UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 62. Agosto 2021
Páginas 1-19

https://union.fespm.es

Propuesta didáctica de una tarea matemática de modelación sobre funciones

Matías Sáez, Mario Sánchez, Horacio Solar

Fecha de recepción: 31/01/2020
Fecha de aceptación: 8/04/2021

Resumen	Presentamos una propuesta didáctica de una tarea de modelación de funciones. Nuestra metodología consistió en escoger una tarea de modelación, ejecutarla, y analizar los resultados obtenidos así como la propia implementación buscando falencias y oportunidades de mejora. De esta forma también logramos obtener evidencia que pueda ayudar a los docentes a determinar los procesos de modelación que pueden alcanzar los estudiantes según los diferentes momentos de la clase al ejecutar la tarea. Además, se promueve el uso de las cinco prácticas para generar discusiones como una estrategia de gestión en el tránsito por las diferentes etapas del ciclo de modelación. Gracias a esto logramos producir una planificación mejorada que potencie la habilidad de modelar de los estudiantes. **Palabras clave**: Propuesta didáctica, modelación, discusiones matemáticas, tarea matemática.
Abstract	We present a teaching proposal of a function modeling task. Our methodology consisted of choosing a modeling task, executing it, and analyzing the results obtained as well as the implementation itself, looking for shortcomings and opportunities for improvement. This way, we also obtain evidence that can help teachers determine the modeling processes that students can achieve according to the different moments of the class. In addition, is promoted the use of the five practices to generate discussions as a management strategy for the transit through the different stages of the modeling cycle. Thanks to this we were able to produce an improved planning that enhances the modeling ability of the students. **Keywords**: Teaching proposal, modeling, mathematical discussions, mathematical task.
Resumo	Apresentamos uma proposta didática para uma tarefa de modelagem de funções. Nossa metodologia consistiu em escolher uma tarefa de modelagem, executá-la e analisar os resultados obtidos, bem como a própria implementação, em busca de deficiências e oportunidades de melhoria. Desta forma, também obtemos evidências que podem ajudar os professores a determinar os processos de modelagem que os alunos podem realizar de acordo com os diferentes momentos da aula. Além disso, promove-se o uso das cinco práticas para gerar discussões como estratégia de gestão no trânsito pelas diferentes etapas do ciclo de modelagem. Graças a isso, fomos capazes de produzir um planejamento aprimorado que aprimora a capacidade de modelagem dos alunos. **Palavras-chave**: Proposta didática, modelagem, discussões matemáticas, tarefa matemática.

1. Introducción

Modelar es una competencia matemática que ha llamado la atención tanto de documentos curriculares como de investigadores (Frejd, 2013), así como matemáticos al menos desde el siglo XIX (Schukajlow, Kaiser & Stillman, 2018) y que es considerada cada vez en un mayor número de documentos curriculares alrededor del mundo (Blum, Galbraith & Niss, ctd. en Frejd, 2007). Si bien ha habido avances en la investigación sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje en modelación (Kaiser, Blum, Borromeo Ferri & Stillman, 2011), el profesorado aún requiere de herramientas para promover la modelación, en particular, de tareas y estrategias de gestión que potencien su desarrollo en el aula de matemática.

La importancia de la modelación en el aula de matemática radica en que mejora la capacidad de abstracción de los estudiantes, pues logra que el alumno construya una versión simplificada y abstracta de la realidad (Mineduc, 2015, p. 95); esto se logra a través de un ciclo (Borromeo-Ferri, 2006; Maaß, 2018) que permite trabajar con otras competencias o habilidades matemáticas (OECD, 2016; Mineduc, 2015).

Implementar tareas de modelación en el aula es importante porque implica el desarrollo de interacciones dialógicas entre profesores y estudiantes que facilitan un aprendizaje significativo de los fenómenos matemáticos asociados a un problema (Colorado, Álvarez & Ospina, 2011). Esto se vincula con que las tareas de modelación son necesariamente tareas de creación, según la taxonomía de Bloom y revisada por Anderson (2009), por lo que su utilización en el aula fomenta el desarrollo de habilidades cognitivas superiores.

Uno de los problemas más frecuentes para incluir tareas de modelación en el aula de matemáticas viene dado por el sistema escolar, que impide que la habilidad se desarrolle de forma integral en la práctica cotidiana de los profesores (Schukajlow, Kaiser & Stillman, 2018) y por ello, sigue siendo una cuestión pendiente en su formación inicial (Blomhøj y Carreira, 2009). Por esta razón, se vuelve necesario poner a disposición de los profesores tareas de modelación previamente implementadas y analizadas que les faciliten el integrar la modelación en la gestión de sus clases y el comprender cómo se desarrolla el proceso de modelación en sus estudiantes. El objetivo de este artículo es presentar una propuesta didáctica de una tarea de modelación.

La propuesta didáctica consiste en una tarea matemática sobre la modelación de un fenómeno asociado a funciones. En su diseño se consideraron los procesos de modelación (Borromeo-Ferri, 2006; Maaß, 2006) y las cinco prácticas para orquestar discusiones productivas (Smith y Stein 2011) como una estrategia para gestionar la competencia de modelación en el aula. La propuesta didáctica se implementará y analizará con el propósito de ajustarla para que pueda propiciar mejores oportunidades de enseñanza-aprendizaje de modelación en los estudiantes.

2. Marco Teórico

2.1. Procesos de modelación matemática

Las relaciones de los procesos de modelación que serán utilizados en esta propuesta son los planteados por Maaß (2006) y se utilizarán para analizar el nivel de modelación alcanzado por los estudiantes.

El ciclo de modelación empieza con un problema del mundo real. Luego, a través del proceso de simplificación, se obtiene un modelo real, del que algunas veces se pueden conseguir respuestas para el problema. Posteriormente, se procede con la *matematización* que tiene como resultado un *modelo matemático* que, al ser utilizado, produce una *solución matemática*. Para finalizar, se procede a interpretar los resultados obtenidos para *validarlos* según como se ajustan a la realidad; dependiendo del éxito, se procede a repetir el ciclo. Existen al menos dos situaciones en las que, luego de la validación, este proceso puede volver a empezar. La primera viene dada al determinar que el resultado obtenido es erróneo. La segunda viene dada por la generalización del modelo, situación que es deseable pues permite profundizar en los procesos de modelación.

Los procesos de modelación se ilustran en el esquema de la figura 1:

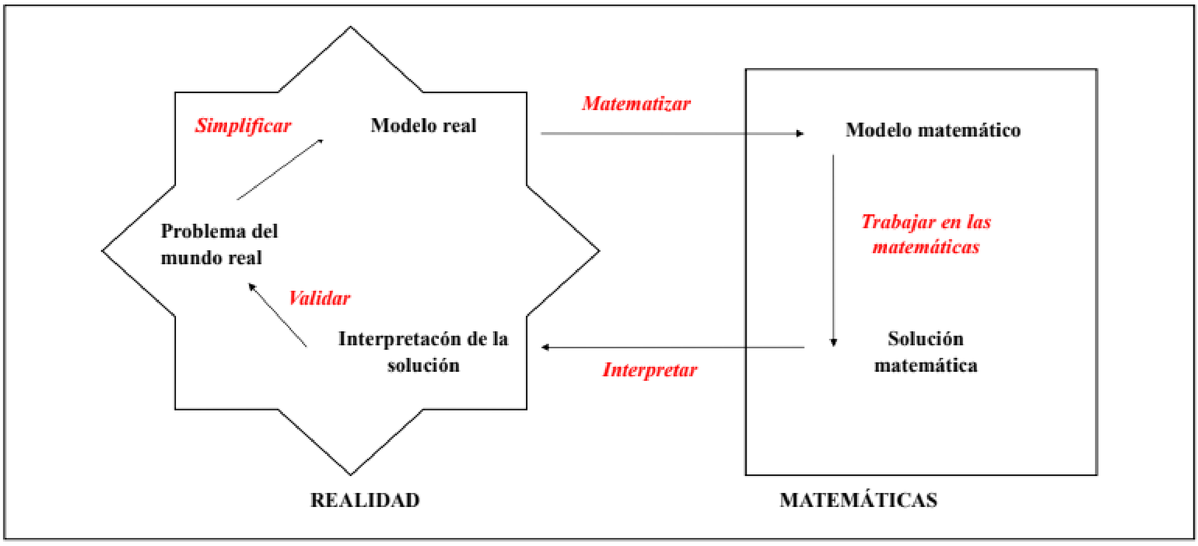

Figura 1. Procesos de modelación matemática (traducción propia, Maaß, 2006, p.15)

2.2.1 Gestión de la modelación

Frejd (2013) propone tres mecanismos de evaluación o acercamientos que pueden ser beneficiosos para mejorar la modelación: (1) *observar* el trabajo de los estudiantes para poder (2) *dar impresiones* a los estudiantes sobre su trabajo; y (3) *dar entrevistas* para que los estudiantes puedan hacer preguntas sobre su desempeño. Consideramos que, para una tarea matemática que se implementa en una sola clase, las dos primeras opciones son las más viables. Más tarde, Frejd y Bergsten (2018) reconocen cuatro procesos que se dan durante una tarea de modelación: (1) descripción de la realidad, un sistema o un problema; (2) entender el problema real; (3) abstracción para (o por) herramientas de representación como computadores; (4) negociación de significados del problema real entre el profesor y el estudiante.

Utilizaremos estos mecanismos y procesos en la planificación; y las vincularemos con las prácticas para generar discusiones productivas de Smith y Stein (2011), ya que consideramos que son una estrategia de gestión del docente para promover la modelación. En la tabla 1, se muestran cada una de las cinco prácticas con las acciones propias que realiza el profesor para llevarla a cabo. En esta propuesta serán conectadas con los procesos de modelación según el ciclo descrito por Maaß (2006; 2018).

Práctica
[1] Anticipar las respuestas de los estudiantes antes de la lección.
[2] Supervisar o monitorear el trabajo de los alumnos y alumnas e involucrarlos en las tareas.
[3] Seleccionar a algunos estudiantes y sus producciones para que muestren su trabajo matemático.
[4] Dar una secuencia con un orden específico a las respuestas de los estudiantes para analizarlas.
[5] Relacionar o conectar las respuestas de los estudiantes y vincularlas con ideas matemáticas clave de la lección.

Tabla 1. Acciones del uso de las 5 Prácticas (adaptado de Smith y Stein, (2011))

Al vincular las cinco prácticas con los mecanismos y procesos recopilados por Frejd, se puede apreciar que estos últimos se encuentran contenidos en ellas. También, resulta interesante observar cómo las cinco prácticas, vinculadas al proceso de modelación de Maaß, facilitan la transición de un proceso a otro. Por ejemplo, al momento de validar, una *selección* de determinados modelos expuestos por medio de *secuencia específica* facilita la validación de cada uno. Además, también se observa gran potencial argumentativo durante la fase de interpretación (Henríquez et al. 2020), momento en el que el monitoreo ayuda a involucrarlos en la discusión.

3. Metodología

El estudio se realizó en un establecimiento particular mixto de Santiago de Chile, en un curso de 38 estudiantes (13 a 14 años). La clase fue gestionada por un profesor que participó en la evaluación de la propuesta didáctica original. Se grabaron las acciones del docente a cargo y de dos grupos de alumnos. La clase duró 1 hora y 30 minutos.

Como mencionamos anteriormente, el objetivo de esta propuesta es ajustar una tarea de modelación y proponer acciones específicas para su desarrollo. Para conseguirlo, se implementó la tarea planificada para su posterior análisis (planificación original anexada). Luego, se procedió a codificar los momentos de la clase en función del proceso de modelación que se llevó a cabo y las cinco prácticas de Smith y Stein (2011). Terminado el análisis, se ajustó tanto la tarea como la planificación, con acciones docentes específicas para que los estudiantes alcancen una modelación más profunda. De esta manera buscamos validar la tarea como pertinente para desarrollar la competencia de modelación. La propuesta didáctica que se obtuvo como resultado del análisis, se encuentra en el apartado 6.2.

El estudio se divide tres etapas:

Diseño e implementación: seleccionamos una tarea matemática de modelación y anticipamos posibles respuestas, errores, dificultades y modelos de los estudiantes. En la implementación se separó al curso en grupos pequeños (de 3 a 5 alumnos) según afinidad; se grabó al profesor y a dos grupos escogidos previamente según su potencial. Se recogió evidencia escrita de todos los grupos.

Evaluación de la implementación: la gestión del profesor y todo lo ocurrido en la implementación fue analizado en función del ciclo de modelación (Maaß 2018) y de las cinco prácticas; con especial atención en los procesos promovidos por el profesor y los niveles de modelación alcanzados por los estudiantes. Toda la evidencia videográfica fue codificada para su posterior análisis.

Innovación: con los resultados obtenidos en el análisis, se procedió a adaptar la tarea matemática, añadiendo nuevos datos, preguntas y subtareas. Además, se añadieron nuevas acciones docentes a la planificación. Todo esto con el objetivo de generar nuevas oportunidades de enseñanza-aprendizaje que faciliten un mayor desarrollo de la competencia de modelar.

4. Análisis de datos

En este apartado se analizan distintos aspectos relacionados con la tarea y su implementación. Para la tarea matemática se realiza un análisis a priori de su potencialidad como tarea de modelación y los posibles modelos que podrían utilizar los estudiantes en su resolución. Para la implementación se toma en consideración tanto la gestión del profesor como el trabajo de los estudiantes.

4.1 Tarea Matemática

A continuación, en la figura 2 se presenta la tarea matemática seleccionada, diseñada por Aravena y Caamaño (2007). Seleccionamos esta tarea por dos razones. Primero, consideramos que promueve intrínsecamente la modelación. Segundo, se trata de una situación real, en la línea de lo planteado por Maaß, quien postula que los ambientes de aprendizaje de los estudiantes deben ser auténticos (2018) en el contexto de una tarea de modelación matemática.

Cuidemos el Medio Ambiente

En 1896 el científico sueco Svante Arrhenius fue el primero en predecir el efecto invernadero como resultado de las emisiones de dióxido de carbono en el aire por parte de los países industrializados. La quema de combustibles fósiles continúa produciendo 5,4 mil millones de toneladas de carbono al año, las cuales son absorbidas por la atmósfera y por los océanos.

En 1990 el Grupo Internacional sobre el Cambio de Clima (GICC) pronosticó que, de continuar la tendencia actual, aumentará la temperatura promedio global de la Tierra. La tabla 1 muestra los datos del aumento de la temperatura global pronosticada en grados Celsius.

Tabla 1

Aumento de la temperatura global pronosticada en grados Celsius

Año	Temperatura
1980	0.0
2000	0.42
2020	0.84
2040	1.26
2060	1.68
2080	2.10

A partir de la información, realiza las siguientes tareas:

(a) Represente los datos en un gráfico. ¿Qué tipo de gráfica te resulta?
(b) A partir de la gráfica determina una expresión algebraica de manera que concuerde con los datos.
(c) Predice la temperatura estimada para los años 2030 y 2085.
(d) Tomando tu expresión algebraica (o modelo) explica el significado de los coeficientes y llega a una expresión general.

Figura 2. Tarea Matemática. Extraído de Aravena y Caamaño (2007)

A continuación, se procederá a analizar la tarea matemática. Primero, desarrollaremos brevemente la gestión de esta tarea utilizando las cinco prácticas (Smith & Stein, 2011). Segundo, analizaremos cómo la tarea invita a los estudiantes a transitar por distintos procesos de modelación (Maaß, 2006). Tercero, anticiparemos los posibles modelos que podrían construir los estudiantes analizando los razonamientos que hay detrás de ellos.

4.1.1 Análisis de la gestión de la tarea matemática

Sobre cómo utilizar las cinco prácticas en esta tarea se detalla en las acciones del docente que se encontrarán en la planificación ajustada más adelante. Sin embargo, a modo de resumen, antes de la clase se anticipan posibles respuestas y obstáculos de los estudiantes. Durante su implementación se separa a los estudiantes en grupos pequeños para facilitar el monitoreo del trabajo y para generar una mayor discusión de la tarea, en este punto el profesor es el encargado de profundizar en el pensamiento de los estudiantes, de responder y plantear preguntas deliberadas y de discutir los significados matemáticos con los grupos, esto con el fin de avanzar en el ciclo de modelación. Luego, se seleccionan modelos producidos por los estudiantes y se organizan en una secuencia específica, en este caso según la complejidad de las representaciones, para que sean expuestos al curso y generar una discusión que permita validar los modelos.

4.1.2. Análisis de los procesos de modelación

El diseño original de esta tarea matemática por Aravena y Caamaño es apropiado para una tarea de modelación en el sentido de que establece una secuencia que permite a los estudiantes avanzar a través de los procesos de modelación siguiendo el esquema de Maaß.

El enunciado presenta varios aspectos que ayudan en este tópico ya que, una vez presentada la tarea matemática, la primera indicación que se les entrega a los estudiantes es que realicen un gráfico en el apartado (a); así, se les invita a utilizar un método de representación diferente a la tabla presentada por el enunciado, favoreciendo la comprensión del problema en el proceso de simplificación. El gráfico permite observar que los datos tienen una relación lineal que se puede expresar a través de una función lineal o afín, o de una proporción directa. Esto ayudaría a matematizar el problema y a construir una expresión algebraica según el razonamiento anterior, lo que se indica en el apartado (b). El apartado (c) promueve el trabajo de las matemáticas al utilizar el modelo para predecir valores que no se encuentran en el enunciado. Esto incide en la validación de los modelos matemáticos, ya que al interpretar las soluciones que nos entrega el modelo construido en el problema real podemos determinar su pertinencia y coherencia; este punto es más importante de lo que parece, pues los alumnos no tienen a validar sus modelos (Stillman & Galbraith, 1998 ctd. en Czocher 2018). Finalmente, el apartado (d) promueve avanzar a una proyección del modelo matemático, de manera que sirva para otros contextos con características similares.

4.1 3. Posibles modelos y procedimientos

Consideramos que existen cinco modelos o procedimientos que pueden desarrollar los estudiantes al resolver esta tarea. Tres de ellos corresponden, según el esquema de los procesos de modelación de Maaß, a modelos del mundo real: (1) razonamiento proporcional; (2) tablas y promedios; y (3) un gráfico que permita aproximar el aumento de la temperatura en algún año específico. Las dos opciones restantes corresponden a modelos matemáticos: (4) $f(x) = 0{,}021x - 41{,}58$ dónde x representa el año en que se desea observar el aumento de temperatura, y (5) $f(x) = 0{,}021x$ donde x representa los años transcurridos desde 1980. Lo interesante de estos dos últimos modelos es que uno corresponde a una función lineal y el otro a una función afín, ambas correctas y que dependen del significado de la variable independiente. Consideramos que gestionar la construcción de ambos modelos permite generar una discusión productiva que enriquece el desarrollo de la competencia de modelación y la profundización de significados matemáticos.

4.2 Análisis de la implementación

4.2.1. Gestión del profesor

Para realizar el análisis de la gestión del profesor se toman en consideración dos tipos de fuentes directas: (1) el vídeo de la clase donde se implementó la tarea de modelación; y (2) la planificación de la misma. A continuación, se analizará, por un lado, la gestión de la modelación y, por otro lado, el uso de las cinco prácticas.

4.2.1.1 Con respecto a la gestión de la Modelación

Al iniciar el desarrollo de la tarea, los estudiantes se encuentran en la simplificación del problema del ciclo de Modelación (Maaß, 20018) donde se espera que identifiquen los datos y los relacionen a través de significados matemáticos. Con el monitoreo de los primeros grupos se destaca la necesidad de gestionar la discusión para promover la comprensión del problema, a través de preguntas fundamentalmente de identificación, como se observa en el siguiente diálogo:

Profesor: pero para graficar, ¿qué hiciste primero para graficar?

Alumna 1: poner los datos

Profesor: los datos, ¿y cuáles son los datos?, ¿dónde están en el problema?

Alumna 1: acá (señala el cuadro de la guía)

Alumna 2: la temperatura

Profesor: esa sería la variable, ¿verdad?

Alumna 3: el año lo voy a poner abajo, la temperatura al lado

Profesor: ¿y por qué lo pones abajo y no al revés?

Alumna 3: porque ahí van, el año está primero, entonces va ir sostenido en el año

En este episodio, el profesor quiere destacar la identificación de las variables del problema: temperatura y año, que se encuentran en la tabla que indica Alumna 1. Pero también, al realizar la última pregunta promueve la comprensión de la relación de las variables, ya que la dependencia de una variable sobre la otra permitirá avanzar a un razonamiento matemático proporcional que contribuirá en la matematización del problema. Aquí la gestión del profesor se hace necesaria sobre todo para promover el uso de sistemas de representaciones y conocimientos matemáticos que ayuden a los estudiantes a aclarar y/o expandir sus conocimientos. Sin embargo, observamos que no fue necesario realizar este tipo de preguntas después de la primera media hora en la que los estudiantes han desarrollado de la tarea. Creemos que esto se debe a que la simplificación del problema real está vinculado a la discusión grupal que surge de forma espontánea para resolver la tarea en los grupos, por lo que el desarrollo de este proceso de modelación se promueve en los estudiantes otorgándoles un tiempo prudente sin necesidad de una intervención del profesor.

Durante el proceso de Matematización para construir un modelo matemático, en varias oportunidades fue necesario que el profesor promueva en los estudiantes que expliciten los modelos reales en términos matemáticos, sobre todo a través de una expresión algebraica como lo indica la tarea matemática en el apartado (b) (figura 1). Se observó que los estudiantes tienen dificultad para expresar el razonamiento en términos algebraicos o llanamente tienen dificultades con el concepto de “expresión algebraica”. Como se observa en el siguiente diálogo:

Alumno 1: encontré aquí la temperatura con respecto a los años y la expresión algebraica la estoy sacando en base a los años, lo que se da en un año...

Profesor: ¿cómo llegaste a esos resultados?, ¿qué te diste cuenta? (indica la guía de trabajo del estudiante).

Alumno 1: porque, me di cuenta que por cada 20 años aumenta 0.42, entonces este (indica los años en la tabla), ya que, pide 10 años dividí 0.42 entre 2 y me dio 0.21 y lo sume y me dio esto (indica la guía de trabajo 1,05)

Profesor: ya, y ¿podrías eso expresarlo como una forma más general?, porque si yo te dijera cuánta temperatura aumentó en el año 4100 (que no sale en la tabla de la guía), ¿lo vas poder hacer así como ir sumando, e ir sumando…?, deberías llegar como a una expresión quizás más general.

Alumno 1: mmm…

Profesor: esa es la idea, llegar a una expresión más general.

Alumno 1: ¿cómo así?, no entiendo.

En este episodio, Alumno 1 ha utilizado el razonamiento proporcional esperado para dar solución al apartado (c) de la tarea, sin embargo, ese razonamiento aún no lo ha expresado a través de una expresión algebraica. El profesor identificando este obstáculo lo invita a predecir el aumento de temperatura para años más lejanos a los que se presentan en la tabla del enunciado, con el fin de comprender que utilizar este procedimiento se tornará engorroso por que le será necesario construir una expresión general utilizando términos algebraicos que le permitan avanzar de un modelo real a un modelo matemático. Un aspecto interesante de considerar en este estudio es que en otros momentos de la clase fue necesario describir el concepto de “expresión algebraica”, como expresión general, expresión utilizando letras como variables o fórmula matemática par que los estudiantes comprendan que debían construir el modelo matemático en términos algebraicos.

4.2.1.2 Con respecto al uso de las Cinco Prácticas

La práctica más utilizada durante toda la implementación fue la de *monitorear* el trabajo de los estudiantes para involucrarlos en la tarea matemática. Esta se dio de manera interactiva, es decir el profesor tuvo contacto directo con los estudiantes y ayudó de manera considerable a profundizar en los razonamientos y estrategias de los estudiantes (acción 2.a de la Tabla 1) como apreciamos en los diálogos anteriormente descritos. Además, ayudó al profesor a tener claridad del proceso de modelación que los estudiantes estaban alcanzando, identificar errores y estrategias que no había anticipado con anterioridad y seleccionar los diferentes modelos matemáticos que se comunicarán en la puesta en común (acción 2.b de la Tabla 1). Sin embargo, al iniciar el proceso de simplificación del problema, las preguntas que dirige el profesor son cerradas por lo que muchas veces induce la respuesta de los estudiantes en contraposición de la acción 2.a de la Tabla 1, como se aprecia en el siguiente diálogo expresado en el monitoreo de un grupo:

Profesor: aumenta la tasa de carbono, la temperatura… ¿se acuerdan como se llamaba eso de que si aumenta una variable aumentaba la otra?

Alumna 4: directa…

Profesor: ¿qué tipo?

Alumna 4: una proporcionalidad directa

Profesor: una proporcionalidad directa, ¿cierto?, ya genial… y en eso, proporcionalidad directa, ¿se acuerdan de que había algo que se mantenía siempre?

Alumna 5: eh…

Profesor: tenía un nombre…

Alumna 5: constante…

Profesor: la constante de proporcionalidad, bien Alumna 5, hay una constante. Entonces, tienen que descubrir cuál es la constante de proporcionalidad con esos datos. Y la idea, es que le piden como proyectar o estimar la temperatura del año 2030 y del año 2035. Entonces, ahora con esto, quizás puedan llegar a una forma más general.

Las preguntas *“¿se acuerdan como se llamaba eso de que si aumenta una variable aumentaba la otra?”* y *“¿se acuerdan de que había algo que se mantenía siempre?”* podrían responderse perfectamente con un sí o no sin un mayor razonamiento, ya que si bien se aprecia una intención de que los estudiantes identifiquen los conceptos matemáticos asociados a la relación de las variables, la pregunta no promueve la utilidad que tienen estos términos para la construcción del modelo matemático. Esta ambigüedad o poca dirección en las preguntas puede entorpecer los procesos de modelación.

Incluido en el monitoreo está la acción de tomar notas de las producciones que van desarrollando los estudiantes (acción 2.a de la Tabla 1), acción que estuvo ausente tanto en la planificación como en la implementación de la tarea, por lo que, al momento de entregar una retroalimentación sobre el trabajo de los estudiantes, estos no logran apreciar con claridad cómo reorientar o clarificar las estrategias de resolución. Esto se evidencia en el diálogo con Alumno 1 que no logra comprender a qué se refiere el profesor con obtener una expresión más general, y este no logra describir ese concepto de una manera más comprensible.

A medida que se monitorean los grupos, se logró evidenciar la práctica de *anticipar*, en la cual el profesor previamente determina los posibles resultados, estrategias, errores u obstáculos (acciones 1.b, 1.c y 1.d de la Tabla 1) que puedan surgir en el desarrollo de la tarea por los estudiantes, como sucede en los diálogos anteriores. También, esta práctica se devela desde la presentación de la tarea matemática al iniciar la clase, como muestra el siguiente diálogo:

Profesor: la clase de hoy día trata sobre un problema de modelación, se va a basar todo en un solo problema de modelación. Hemos estado trabajando eso sí, se acuerdan un poco ¿qué significaba modelar?

Alumna 6: ¿modelar?

Profesor: modelar en matemática

Alumno 2: crear una forma como de entender algo

Profesor: crear como una forma de entender una situación cotidiana matemáticamente, obvio, estamos en clases de matemática...

Aquí el profesor comunica a los estudiantes que realizarán una tarea relacionada con la competencia de modelación y con ello, comunica los aprendizajes asociados de la clase (acción 1.a de la Tabla 1).

Las demás prácticas (anticipar, secuencia y conectar) si bien se consideraron en la planificación de clases, no se alcanzaron a evidenciar de manera significativa en la implementación de la tarea matemática, por el poco tiempo en que fue realizada.

4.2.2. Trabajo de los estudiantes

Para realizar el análisis del trabajo de los estudiantes en relación con los procesos de modelación de Maaß se toman en consideración dos tipos de evidencia: (1) los videos de las dos clases, que registraron el trabajo de dos de los siete grupos, (2) las producciones de los estudiantes.

La evidencia muestra que todos los grupos pasaron por el proceso de simplificación. Ya se analizó cómo la gestión del profesor aportó a esta situación; no obstante, se observa en la evidencia que los estudiantes ven facilitada la simplificación de datos al realizar el gráfico sugerido por el enunciado. También se observa que todos los grupos respondieron las preguntas de la tarea. Se debe destacar que, al menos en los dos grupos que fueron grabados, el apartado (b), correspondiente a la modelación, fue contestado después del (c). Esta situación desencadenó en que los grupos no utilizaron su modelo para desarrollar la tarea matemática.

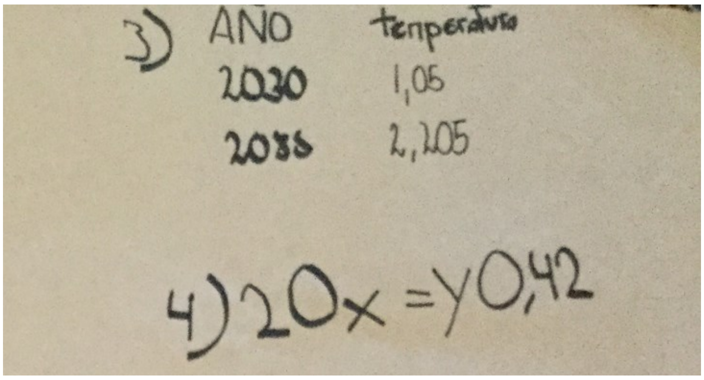

Figura 3. Producción grupo 6. Relación lateral.

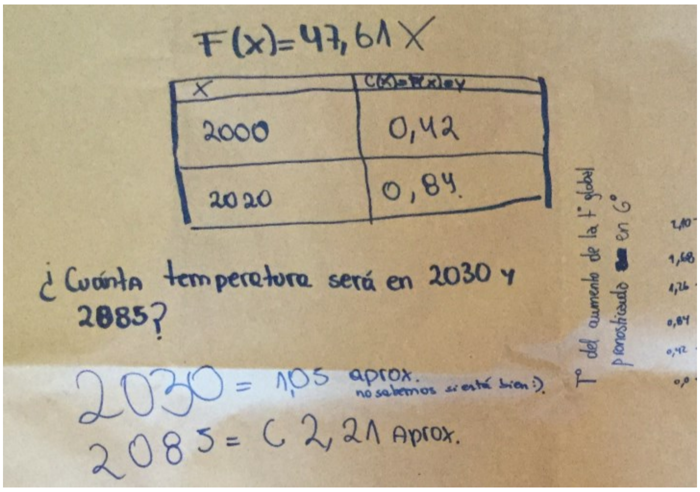

Figura 4. Producción grupo 3. Función lineal.

En general, la mayoría de los grupos escribió relaciones algebraicas similares a la mostrada en la Figura 3: *20x=0.42y*. Esta relación, según el análisis de la interacción de los grupos, indicaría que los años aumentan de 20 en 20 por cada fila de la tabla entregada, mientras que la temperatura lo hace de 0.42 en 0.42. Los modelos erróneos podrían llevar a resultados erróneos. Sin embargo, eso no se observa. La mayoría de los grupos logró responder el apartado (c) sin mayor dificultad (lo que se ve en las figuras 3 y 4), y eso se debe a que usaron un razonamiento proporcional. El análisis sugiere que los alumnos no tuvieron tiempo para poner a prueba su modelo pues, una vez contestada la pregunta (c) y construido el modelo, utilizaron el tiempo que quedaba para diseñar su cartel.

Se observa también que ninguno de los grupos de trabajo fue capaz de llegar a los modelos de función lineal o afín que la tarea esperaba que fuesen desarrollados. Es más, muchas de las expresiones algebraicas obtenidas parecen ser traducciones incorrectas del lenguaje natural al algebraico; sólo un grupo escribió una función lineal que, por un error en el uso de la fórmula, tenía mal calculada la pendiente (se invirtieron el divisor y el dividendo).

Un hecho particular a rescatar es que se observó a uno de los grupos de trabajo sumar 20 grados a todas las temperaturas. La evidencia muestra que esto se debe a que la pregunta (c) solicitaba predecir “la temperatura” y no el “aumento de temperatura”. En este proceso el grupo necesariamente pasó por una etapa de validación de sus respuestas llegando a la conclusión de que eran incorrectas e iniciando el ciclo nuevamente; se observa que en la etapa de simplificación decidieron que 20 grados era una buena estimación para una temperatura *agradable* que no conocían y la sumaron a los aumentos que poseían.

5. Resultados

Clasificaremos los resultados del análisis anterior en dos aspectos que permiten una mejor comprensión de las acciones que deben realizar tanto profesores como estudiantes para un mejor desarrollo de los procesos de modelación: según la gestión del profesor respecto a la promoción de los procesos de modelación y según el trabajo de los estudiantes respecto al transcurso de un proceso a otro.

5.1 De la gestión del profesor

Considerando que la práctica de gestión más utilizada en la construcción del modelo matemático es el monitoreo, ya que es parte de cada uno de los episodios mencionados anteriormente; y que el proceso de modelación que alcanza a promover el profesor es a lo más la validación, podemos concluir que el monitoreo es la práctica más importante para promover el tránsito por los distintos procesos del ciclo de modelación propuesto por Maaß (2018), que se dan antes de la validación. Por ello, es necesario que el profesor realice un monitoreo efectivo que permita reorientar o clarificar las estrategias de construcción de los modelos matemáticos, así como profundizar en los conceptos matemáticos asociados a ellos; también será necesario monitorear un amplio espectro de grupos dada la relevancia de esta práctica para el desarrollo de la competencia.

El monitoreo asociado con la práctica de anticipar respuesta permite que el profesor cuente con estrategias que lo ayuden a ser más efectivo al momento de gestionar errores o procedimientos incorrectos en los modelos construidos en el monitoreo, y de esta manera ser más eficiente en el tiempo que le conlleva monitorear un grupo. En relación con el tiempo de monitoreo, el profesor puede hacer uso de la suscitación de las ideas de los estudiantes (Boerst, Sleep, Ball & Bass, 2011) no solo para profundizar en el razonamiento de los estudiantes, sino para involucrarlos en la tarea matemática, ya que con una mayor comprensión de la tarea logra que el grupo trabaje de manera más dirigida e independiente, de tal forma que se logre monitorear a más grupos en la clase. Otra acción importante asociada al monitoreo es que el profesor tome nota de las producciones de los estudiantes, para que luego de su análisis pueda entregar una retroalimentación más efectiva a los grupos (Gibbs & Simpson, 2009) y seleccionar con un enfoque claro los modelos que va a secuenciar para ser discutidos.

La práctica de anticipar respuestas invita al docente a que luego de implementar la tarea, este la pueda completar, mejorar o ajustar con los errores, procedimientos y modelos que no fueron anticipados previamente y que fueron expresados en la clase. Esto otorgará al profesor una visión clara para el diseño de preguntas que le permitan a los estudiantes hacer las conexiones del problema con los conocimientos matemáticos asociados. Por lo que esta práctica esta ligada a la matematización del problema real y a la construcción del modelo matemático.

Para alcanzar el proceso de validación con la tarea matemática, el profesor puede utilizar las prácticas de seleccionar, dar una secuencia y hacer conexiones entre respuestas e ideas matemáticas para gestionarlo, por medio de una exposición y discusión de los modelos. Si bien, esto no se realizó en nuestro estudio, consideramos que, para alcanzar una modelación más profunda de la tarea con la validación de los modelos, estas prácticas son pertinentes para ello.

5.2 Del trabajo de los estudiantes

El análisis del trabajo de los estudiantes muestra que la tarea matemática se ve parcialmente impedida cuándo esta se realiza en un intervalo de tiempo limitado a dos horas pedagógicas. Esto dificulta a los estudiantes atravesar la etapa de validación que les permitiría pulir y mejorar su modelo. Por esta razón se vuelve necesario aumentar la cantidad de horas pedagógicas destinadas a la implementación de la tarea. Con este tiempo extra se pueden realizar dos tipos de mejora para facilitar que los estudiantes validen sus modelos: (1) la primera forma de mejorar sería en la etapa anterior a las exposiciones, aquí los estudiantes pueden probar su modelo preliminar con nuevos datos; (2) la segunda podría ser posterior a las exposiciones, en la que los alumnos ponen a prueba dos o tres modelos, tanto propios como de otros grupos, previamente seleccionados por el profesor; así el grupo tiene oportunidad de dar sus opiniones y pulir los modelos de sus compañeros.

Otra situación que se observó es que los alumnos encontraban una expresión algebraica que, según su interpretación, modelaba la situación, aun cuando esta era incorrecta. El análisis sugiere que los estudiantes tendían a responder las preguntas utilizando un razonamiento proporcional y luego buscaban una expresión algebraica que se ajustase a los resultados. Para evitar que esto ocurra se puede solicitar a los alumnos que calculen más valores que sean difíciles de obtener utilizando un razonamiento proporcional, de manera que hagan uso de la expresión algebraica para ello y con esto logren determinar la validez de su modelo.

6. Propuesta didáctica de la tarea matemática ajustada de modelación

A continuación, se presenta la tarea matemática ajustada de acuerdo el análisis de la implementación de la tarea original. Optamos por dividir el desarrollo de la tarea en dos clases, así que se presentan las respectivas planificaciones.

6.1 Ajuste de la Tarea matemática

Optamos por mantener el enunciado original de Aravena y Camaño (2007), haciendo algunas modificaciones los tiempos sugeridos y las preguntas.

Primero, la tarea ahora está diseñada para ser aplicada en dos clases. Segundo, se han añadido preguntas para así facilitar el que los estudiantes inicien un proceso de validación del modelo que propongan.

a	Realice un listado de los posibles contenidos matemáticos relacionados con el problema para solucionarlo.
b	Organice y represente los datos en un gráfico. ¿Qué tipo de gráfico te resulta?
c	A partir de las características del gráfico determinen una expresión algebraica (o fórmula) que concuerde con los datos.
d	Con el modelo matemático anterior (fórmula) predice el aumento de temperatura estimada para los años 2030 y 2085.
e	Utilizando el mismo modelo predice el aumento de temperatura estimada para los años 2100, 2321, 2980, 3200 y 3333 (pueden organizar los datos en una tabla)
f	Expliquen el significado de los coeficientes utilizados en el modelo matemático (o fórmula) y obtengan una expresión general que pueda predecir el aumento de temperatura de otros planetas.

Tabla 2. Nuevas preguntas para el enunciado de la tarea

6.2 Ajuste de la planificación original.

A continuación, se muestran las planificaciones de las dos clases modificadas según los resultados obtenidos. Tal como antes y en ambas se espera que el curso sea dividido en grupos, el tamaño de estos queda a libre disposición del profesor.

6.2.1 Clase 1

La planificación de la primera clase; empieza por el acercamiento a la tarea matemática y termina con la exposición de los modelos de los estudiantes.

Proceso de modelación	Qué hacen los estudiantes	Qué hace el docente
Simplificar	Se establecen en grupos; leen el problema y organizan los datos; reconocen y nombran las variables involucradas; realizan un listado de contenidos matemáticos asociados a la tarea; y discuten las estrategias a utilizar para desarrollar los items de la tarea	Lee el problema en voz alta y da las instrucciones de la clase. Comunica que no solo se espera que resuelvan los problemas, sino que realicen un modelo matemático. El profesor **monitorea** el trabajo con el fin de identificar los datos de la tarea, para ello, plantea dudas, elicita el pensamiento de los alumnos y cuida de no dar respuestas.
Matematizar	Los estudiantes grafican la información de la tabla; relacionan las variables con una función lineal o afín, o un crecimiento de tipo proporcional directo; describen el modelo inicial, matematizan y crean un modelo. Podrían llegar a expresiones como $f(x) = 20x$ o $f(x) = 0.42x$. Seguramente se deba a que no se están	El profesor **monitorea** el trabajo: responde dudas, invita a utilizar los conceptos de pendiente, constante de proporcionalidad y coeficiente de posición; mediante preguntas tales como: *¿cómo se relacionan el año y la temperatura entre ellas?, ¿se relacionan de manera proporcional, qué tipo de proporción?, ¿cómo*

	relacionando las variables entre sí, sino que cada una con la fila en la que se encuentra.	*pueden graficarse los datos, la línea pasa por el origen (del plano cartesiano)?*
Trabajar en matemáticas	Utilizan su modelo para responder a las preguntas indicadas, o bien no lo utilizan.	**Monitorea**: invita a los estudiantes a utilizar su modelo en la resolución de las primeras preguntas.
Interpretar	Los resultados matemáticos tienen una interpretación directa. Diseñan un cartel para exponer su modelo al resto del curso.	**Monitorea** el trabajo de los estudiantes, tomando nota de los modelos construidos; y **selecciona** los grupos que expondrán sus modelos, según la variabilidad y complejidad de los modelos.
Validar	Podría darse en cada grupo de forma espontánea antes del proceso de diseño de los carteles al utilizar los modelos para encontrar la solución matemática. Sin embargo, el foco está en la segunda clase.	Invita a mejorar y/o ajustar los modelos de los grupos avanzados, ya sea a pasar de un modelo de función afín a lineal, o bien ayudando a detectar modelos erróneos.

Tabla 3. Planificación clase 1

6.2.2 Clase 2

Proceso de modelación	Qué hacen los estudiantes	Qué hace el docente
Validación (exposiciones)	Algunos grupos **seleccionados** por el profesor comunican su modelo en una exposición. Muestran su modelo, explican los procedimientos y estrategias utilizadas. Analizan los modelos de sus compañeros, discuten su validez y los verifican.	Coloca frente al curso todos los carteles. El profesor **secuencia** la exposición de los modelos según complejidad, siendo el razonamiento proporcional el más bajo y las funciones el más alto.
Validación	Ponen a prueba dos o más modelos seleccionados por el profesor utilizando nuevos datos; calculando años más distantes. Argumentan si estos funcionan o no. Reflexionan sobre sus capacidades y limitaciones (por ejemplo, es poco práctico calcular la temperatura del año 1000 utilizando un gráfico). Generalizan los modelos identificando el significado de las variables.	**Selecciona** los modelos de funciones si estos aparecen. Si hay dos modelos de funciones equivalentes, pero con parámetros distintos, entonces guía una discusión en torno a por qué dan los mismos resultados. **Conecta** los argumentos de los estudiantes con matemáticas más profundas o con un lenguaje matemático más elaborado, por ejemplo, “*cuando dices que no consideras estos datos, quieres decir que el dominio y recorrido de la función es limitado o no son todos los reales*”, “*cuando mencionan que este número no tiene sentido en el problema, quieres decir que el coeficiente de*

		posición de esta función afín no tiene una interpretación en el resultado del problema", etc.

Tabla 4. Planificación clase 2

7. Conclusiones

Diseñar tareas de modelación no es sencillo. Incluso tareas que fueron diseñadas para favorecer el desarrollo de los procesos de modelación pueden verse impedidas, por varios factores. Algunos de estos factores que dificultan el modelar pueden ser relativos a la gestión del profesor, a características del sistema educativo o simplemente a dificultades particulares de los estudiantes.

Una de las principales dificultades corresponde a la escasez de tarea de modelación junto con la dificultad para diseñarlas. Si un docente requiere de enseñar a modelar necesita una variedad de tareas listas para ser implementadas, o bien de mucho tiempo libre para crearlas.

Otra de las principales dificultades que pueden surgir a la hora de modelar viene dada por el tiempo destinado a la tarea. Consideramos que, al requerir habilidades cognitivas superiores, la modelación necesita de tiempo, no sólo para que los estudiantes puedan diseñar un modelo, sino que para ponerlo a prueba y lograr su validación.

El desarrollo de una tarea de modelación es un proceso dinámico en el aula de matemáticas, no solo porque promueven el desarrollo de otras competencias matemáticas como la argumentación, sino porque es posible que los estudiantes resuelvan esta tarea con modelos matemáticos que no se han anticipado, sean estos correctos o no. Por ello, que este tipo de tareas invita a los profesores a ajustar la planificación de las clases donde se desarrollan y utilizar nuevas estrategias de gestión que promuevan los procesos de modelación.

Consideramos que esta tarea está limitada por la especificidad del contenido asociado y los posibles modelos resultantes, lo que no nos permite asegurar que se logre gestionar de forma parecida con un contenido, por ejemplo, de geometría. En este punto, creemos que las representaciones matemáticas inciden en la forma de abordar la gestión de la tarea.

A modo de proyección, consideramos que puede ser interesante diseñar una propuesta de evaluación para esta tarea, pues necesariamente surgen preguntas a la hora de considerar aquel aspecto. ¿Cómo evaluar la complejidad del modelo? ¿y su funcionalidad? ¿sería apropiado calificar inferiormente a un estudiante que consiga un modelo poco profundo pero funcional?

AGRADECIMIENTOS: Investigación financiada por proyecto ANID Fondecyt 1180880

Bibliografía

Anderson, L. & Krathwohl, D. (2009). *A taxonomy for learning, teaching and assessing.* New York: Longman.

Blomhøj, M. & Carreira, S. (2009). Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics. Em G. Kaiser, *Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical Education* (pp. 6-13). Dordrecht: Springer.

Boerst, T. A., Sleep, L., Ball, D. L. & Bass, H. (2011). Preparing Teachers to Lead Mathematics Discussions. *Teachers College Record, 113*(12), 2844–2877.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM, 38*(2), 86-95.

Czocher, J. A. (2018). How does validating activity contribute to the modeling process?. *Educational Studies in Mathematics*, 99(2), 137-159.

Colorado, H., Álvarez, D. & Ospina, L. (2011). *Aprendizaje significativo en el área de matemáticas: una experiencia pedagógica*. En García, G. (Ed.), Memorias del 12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, (pp.611-621). Armenia: Gaia.

Frejd, P. (2013). Modes of modelling assessment - a literature review. *Educational Studies in Mathematics, 84*(3), 413-438.

Frejd, P. & Ärlebäck, J. B. (2011). First results from a study investigating Swedish upper secondary students' mathematical modelling competencies. Em G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman, *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*, 407–416.

Frejd, P. & Bergsten, C. (2018). Professional modellers' conceptions of the notion of mathematical modelling - Ideas for education. *ZDM, 50*(1-2), 117-127.

Gibbs, G. S. (2009). *Condiciones para una evaluación continuada favorecedora del aprendizaje*. Barcelona: Octaedro.

Henríquez, D., Pinto, M. & Solar Bezmalinovic, H. (2020). Identificación de la argumentación en el desarrollo de la modelación en la sala de matemáticas. *Revista de estudios y experiencias en educación*, 19(41), 391-407.

Kaiser, G., Blum, W., Ferri, R. B. & Stillman, G. (2011). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: ICTMA14.* Dordrecht: Springer.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZMD, 32*(2), 113-142.

Maaß, K. & Engeln K. (2018*). Impact of professional development involving modelling on teachers and their teaching*. ZMD 50(1), 273-285.

Mineduc. (2015). *Bases Curriculares 7º básico a 2º medio.* Santiago de Chile: Mineduc. Curriculum nacional https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-34949_Bases.pdf

Schukajlow, S., Kaiser, G. & Stillman, G. (2018). Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art. *ZDM, 50*(1-2), 5-18.

Smith, M. S. & Stein, M. K. (2011). *5 prácticas para orquestar discusiones productivas en Matemáticas.* Reston: The National Council of Teachers of Mathematics.

Saéz, Matías: Licenciado en Ciencias de la Educación y Profesor de Matemáticas graduado de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Correo: mbsaez@uc.cl.

Sánchez, Mario: Licenciado en Ciencias de la Educación y Profesor de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Profesor de Enseñanza Media en Matemáticas en el Colegio Inmaculada Concepción de Puerto Varas, Chile. Correo: masanchez4@uc.cl.

Solar, Horacio: Doctor en Didáctica de las Matemáticas de la Universitat Autònoma de Barcelona. Profesor Asistente de la Facultad de Educación de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Sus líneas de investigación incluyen las competencias matemáticas, entre ellas la argumentación y la modelación en el aula de matemáticas y el desarrollo profesional docente de matemáticas. Correo: hsolar@uc.cl. Dirección: Vicuña Mackenna 4860, Macul. Santiago de Chile. Facultad de Educación, Campus San Joaquín. CP: 782-0436, Teléfono: +5622357503