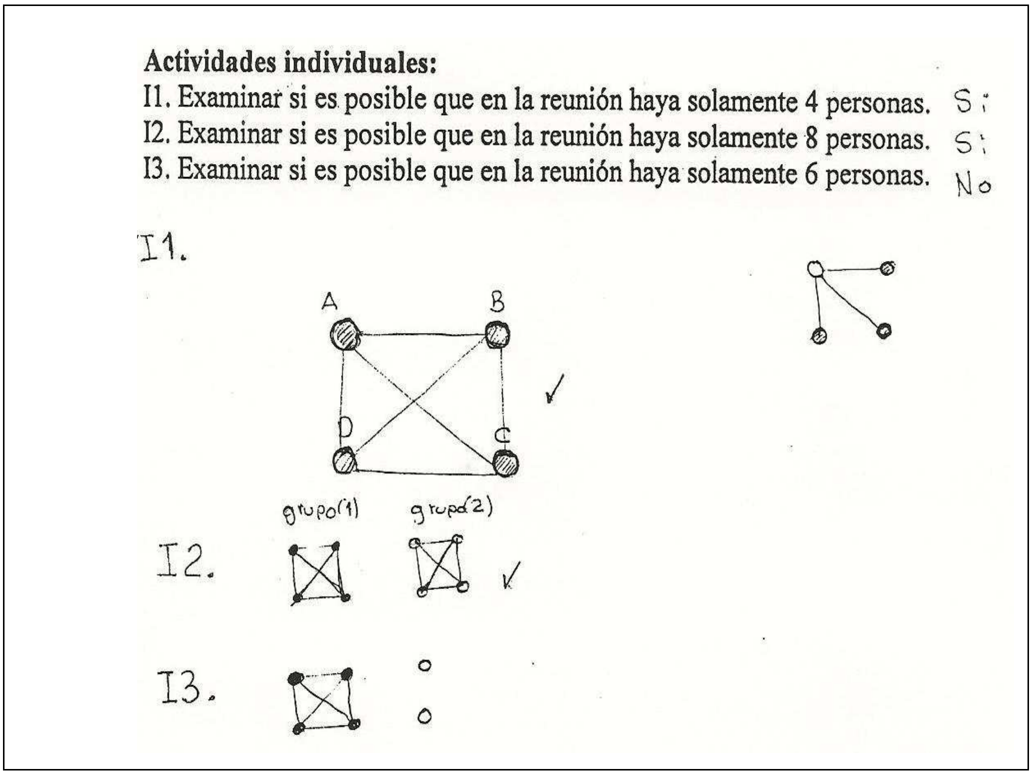


Fig. 2 Solución de la actividad I1, del Participante 2

2. Para la actividad I1, el Participante 1 advierte que no es posible que en la reunión haya solamente 4 personas, pues no podría cumplirse que algunas de ellas no se conocen entre sí. El Participante 2 usa lo que podríamos llamar un grafo completo de 4 vértices, pero no advierte que por ser solo 4 personas, al cumplirse que cada persona conoce a otras tres, ya todos se conocen entre sí y así se incumple una de las características de la situación.
3. Para la actividad I2, el Participante 1 concluye que es posible que en la reunión haya solamente 8 personas – lo cual es cierto – pero esta conclusión no es coherente con lo que muestra en el esquema que usa, pues se puede ver que está considerando que H se conoce con C, D, F y G; y también que G se conoce con C, E, F y H. Esto se ve claramente al traducir el esquema del Participante1 a un esquema de grafo, como el siguiente:

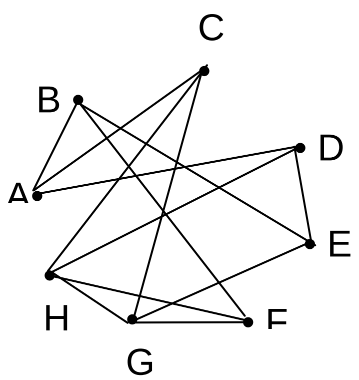


Fig. 3 Traducción a un grafo, de la solución de I2, del Participante 1.

Es fácil ver que en los vértices H y G hay 4 aristas, lo cual dice que estas personas se conocen con más de otras 3 personas en la reunión.

El Participante 2 afirma que es posible que haya 8 personas en la reunión. Muestra 8 puntos en dos grupos de 4 y en cada uno de estos muestra que cada integrante conoce a otros tres.

Como entre los grupos no hay conexión[1], queda claro que se está cumpliendo también la condición de que haya personas que no se conocen entre sí.

Otra manera interesante de ilustrar esta situación es con los 8 vértices y 12 aristas de un cubo.

4. Para la actividad I3, el Participante 1 sigue usando su esquema y concluye, erradamente, que no es posible que en la reunión haya 6 personas. Hay coherencia entre lo que representa y lo que afirma, pero el error está en hacer una afirmación general a partir de un solo caso particular.

   Notar que para responder afirmativamente sí es suficiente mostrar un caso, porque se está examinando una posibilidad. Afirmar la imposibilidad significa que en ningún caso es posible. La imposibilidad matemática no puede concluirse solo por mostrar uno o muchos casos de imposibilidad. Tiene que demostrarse.

   El Participante 2 afirma que no es posible que en la reunión haya 6 personas, pero no hace una demostración. Muestra un grafo de 6 vértices en el cual no se cumple la condición de que cada persona conozca exactamente a otras tres, pero el error de fondo es el mismo que el del Participante 1.

   Lo cierto es que sí es posible que en la reunión haya 6 personas, como se muestra en el siguiente grafo:

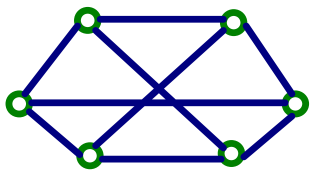


Fig. 4 Es posible que en la reunión haya 6 personas

   Podemos observar que cada vértice está asociado a tres aristas y que hay parejas de vértices que no están relacionados entre sí, con lo cual se evidencia que se cumplen las dos características de la situación.

   Ciertamente, hay otros grafos de 6 vértices que también ilustran esta posibilidad. Una idea interesante es considerar los 6 vértices y las 9 aristas de un prisma triangular recto.

Para orientar las actividades hacia la solución del problema presentado, propusimos actividades grupales de dificultad graduada, en las que pudieran usar las experiencias tenidas en las actividades individuales:

[1] En el lenguaje de la teoría de grafos, diríamos que tenemos un grafo no conexo, de ocho vértices.

Actividades grupales:

G1. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 40 personas.

G2. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 2010 personas.

G3. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 5 personas.

G4. Examinar si es posible que en la reunión haya solamente 2011 personas.

G5. Enunciar y demostrar un teorema a partir de la situación planteada y de los problemas anteriormente resueltos.

Algunos comentarios a las soluciones grupales de los participantes

1. Los grupos en los que estuvieron participantes que resolvieron la actividad I2 haciendo un grafo no conexo de 8 vértices (como lo hizo el Participante 2), encontraron una manera fácil de examinar la actividad G1 considerando un grafo no conexo de 40 vértices, con 10 grupos de 4 y concluir que sí es posible que en la reunión haya 40 personas.
2. Para la actividad G2, tuvieron más facilidad para responder afirmativamente quienes trabajaron la actividad G1 como se ha descrito antes, y también trabajaron la actividad I3 mostrando un grafo de 6 vértices y respondiendo afirmativamente.

   Observando que

   $$2010 = 502 \times 4 + 2 = 501\times 4 + 6,$$

   concluyeron que es posible representar la situación con 501 bloques de 4 y un bloque de 6.

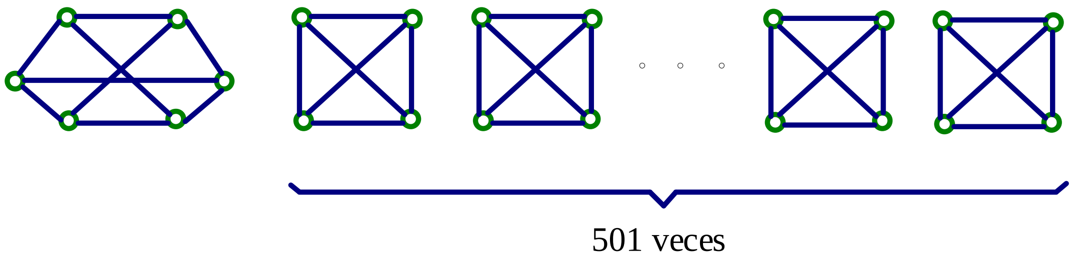


Fig. 5 Es posible que en la reunión haya 2010 personas

   También hubo grupos que propusieron 201 bloques de 10 personas, siendo cada bloque formado por un grafo completo de 4 vértices y un grafo de 6 vértices, como uno de los que se usó para sustentar que sí es posible que en la reunión haya 6 personas (Actividad I3).

3. La actividad G3 nuevamente lleva a reflexionar en “el imposible personal” y “el imposible matemático”; o, dicho de otra manera, la diferencia entre el “yo no puedo” y el “no se puede”. Casi todos los grupos afirmaban que no puede existir 5 personas en la reunión y que se cumplan las dos características de la situación, pero ninguno hizo una demostración de tal imposibilidad. Su afirmación era consecuencia de la imposibilidad de los integrantes del grupo de mostrar un caso en el que se evidencien las dos características. Es interesante el paso a la demostración de la imposibilidad para n = 5, pues

requiere hacer un "análisis general en un caso específico"; es decir, demostrar que es lógicamente imposible que se cumplan las dos características de la situación, cuando se tienen 5 personas en la reunión. Es un atractivo ejercicio para el lector.

4. La actividad G4 también llevó a respuestas de imposibilidad de que pudiera haber 2011 personas en la reunión, basadas en una generalización – que podríamos llamar intuitiva – de la imposibilidad de que haya 5 personas en la reunión.
5. La actividad G5 fue parcialmente cumplida, pues algunos grupos llegaron a formular "teoremas" como
   a. "En la reunión puede haber un número de personas que sea múltiplo de 4"
   b. "En la reunión puede haber un número par de personas"
   c. "En la reunión no puede haber un número impar de personas"

   Es claro que el haber trabajado casos particulares los llevó a conjeturas que las consideraron ciertas y por eso las propusieron como teoremas. Fueron muy pocos grupos los que ensayaron una demostración adecuada.

Generalización

A continuación resumo una ingeniosa demostración de Jorge Tipe, de la imposibilidad de que el número n de personas en la reunión sea impar.

Demostración

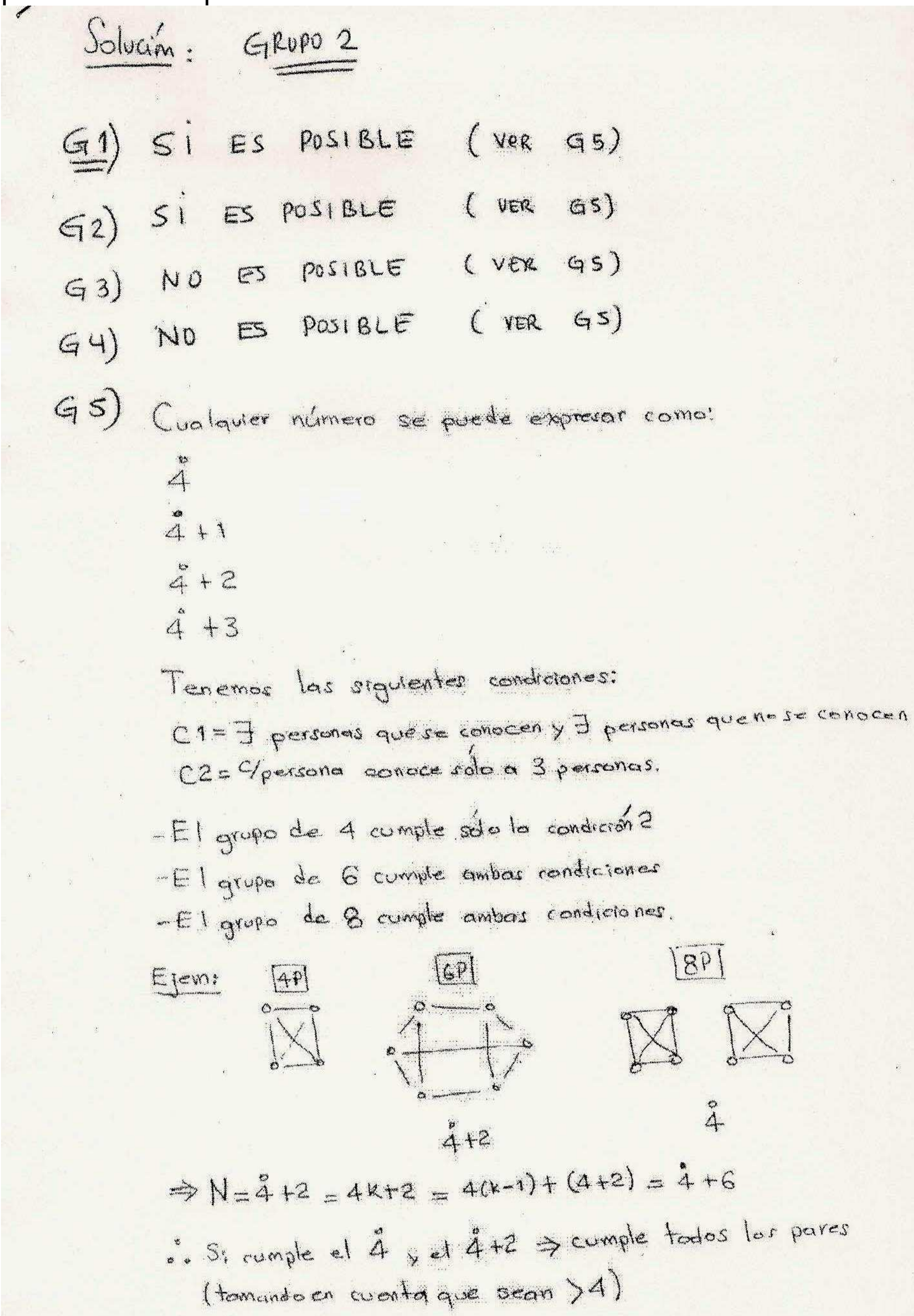
Supongamos que sea posible que en la reunión haya un número impar de personas. Una persona, llamémosla Julia, que no pertenece al conjunto que está en la reunión, escoge dos personas de la reunión; si ellas se conocen, le da un caramelo a cada una; y si no se conocen, no les da caramelo alguno y escoge otra pareja. Hace lo mismo con todas las parejas que se pueden formar con las n personas en la reunión[2]. Cuando Julia termina de encontrarse con todas las parejas – sin repetición – habiendo repartido caramelos en la forma descrita, es claro que **ha repartido un número par de caramelos**, pues en su encuentro con cada pareja reparte 0 ó 2 caramelos. Por otro lado, al final cada persona de la reunión recibió 3 caramelos, pues según la condición establecida, cada una conoce solamente a 3 personas; en consecuencia, la cantidad total de caramelos recibidos es $3n$, y como n es impar, **la cantidad total de caramelos es impar**, lo cual es una contradicción.
En particular, para $n = 5$, tenemos una demostración de la imposibilidad de que en la reunión haya 5 personas, y análogamente para $n = 2011$■

Con esta demostración, y considerando que todo número natural se puede escribir de una de las siguientes formas: como múltiplo de 4; como múltiplo de 4, más 1; como múltiplo de 4, más 2; ó como múltiplo de 4, más 3, (Clases de resto, módulo 4), ya tenemos el análisis para todo valor de n, pues los múltiplos de 4 y múltiplos de 4, más 2 son pares y los otros dos casos son de números impares. Los casos de números pares mayores que 4 se resuelven con casos similares al de $n = 8$ (bloques

[2] En total, hay $\binom{n}{2}$ parejas diferentes en la reunión.

de 4 no conectados entre sí) o con casos similares al de n = 10 (bloques de 4 y uno de 6, no conectados entre sí).

A continuación transcribo parte de la solución del Grupo 2, que hace este análisis para los casos pares.



Solución: GRUPO 2

G1) SI ES POSIBLE (VER G5)

G2) SI ES POSIBLE (VER G5)

G3) NO ES POSIBLE (VER G5)

G4) NO ES POSIBLE (VER G5)

G5) Cualquier número se puede expresar como:

$\dot{4}$

$\dot{4}+1$

$\dot{4}+2$

$\dot{4}+3$

Tenemos las siguientes condiciones:

C1 = ∃ personas que se conocen y ∃ personas que no se conocen

C2 = C/persona conoce sólo a 3 personas.

- El grupo de 4 cumple sólo la condición 2
- El grupo de 6 cumple ambas condiciones
- El grupo de 8 cumple ambas condiciones.

Ejem: 4P 6P 8P

$\dot{4}+2$ $\dot{4}$

$\Rightarrow N = \dot{4}+2 = 4k+2 = 4(k-1)+(4+2) = \dot{4}+6$

$\therefore$ Si cumple el $\dot{4}$ y el $\dot{4}+2$ $\Rightarrow$ cumple todos los pares (tomando en cuenta que sean >4)

Fig. 6 Parte de la solución del Grupo 2

Comentarios finales

1. El problema lleva de manera natural a usar elementos de teoría de grafos y todo lo descrito puede tomarse como referencia para diseñar una situación didáctica, en el marco de la teoría de situaciones didácticas y de la ingeniería didáctica, para introducir los grafos en los niveles educativos básicos.

2. Como se ha podido observar, se presentan ocasiones interesantes de relacionar lo particular con lo general; esto es, de obtener luces en el análisis de casos particulares para conjeturar generalizaciones y demostrar. Es particularmente ilustrativo examinar los casos $n = 8$ y $n = 40$ y advertir que ambos son posibles con grafos en bloques de 4, no conectados entre sí. Resulta natural la generalización a todo n múltiplo de 4, pero el caso $n = 2010$ lleva a pensar en los números pares que no son múltiplos de 4, siendo $n = 6$ y $n = 10$ los más sencillos. Así, un análisis algebraico (todo número par es múltiplo de 4 ó es múltiplo de 4, más 2; y a partir de 10 esto último es preferible expresarlo como múltiplo de 4, más 6) conduce a la generalización para todos los valores pares de n, mayores que 4, usando las estructuras básicas dadas con grafos adecuados para $n = 8$ y para $n = 10$ (Fig. 5 y Fig. 6)

   Por otra parte, para llegar a una conclusión en los casos en que n es impar, es también ilustrativo examinar casos particulares, pero la demostración general no aparece sugerida por los casos particulares, como cuando n es par. Es importante examinar el caso $n = 5$; conjeturar que es imposible; demostrar que es imposible para este caso específico; conjeturar que es imposible para todo n impar; y finalmente, demostrar que es imposible para todo n impar.

   Con el marco teórico que da el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática se pueden usar las experiencias descritas y las reflexiones expuestas para hacer investigaciones tanto a nivel de estudiantes como de profesores. Para este propósito, recomiendo de manera particular leer el siguiente artículo: Font, V. and Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 33-52.