UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 187-195
SSN: 1815-0640

Las fracciones y el Ojo de Horus

Javier Fraile Martín

Resumen

Uno de los grandes retos que tiene la enseñanza de las matemáticas es conseguir que los alumnos adquieran instrumentos y conceptos que les haga capaces de enfrentarse a la resolución de problemas. En este artículo se presenta una actividad pensada para alumnos de 7º a 9º año, 11 a 13 años, y para la formación inicial y permanente de profesorado.

Abstract

One of the greatest challenges the mathematics education has is to achieve that the students acquire tools and concepts which will enable them to deal with the resolution of mathematical problems. The aim of this article is to offer an activity thought for 7th and 9th grade pupils, who are in the age of 11 and 13, in addition to providing initial and permanent formation to the professorship.

Resumo

Um dos grandes reptos que tem o ensino das matemáticas é conseguir que os alunos adquiram instrumentos e conceitos que lhes faça capazes de se enfrentar à resolução de problemas. Neste artigo apresenta-se uma actividade pensada para alunos de 7º a 9º ano, 11 a 13 anos, e para a formação inicial e permanente de profesorado.

Introducción

Si nos remitimos a los resultados de las evaluaciones internacionales y nacionales de las competencias matemáticas (Proyectos PISA y TIMMS, por ejemplo) observamos la paradoja de que muchos alumnos demuestran buenos resultados conceptuales y algorítmicos pero son incapaces de aplicarlos a la resolución de problemas.

El gráfico de la Fig. 1 pertenece a la evaluación del sistema educativo español de 2007 elaborada por el Ministerio de Educación y publicada en 2009. En ella se observa que los ítems "teóricos" y "mecánicos" obtienen resultados por encima del nivel referencial de 250 puntos mientras que la resolución de problemas presenta un resultado de 18 puntos por debajo del nivel referencial.

Es preciso subrayar que la tipología de capacidades que utiliza ésta y otras evaluaciones es confusa porque pone en el mismo apartado los procedimientos y las estrategias y ello exige una primera reflexión.

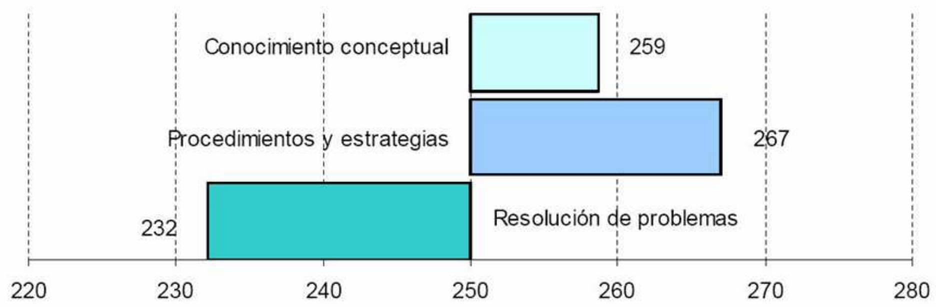


Fig.1 Resultados en Capacidades Matemáticas de los alumnos de 6º de Primaria (11-12 años) en España. (Instituto de Evaluación, 2009).

Existen rutinas matemáticas, técnicas, procedimientos, algoritmos que pueden aprenderse descontextualizados y por lo tanto utilizarse de forma mecánica. Sin embargo, las estrategias, tal como las entendemos en la resolución de problemas, son un conjunto de procedimientos que el sujeto pone en marcha para conseguir un objetivo. La estrategia va más allá de la utilización mecánica de instrumentos: involucra la selección de aquellos con un alto grado de racionalidad para conseguir el fin perseguido y exige una planificación o una "hoja de ruta" que dirija los recursos intelectuales disponibles. Además, está cargada de subjetividad porque depende de la implicación personal en el objetivo, del conocimiento del contexto, de los recursos procedimentales de que se dispone y del conocimiento que se tiene de la relación entre conceptos y procedimientos. La carencia de esta competencia es, precisamente, la que provoca el bajo rendimiento de nuestros alumnos en la resolución de problemas.

En resumen, cuando se habla conjuntamente de "procedimientos y estrategias" al margen de la resolución de problemas, se están refiriendo a las técnicas y rutinas que se activan de forma memorística o mecánica.

De una forma u otra, parece que se mantiene la creencia de que la educación matemática consiste en un proceso de instrucción y aplicación. Se enseñan rutinas, definiciones y fórmulas, los alumnos las memorizan, y de forma más o menos inmediata, con más o menos repeticiones, serán capaces de resolver problemas.

Podríamos pensar que la enseñanza actual no es así, pero bajo eufemismos como "problemas de la vida real" todavía encontramos en los libros de texto enunciados como éste: "*Si* 2 *obreros emplean* 4 *horas en hacer un foso, ¿cuánto tiempo emplearían* 60 *obreros*?". El alumno sabe que para resolver el problema ha de emplear y repetir el algoritmo que se ha explicado unos renglones antes del enunciado. Los números son evidentes, sólo hay que decidir si es un caso de proporcionalidad directa o inversa… pero ¿y el sentido del problema? La sintaxis del enunciado es intachable, pero ¿y la semántica? ¿Alguien sospecha que recurrir a 60 obreros para cavar un foso, que 2 obreros han cavado en 4 horas, supone un acto racional? Si un alumno realmente imaginara la situación debería contestar que los 60 obreros no caben en el lugar de los hechos y además supone un peligro para su integridad física trabajar con picos y palas en tan poco espacio.

Se ha denunciado hasta la saciedad que los problemas de enunciado verbal, aunque traten de emular contextos reales, son estereotipos escolares en los que el alumno sólo ha de practicar el procedimiento que se acaba de enseñar (Nesher, 1980). En muy pocos casos se exige que el alumno matematice la realidad y elabore modelos matemáticos para poder aplicar los conocimientos e instrumentos propios de las matemáticas.

Actualmente, muchos sistema educativos están adoptando el enfoque de orientar la educación a la adquisición de competencias básicas (OCDE, 2006). Como todos los procesos de cambio, está suscitando controversias en el mundo educativo, pero ciertamente supone un cambio sustancial en la forma de entender la enseñanza.

Según este enfoque, y a diferencia de anteriores concepciones educativas, el objetivo no es conseguir la adquisición de contenidos sino utilizar los contenidos para conseguir el desarrollo de las competencias básicas. Lo fundamental es que, ante una situación contextualizada o no, el alumno ha de saber enfrentarse a ella con las herramientas matemáticas que posee. No se trata de evaluar si sabe resolver ecuaciones, se trata de evaluar si sabe usar las ecuaciones para resolver problemas (Sol, Jiménez y Rosich. 2007)

Desde esta perspectiva, las competencias que deben desarrollarse están en una línea muy similar a los planteamientos del NCTM (2000): Pensamiento y razonamiento, argumentación, comunicación, conexiones, construcción de modelos, representación….

Propuesta de una tarea ligada a la historia de las matemáticas

La actividad que se describe a continuación está destinada a trabajar aspectos de competencia relacionados con las matemáticas:

a) Descubrir regularidades en series numéricas y geométricas.
b) Establecer conexiones entre diferentes contenidos matemáticos y entre contenidos de diversas áreas del conocimiento.
c) Analizar resultados y proponer soluciones teóricas.
d) Utilizar instrumentos tecnológicos de apoyo para evitar tareas rutinarias.
e) Elaborar leyes generales para modelos obtenidos por inducción.

El objeto de estudio son las fracciones unitarias utilizas en el antiguo Egipto y que en su forma más básica están contenidas en el Ojo de Horus o Udyat, uno de los amuletos más populares de Egipto porque ofrece protección y representa la consecución de la “totalidad” (Fig.2)

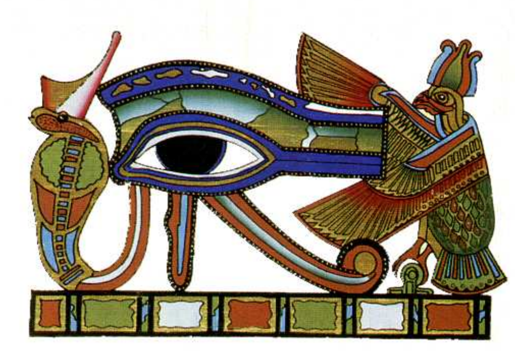


Fig.2: Amuleto del Udyat

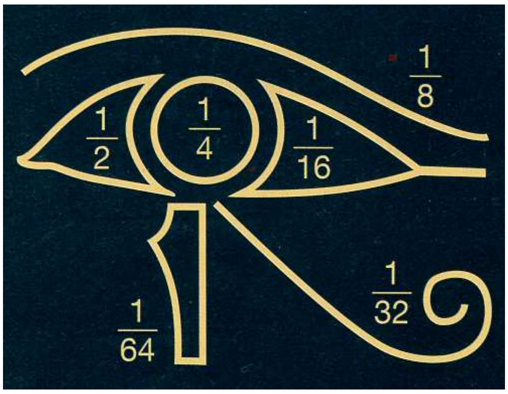


Fig.3: Fracciones unitarias del Ojo de Horus

Las fracciones que utilizaban los egipcios eran siempre unitarias, es decir, el numerador de todas ellas era 1. Las diversas partes que forman el Ojo de Horus (Fig.3) se utilizaban como sistema de numeración fraccionario en particiones agrarias y de capacidad de cereales. La unidad de capacidad para medir el trigo y la cebado era el Herat que equivalía a unos 4.8 litros.

La sucesión de fracciones del Ojo de Horus tiene una ventaja práctica a la hora de hacer particiones ya que cada fracción es la mitad de la anterior.

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{64}$$

***Actividad 1a*:**

Recorta un cuadrado a partir de una hoja de DIN A-4 (Fig. 4)

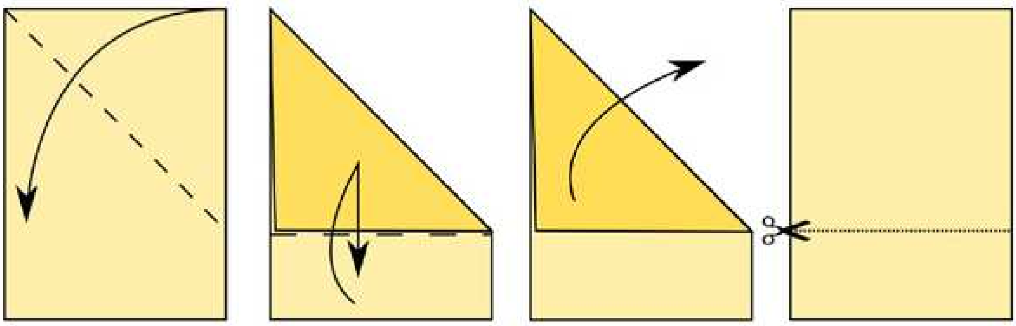


Fig. 4

Pliega el cuadrado por la mitad como indica la figura 5 y repite los pliegues en mitades hasta lograr la fracción 1/64

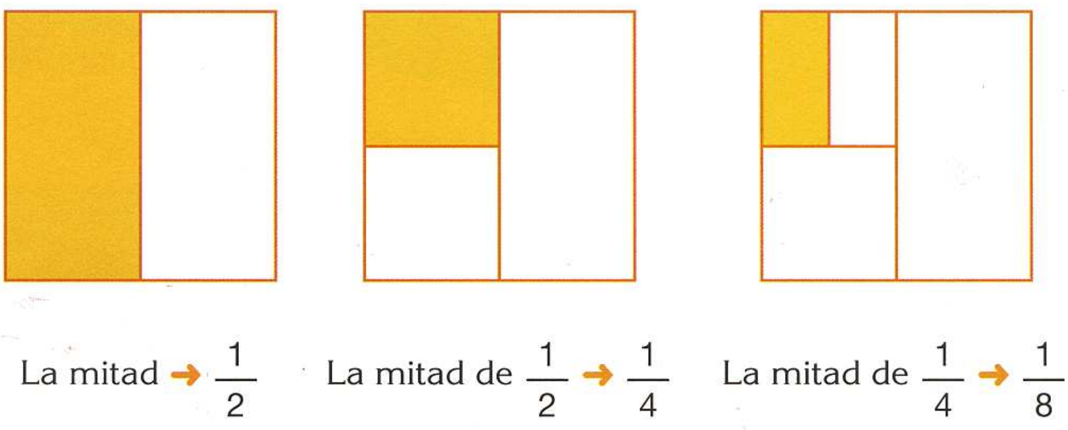


Fig. 5

***Actividad 1b*:**

¿Qué relación encuentras entre las fracciones que has obtenido y la multiplicación de esas fracciones por 1/2.

***Actividad 1c*:**

¿Por qué crees que es práctico hacer mitades de la unidad? ¿Cómo harías para cortar con la mayor precisión posible 1/8 de una barra de pan?

Actividad 1d:

Has conseguido dividir un cuadrado en 64/64, pero esta sucesión de fracciones podría continuar… ¿crees factible conseguir 3 divisiones más en el cuadrado que recortaste? Justifícalo.

Modelos y realidad

Habrás podido comprobar que si bien la serie numérica puede continuar indefinidamente, el número de pliegues que se pueden hacer en un cuadrado de papel es finito. Llega un momento en el que no es posible seguir manipulando el papel… y llega el momento de seguir trabajando con los modelos mentales: la mitad de 1/64 es 1/128, la mitad de 1/128 es 1/256. Y de ello estamos seguros porque el razonamiento matemático nos permite afirmarlos aunque los modelos físicos no permitan realizar estas particiones. Las manos no pueden, pero la cabeza, sí.

Actividad 2a:

¿Cuál sería el término décimo de la sucesión de fracciones en el Ojo de Horus?

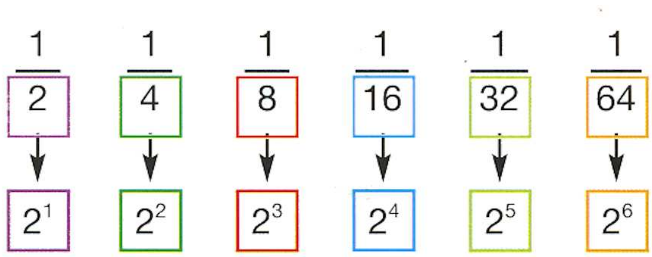
Ya has visto que el numerador siempre es 1. ¿Y el denominador? ¿Cuáles serían los cuatro siguientes denominadores de la serie?

2 – 4 – 8 – 16 – 32 – 64 – ….. – ….. – ….. – …..

Justifica tu respuesta y explica qué tendrías que hace para hallar el vigésimo término de la serie.

Actividad 2b:

Es probable que hayas resuelto la actividad anterior multiplicando por 2 el número precedente de la serie. Es muy correcto, pero para calcular el vigésimo o trigésimo término de la serie no parece un procedimiento muy práctico porque te obliga a calcular todos los términos de la misma… ¡un trabajo penoso para una simple curiosidad! Piensa de otra manera[1]. Observa la interesante regularidad de los denominadores de las fracciones del Ojo de Horus:



Ahora, ¿podrías decir rápidamente cuál sería la fracción vigésima de la serie?

Actividad 2c:

Bien, una cosa es escribir una potencia con un exponente elevado (2^{20}) y otra cosa muy distinta es hacer el cálculo… ¿por qué no usas la calculadora? No hace falta una calculadora con teclas extrañas (x^y), es suficiente con una de cuatro operaciones:

[1] Bruner utiliza la acertada metáfora del "andamiaje" para referirse a estas ayudas que el experto proporciona al aprendiz para que pueda construir otras formas de pensar más elaboradas.

Pulsa las teclas:

$\boxed{2}$ $\boxed{x}$ $\boxed{x}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ ……

Mira el número que aparece en la pantalla cada vez que pulsas la tecla =. Ahora, si has descubierto lo que es capaz de hacer la calculadora, ya puedes hallar fácilmente el término vigésimo y trigésimo de la serie de fracciones… Pero ¡alerta, no te precipites! ¿Cuántas veces has pulsado el signo = para obtener 2^6? ¿Cuántas veces has de pulsar = para obtener 2^{20}? Explícalo de forma que se pueda aplicar también para 2^{30}, 2^{57} y para 2^n, donde n sea un número cualquiera.

***Actividad 2d*:**

Investiga**:**
El 6º denominador de la serie es igual al 3º multiplicado por sí mismo (8 x 8 = 64).
El 10º denominador es igual al 5º multiplicado por sí mismo (32 x 32 = 1024) Comprueba que el 8º es igual al 4º multiplicado por sí mismo ¿Volvemos a tener una regularidad que nos permitiría saber con rapidez cuál es el término 40º de la serie ahora que ya sabes cuál es el 20º?

Sugerencia[2]: Cuando estudies el producto de potencias con la misma base, vuelve a pensar en el Ojo de Horus y encontrarás muchas explicaciones a las regularidades que has descubierto… y de paso, entenderás por qué se estudia una cosa tan extraña como el producto de potencias. ¡Simplificar los cálculos siempre es un objetivo inteligente!

Un poco de mitología egipcia

Sin entrar en detalles escabrosos, el mito de Horus es la historia de una venganza. Osiris, dios mítico de la resurrección, fue el fundador de la nación egipcia. Su hermano Seth le tendió una trampa para asesinarlo y cortó su cuerpo en catorce pedazos que espació por todo Egipto. Isis, la esposa de Osiris, buscó por todo Egipto los trozos de su marido hasta tener trece de ellos y así poder embalsamar su cuerpo, momificarlo y devolverle la vida con su magia.

Horus, hijo de Osiris e Isis fue educado clandestinamente por Thot, el dios de la sabiduría y con el objetivo de vengar la muerte de su padre a manos de su tío Seth. Llegado el momento, Horus se enfrentó a Seth en una encarnizada lucha. En plena batalla, Horus fue herido en el ojo izquierdo que quedó destrozado. Con magia y sabiduría, Thot logró recomponer el ojo de Horus y dotarlo de poderes mágicos: el nuevo ojo de Horus era el Udyat, símbolo de la protección y el orden. Con su visión perfecta, Horus consiguió vencer a Seth y se convirtió en el dios de todo Egipto desterrando a Seth al desierto. El Ojo de Horus se utiliza todavía como amuleto con el nombre de Udyat que significa “el que está completo”

¿Pero realmente está completo?

Las partes del Udyat se utilizaron en la escritura jeroglífica como notación de las fracciones básicas:

---

[2] $2^a x 2^a = 2^{a+a}$, es decir $2^3 x 2^3 = 2^{3+3} = 6^6$. Si los alumnos con los que trabajamos esta actividad ya conocen las operaciones con potencias se puede trabajar con más profundidad esta regularidad.

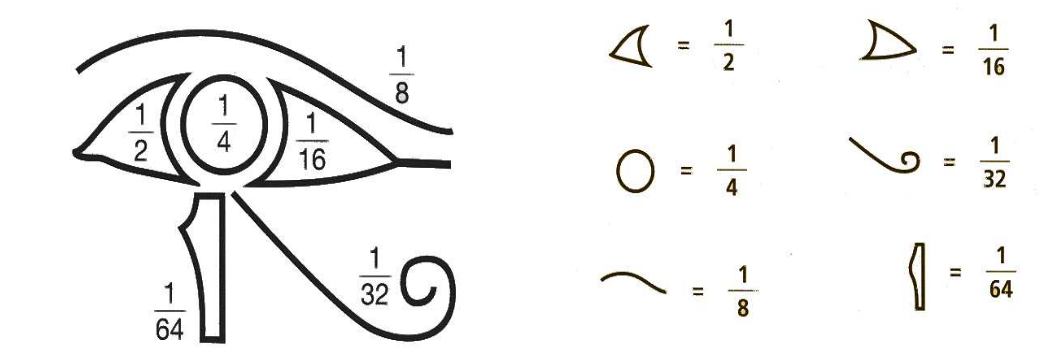


Fig. 6

***Actividad 3a*:**

Si quieres saber si las fracciones del Ojo de Horus equivalen a la unidad, has de sumar las seis fracciones. Aprovecha la circunstancia de que los denominadores son potencias de 2. ¿Cuál es el denominador común?

Efectivamente, el m.c.m de los números 2, 4, 8, 16, 34 y 64, es justamente 64. Por lo tanto las fracciones equivalentes más sencillas son:

$$\frac{1}{2} = \frac{32}{64} \qquad \frac{1}{4} = \frac{16}{64} \qquad \frac{1}{8} = \frac{8}{64}$$

$$\frac{1}{16} = \frac{4}{64} \qquad \frac{1}{32} = \frac{2}{64} \qquad \frac{1}{64} = \frac{1}{64}$$

Y si sumamos las seis fracciones:

$$\frac{32}{64} + \frac{16}{64} + \frac{8}{64} + \frac{4}{64} + \frac{2}{64} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

¡¡No obtenemos la unidad!! Falta 1/64.

No es mucho, pero no podríamos jugar al ajedrez porque es justamente el tamaño de una casilla del tablero. ¿Cómo es posible que el símbolo mitológico de la “totalidad” tenga un error matemático? El sabio Thot es el que añade esa pequeña parte con su magia, igual que la magia y el amor de Isis completó el cuerpo descuartizado de Osiris, padre de Horus, al que también la faltaba una parte.

Pero el error podría ser menor. Si recuperas el cuadrado de la *actividad 1*, está claro que falta 1/64, pero sólo porque interrumpimos el proceso en la sexta división. ¿Por qué no continuar completando la unidad haciendo mitades del trozo que falta? Seguramente Thot conocía la respuesta: porque nunca terminaríamos. Siempre habrá una minúscula partícula que le falta a la unidad. En matemáticas podemos construir una expresión del tipo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1$$

Donde la suma tiende a 1 cuando n tiende a infinito. Y aquí hemos llegado a una "revelación" que sólo podían tener los dioses, el **vértigo del infinito** que se produce al asomarse a la magia del Ojo de Horus.

"**Completo**" en matemáticas tiene un significado muy estricto. En mitología, como en tantos ámbitos de la vida, puede ser "**completo**" algo que tiende a serlo.

Conclusiones

El uso de actividades como la que se ha descrito no es la panacea para resolver todos los obstáculos que se presentan en la educación matemática, pero permiten investirla como un saber cultural ligado a muchos acontecimientos históricos y actuales. No es una receta de uso sencillo, es un intento de provocar en el alumnado inquietudes y retos intelectuales que de forma simplificada expongo a continuación:

- Establece conexiones entre diversos contenidos matemáticos y entre las matemáticas y contenidos culturales.
- Es de aplicación flexible si ofrecemos las ayudas pertinentes en función de los conocimientos previos de los alumnos. Algunos de los apartados pueden aplicarse sin inducirlos a "pensar de otra forma" o ayudarlos en los momentos de bloqueo.
- Los objetivos que se plantean no son los contenidos matemáticos en sí mismos, sino la forma de abordarlos. Los alumnos han de utilizar la inducción, han de elaborar modelos que funcionen en casos generales, han de justificar y argumentar con lenguaje natural los razonamientos y hacerse entender por sus iguales, han de reconocer patrones de diversos tipos y han de utilizar sus conocimientos algorítmicos para comprobar la veracidad de afirmaciones aceptadas culturalmente.

Estas tareas de investigación dirigida son un entrenamiento para que, en un futuro, los alumnos sean capaces de realizar su propio análisis crítico de la realidad que les envuelve y tener una visión de la matemática no cerrada a los problemas escolares. La esperanza es que no nos pregunten ¿y esto, para qué sirve? El simple hecho de razonar ya es un objetivo.

Bibliografía

Wood, D., Bruner, J., Ross, G. (1976). *The role of tutoring in problem solving*. Journal of child psychology and psychiatry, 17, 89-100.

Instituto de Evaluación Español (2009). *Educación Primaria 2007. Evaluación del sistema educativo Español*. [en línea] Recuperado el 26 de febrero de 2010, de http://www.institutodeevaluacion.mec.es/contenidos/nacional/EDUCACION_PRIMARIA_2007.pdf

NCTM. (2000) *Principios y estándares para la educación matemática*. Servicio de Publicaciones de la S.A.E.M. Sevilla. España.

Nesher, P. (1980). *The stereotyped nature of school word problems.* For the learning of mathematics,1, 41-48

OCDE (2006). *PISA 2006. Marco de la evaluación.* [en línea] Recuperado el 24 de febrero de 2010, de http://www.ince.mec.es/marcosteoricospisa2006.pdf

Sol, M.; Jiménez, J. y Rosich, N. (2007). *Competencias y proyectos matemáticos realistas en la ESO*. UNO, 46, 43-59

Javier Fraile Martín, Licenciado en Ciencias de la Educación y Diplomado en Profesorado de Educación General Básica. Profesor de Matemáticas y Ciencias con alumnado de 11 a 14 años. Desde 1994 hasta 2008, Coordinador del Programa de Formación Permanente del Profesorado en el Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Barcelona. Desde 1991 hasta la actualidad es autor de los libros de texto de Matemáticas de la Editorial Vicens Vives para alumnos desde 3 a 12 años **jfraile@telefonica.net**