UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, páginas 131-139
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Conteo y pensamiento matemático

Problema

Encontrar diversas maneras de contar los círculos dibujados según la siguiente configuración:

O
O O O
O O O O O
O O O O O O O
O O O O O
O O O
O

Este problema fue presentado por Pessia Tsamir, Dina Tirosh, Esther Levenson, Michal Tabach y Ruthi Barkai en el 33rd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, que tuvo lugar en Tesalónica, en julio del presente año[1]. Fue muy interesante la experiencia de participar en el Discussion Group *Mathematics and kindergarten teachers. A chalenge to the research community* en el que trabajamos este problema y ahora escribo este artículo divulgando algunas de las soluciones que surgieron y aportando con nuevas ideas.

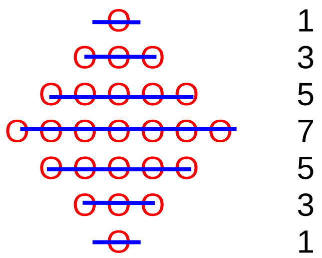
Algunas de las soluciones encontradas

Ciertamente, una forma de contar los círculos – no necesariamente la que primero se le ocurre a las personas – es marcándolos uno por uno y siguiendo un cierto orden. Pero lo interesante es contar los círculos de otra manera, considerando bloques o subconjuntos de círculos con configuraciones similares entre sí, que permitan hacer algunas operaciones aritméticas para obtener el total, teniendo cuidado de descontar en los casos que se cuente dos veces un círculo o un bloque.

Algunas de tales formas fueron:

[1] 2009. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M & Sakonidis, H. (Eds.) *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 289-289. Thessaloniki, Greece: PME

I)



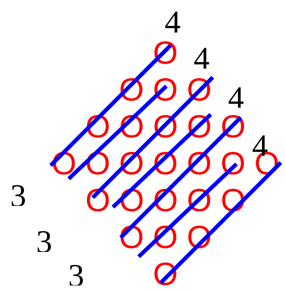
Observando los bloques marcados, tenemos la siguiente expresión aritmética:

1+3+5+7+5+3+1 = 25

Si el conteo se hace observando la simetría y considerando los extremos, se tiene la siguiente expresión aritmética, ciertamente equivalente a la anterior:

2(1) + 2(3) + 2(5) + 7 = 25

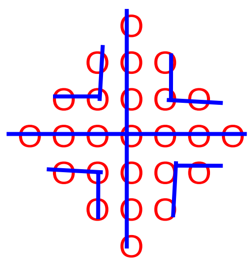
II)



Es claro que se observan 4 bloques de 4 círculos y 3 bloques de 3, y así tenemos:

4x4 + 3x3 = 25

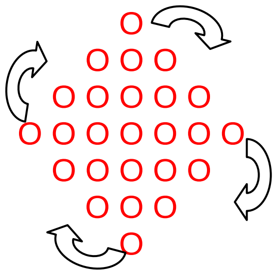
III)



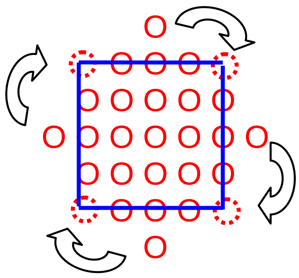
En este caso se suman los círculos de las dos “diagonales” del “rombo”, se descuenta el círculo central que está en las dos “diagonales” y se añaden los 4 bloques de 3 círculos cada uno:

7 + 7 – 1 + 4(3) = 25

IV)



Estos "movimientos" nos conducirían a la siguiente configuración



En la que se ve claramente que la configuración rómbica inicial de los círculos, se ha convertido en una configuración cuadrada de **5x5.**

Los lectores quedan invitados a encontrar otras formas de contar estos círculos. ¡Hay por lo menos ocho formas más!

Comentarios

a. Es un problema sencillo, con desafíos a la creatividad ante dificultades que se perciben superables y que invitan a combinar la observación de patrones con criterios geométricos, particiones de un conjunto y operaciones elementales de multiplicación, adición y sustracción. (Esta última, para descontar en los casos que se esté contando más de una vez un círculo o un bloque.)

b. El problema fue propuesto como parte de las actividades de formación matemática para profesores de educación inicial, sin embargo puede ser usado también – como veremos – con profesores de otros niveles educativos y con alumnos de diversos grados de educación primaria, secundaria y superior.

c. Lo interesante del problema es que sin requerir conocimientos matemáticos avanzados, brinda la oportunidad de ejercitar el pensamiento matemático. Ciertamente no es un problema para los niños de educación inicial, pero sí para los niños que todos tenemos dentro, especialmente los profesores y profesoras de educación inicial. Tener este tipo de experiencias matemáticas contribuirá a su propia formación matemática, que es tan importante para "promover el pensamiento matemático entre sus alumnos" (Tsamir, P. et al, en Tzekaki, M. et al, 2009, 1,p.289).

Otras ideas en torno a este problema

1. *De expresiones aritméticas a configuraciones geométricas.*

Hagamos una variante al modo de encontrar nuevas maneras de contar los círculos. Hemos visto que al encontrar formas de contar los círculos, se encuentran también expresiones aritméticas del número 25. Una idea nueva y experimentada con alumnos de secundaria y profesores de primaria y secundaria, es – luego de tener la experiencia de encontrar algunas formas de contar los círculos – escribir una expresión aritmética correspondiente a una configuración geométrica para contar los círculos y tener como reto descubrir tal configuración geométrica u otra que corresponda a la expresión aritmética escrita.

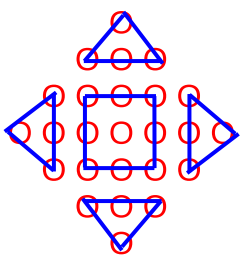
En el taller realizado con profesores de primaria y secundaria, esta situación se presentó en fichas para trabajo grupal. Una de las actividades que se les pidió desarrollar fue la siguiente:

> Carlos, Elsa y María encontraron maneras distintas de contar los círculos, y las expresiones aritméticas correspondientes a tales maneras son las siguientes:
>
> Carlos: ***9 + 4x4***
> Elsa: **7x7 – 4x6**
> María: **3x10 – 2x4 + 3**
>
> Encontrar y explicar las maneras de contar que usaron Carlos, Elsa y María, para llegar a tales expresiones aritméticas.

A continuación resumiré y sistematizaré lo que expresaron los grupos al exponer y mostrar sus gráficos en la pizarra, luego de sus trabajos grupales, en los cuales mis intervenciones fueron principalmente para aclarar dudas y estimular sus iniciativas.

De Carlos: **9 + 4x4**

Se trata de un bloque de 9 círculos y 4 bloques de 4, lo cual sugiere un bloque central y los otros simétricos:

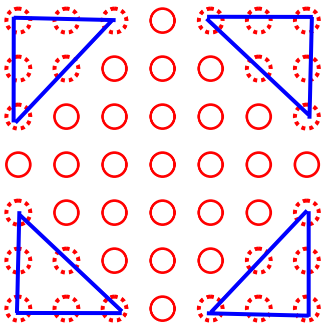


Se tiene así una configuración geométrica con un "cuadrado" central y cuatro "triángulos" ubicados simétricamente.

De Elsa: **7x7 – 4x6**

La expresión sugiere un bloque cuadrado de 7x7 al que se le ha quitado 4 bloques de 6 círculos cada uno. Esto se obtiene añadiendo círculos a la configuración dada hasta conseguir el cuadrado, para luego quitar lo que se ha añadido. (Como se hace muchas veces en álgebra, por ejemplo para factorizar expresiones algebraicas.)

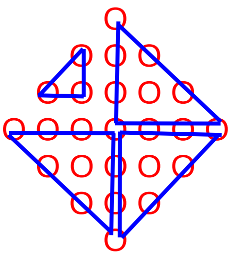
En el gráfico mostramos con trazos discontinuos los círculos que se han añadido para obtener el cuadrado de 7x7:



Podemos ver que se han añadido 4 bloques de 6 y el número de círculos de la configuración inicial es la diferencia entre el número de círculos del "cuadrado grande" (7x7) y el número de círculos de los cuatro bloques de 6 círculos añadidos (4x6).

De Maria: **3x10 – 2x4 + 3**
(Ésta fue la que causó más dificultad a todos los grupos.)

La expresión sugiere 3 bloques de 10, con 2 repeticiones de 4 y 1 bloque de 3. Con esta idea, mostramos la siguiente configuración geométrica con 3 bloques triangulares de 10 círculos cada uno y 1 bloque triangular de 3 círculos.



Las repeticiones en el conteo – que deben descontarse – se hacen evidentes al observar que hay dos casos en los que los "catetos" de dos "triángulos" diferentes pasan por los mismos 4 círculos.

Otra manera de trabajar esta idea es jugando entre grupos: un grupo encuentra una configuración geométrica para hacer el conteo, escribe en un papel la expresión aritmética correspondiente y lo entrega a otro grupo para que descubra la configuración geométrica que le dio origen.

2. *Algunas generalizaciones.*

El problema ofrece interesantes posibilidades de examinar lo general a partir de lo particular. En esa línea, en el taller propuse, por razones de tiempo, solo las siguientes actividades, para trabajos grupales:

a) Teniendo la configuración dada, ¿cuántos círculos más se deben dibujar para obtener una configuración similar, pero que tenga 6 círculos en cada lado del "rombo"?

b) ¿Cuántos círculos tiene una configuración similar a la dada, con *n* círculos en cada lado del "rombo"?

Ambas actividades fueron desarrolladas sin mayores dificultades. La actividad (a) cumplió el papel previsto de facilitar la actividad (b), sobre todo para los profesores de primaria. Fue muy interesante la interacción entre los miembros del grupo, especialmente en aquellos en los que había profesores de primaria y secundaria.

Se llegó a describir la configuración dada como "4, 3, 4, 3, 4, 3, 4" y la configuración de la actividad (a) como "6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6". Así, obtuvieron que el número de círculos en esta configuración es 6x6 + 5x5 = 61. Observé satisfacción entre los profesores al verificar empíricamente (contando) que el número de círculos que se deben añadir es 36, que es el mismo que se obtiene "sin contar", al restar 61 menos 25.

Para la actividad (b) se intuyó fácilmente la configuración general como "*n, n-1, n, n-1, ….n-1, n*", considerando *n* veces *n* y (*n*-1) veces (*n*-1), con lo cual, se llegó a la respuesta *n*x*n* + (*n*-1)x(*n*-1) que naturalmente fue expresada como $n^2 + (n-1)^2$.

3. *Sucesiones y pensamiento recursivo*

A partir de la experiencia desarrollada y pensando más en "sacarle el jugo" al problema, pensé en otras actividades e interrogantes que se pueden proponer, en el marco de las *sucesiones de figuras y de números*. A continuación propongo algunas:

i) Construir los cinco primeros términos de una sucesión de configuraciones rómbicas de círculos, como las que hemos trabajado, de modo que el cuarto término sea la configuración rómbica dada en el problema inicialmente planteado.

ii) Explicar la estrategia que se usa para construir un término de la sucesión de configuraciones rómbicas de círculos, a partir del término anterior de tal sucesión. Por ejemplo, cómo obtener el 5º término de la sucesión, añadiendo círculos al 4º término de tal sucesión.

iii) Explicitar la sucesión de números que resulta de asociar a cada elemento de la sucesión de configuraciones rómbicas de círculos, el número de círculos que tiene cada configuración.

iv) ¿Cuál es el término general de la sucesión de números anterior?

v) ¿Cuántos círculos deben añadirse al término n-ésimo de la sucesión de configuraciones rómbicas de círculos, para obtener el término (n+1)-ésimo? Relacionar esta respuesta con la actividad (ii).

vi) ¿Existe algún término de la sucesión de configuraciones rómbicas de círculos que tenga un número par de círculos? ¿Por qué?

vii) Con una traslación adecuada de algunos círculos, la configuración rómbica de círculos del cuarto término de la sucesión se convierte en una configuración cuadrada de 5x5 círculos (Es la forma **IV** de contar los círculos en el problema inicialmente planteado). ¿Es posible obtener una correspondiente configuración cuadrada para algún otro término de la sucesión de configuraciones rómbicas?

Observemos que en la actividad (vii), a partir de un problema lúdico de conteo, estamos llegando a un problema relacionado con ternas pitagóricas. Así, la forma **IV** de hacer el conteo nos lleva a 5^2, y recordando la forma **II** de hacer el conteo, tenemos $4^2 + 3^2$ y verificamos que $4^2 + 3^2 = 5^2$, que corresponde a la aplicación del famoso teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo cuyos catetos tienen longitudes 3 y 4 y cuya hipotenusa tiene longitud 5.

En todas las configuraciones de círculos de la sucesión, tendremos $n^2 + (n-1)^2$ círculos, siendo n el número de círculos que hay en cada lado del "rombo", y entonces la pregunta de la actividad (vii) es equivalente a preguntarse sobre la existencia de ternas pitagóricas con enteros consecutivos correspondientes a los catetos del triángulo rectángulo. El caso $n = 4$ es particularmente interesante, pues siendo 5 el número correspondiente a la hipotenusa, se tienen tres números consecutivos; es decir, un caso en el que se cumple

$$n^2 + (n-1)^2 = (n+1)^2.$$

La pregunta natural es ¿existe otro caso como éste? Buscando una solución a la ecuación, obtenemos fácilmente que $n = 0$ ó $n = 4$. Como 0 no tiene sentido en este contexto, el único valor posible para n es 4, lo cual responde la pregunta planteada. Sin embargo queda pendiente el caso general; es decir, en términos algebraicos, para qué valores de n existe un número entero k tal que

$$n^2 + (n-1)^2 = k^2.$$

Esto lleva a pensar en formas generales de obtener ternas pitagóricas. (p, q, r), con p, q longitudes de catetos y r longitud de hipotenusa. Una de ellas es la siguiente:

Para números enteros positivos arbitrarios, *a* y *b*:

$$p = a^2 - b^2$$
$$q = 2\,ab$$
$$r = a^2 + b^2$$

(Es fácil verificar que se cumple que $p^2 + q^2 = r^2$.)

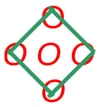
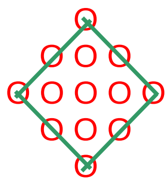
Se puede verificar que con $a = 2$ y $b = 1$ se obtiene la terna pitagórica (3, 4, 5) y que con $a = 5$ y $b = 2$ se obtiene la terna pitagórica (21, 20, 29), lo cual nos dice que en el término 21º de la sucesión de configuraciones rómbicas de círculos, es posible reacomodar los círculos de modo que se tenga una configuración cuadrada de 29x29.

Es claro que el algoritmo presentado no es el mejor para buscar ternas pitagóricas de enteros consecutivos correspondientes a los catetos. Un análisis más general puede hacerse usando ecuaciones de Pell. Para estimular la curiosidad del lector, le dejo la información que 169^2 puede expresarse como la suma de los cuadrados de dos enteros consecutivos.

Otra fuente interesante de problemas y de construcciones matemáticas, es “definir”[(2)] recursivamente la sucesión rómbica de círculos; así, denotando C_n a la configuración rómbica de orden *n*, “definimos”:

C_1 = O (un solo círculo)
C_n = C_{n-1} con un “marco” adicional rómbico de *n* círculos por lado.

Con esta “definición” se puede ir construyendo la sucesión rómbica:

C_1 = O , C_2 =  , C_3 = 

Se ha destacado con líneas verdes los marcos rómbicos que se añaden al término anterior de la sucesión. Se ve que C_2 es C_1 con el marco rómbico de 2 círculos por lado y que C_3 es C_2 con el marco rómbico de 3 círculos por lado.

Si se denota :

$\#(C_n)$ = número de círculos de la configuración rómbica de orden *n*,

se puede definir recursivamente esta sucesión numérica:

$$\#(C_1) = 1$$
$$\#(C_n) = \#(C_{n-1}) + 4n - 4 \quad {}^{(3)}$$

(2) Las comillas son porque no damos una definición matemáticamente rigurosa. Un caso conocido de definición recursiva es la definición de *factorial de un número natural n*: $0! = 1$; $n! = n\,(n-1)!$

(3) El número de círculos de la configuración rómbica *n*-ésima se obtiene añadiendo al número de círculos de la configuración rómbica (*n*-1)-ésima, el número de círculos del “marco” que tiene la configuración rómbica *n*-ésima. Este “marco” rómbico tiene *n* círculos en cada lado, pero realmente son $4n - 4$ círculos, ya que no se deben contar dos veces a los 4 círculos de las esquinas.

Observemos que se pueden ir obteniendo sumas de cuadrados de enteros consecutivos:

$$\#(C_2) = \#(C_1) + 4(2) - 4 = 1 + 4 = 1^2 + 2^2$$

$$\#(C_3) = \#(C_2) + 4(3) - 4 = 1^2 + 2^2 + 8 = 2^2 + 3^2$$

$$\#(C_4) = \#(C_3) + 4(4) - 4 = 2^2 + 3^2 + 12 = 3^2 + 4^2$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\#(C_n) = (n-1)^2 + n^2.$$

La expresión final es consistente con la obtenida al desarrollar la actividad (b) en el taller con profesores.

Los lectores quedan invitados a hacer talleres, experiencias didácticas e investigaciones a partir de este problema, con las ideas dadas en este artículo y con otras ideas que pueda suscitarles, usando marcos teóricos de la didáctica de las matemáticas. Considero que con la teoría de situaciones didácticas, el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) o la teoría antropológica de lo didáctico, se puede a arribar a conclusiones interesantes.