UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Junio de 2009, Número 18, páginas 6 - 14
SSN: 1815-0640
firma invitada

# ¡Vivan las demostraciones!

**Antonio Martinón**

*Mi gratitud a Teresa Braicovich y Norma Cotic por invitarme a escribir este artículo, pues para mí se trata de un gran honor. Mi enhorabuena a las dos, al comprobar que, gracias a ellas, Unión mantiene su rumbo.*

## Decidir la verdad

Los humanos decidimos de maneras muy diversas. Desde luego, hay ocasiones en las que recurrimos a un razonamiento. Pero a veces hacemos algo siguiendo una corazonada. En otras ocasiones atendemos a nuestros sentimientos. En el ámbito de la política recurrimos a una votación. En ciertas situaciones dispone la autoridad y los demás debemos acatar.

Pero en el terreno de la Ciencia se decide apelando a una explicación, sobre todo cuando deseamos conocer la verdad, que es a fin de cuentas el objetivo último de la actividad científica.

Será fácil que nos equivoquemos si pretendemos averiguar la verdad científica siguiendo una corazonada, atendiendo a nuestros sentimientos, realizando una votación, o que el más prestigioso decida.

En Ciencia tenemos que convencernos unos a otros de cuál es la verdad. Decimos que algo es cierto apelando a la razón, usando argumentos. Aquí no cabe el principio de autoridad, ni la opinión de la mayoría, ni seguir los dictados del corazón.

## La demostración en Matemáticas

En Matemáticas también es preciso que razonemos las verdades. A fin de cuentas, se trata de una de las Ciencias, la más básica de todas. Pero es que, además, las Matemáticas pueden ayudarnos mucho en aprender a caminar por el sendero que conduce a la verdad.

En el sistema educativo de cualquier país encontramos que las Matemáticas, junto con el estudio de la Lengua, tienen un papel central. Hay una doble justificación para que sea así. Por un lado, las Matemáticas resultan útiles en la vida cotidiana: las operaciones aritméticas son necesarias con frecuencia y ciertos rudimentos de Geometría y de las medidas de figuras simples también son imprescindibles. Pero hay otra razón, en la que ahora quiero insistir más: el estudio de las Matemáticas contribuye a la formación intelectual.

Para que realmente las Matemáticas jueguen ese papel de educadoras del intelecto es imprescindible que se presenten como una obra racional y no como un conjunto de misteriosas recetas que es obligatorio respetar. Este papel formativo de las Matemáticas no se alcanza a través del uso reiterado de ciertas fórmulas o de los habituales algoritmos.

Para que las Matemáticas formen intelectualmente a los alumnos, en lo que las Matemáticas son capaces de hacerlo, es imprescindible que haya razonamiento matemático. Y donde más lo encontramos es en las demostraciones, que vienen a ser un razonamiento con varios pasos, bien ligados unos con otros, y que pretende llevarnos a algún sitio.

El concepto de demostración matemática supone la cumbre de la argumentación racional. Demostrar significa dar una explicación para convencer a los demás, pero también a uno mismo, de la verdad de una afirmación. Se ofrece una razón que se impone por la ligazón lógica entre lo que ya se conoce y lo que se desea probar. Demostrar es evidenciar, es ofrecer un argumento irrefutable. Demostrar es justificar, evidenciar la certeza de una afirmación, alejando cualquier duda sobre su verdad.

La demostración matemática es peculiar porque es una justificación deductiva, aunque también en la Geometría elemental nos encontramos con demostraciones con una fuerte componente empírica: en parte del razonamiento se argumenta diciendo “mira y observa que es así”.

La demostración, el razonamiento que demuestra, es fundamental en las Matemáticas. Pero también lo es en buena parte de la actividad humana, aunque no, desde luego, en toda.

## La demostración en la Educación

Un grave problema está extendido en nuestros sistemas educativos: en las aulas, las demostraciones matemáticas están en retroceso, prácticamente ausentes.

Como ya hemos dicho, para que las Matemáticas jueguen su papel de formación intelectual es necesario que haya razonamiento matemático y eso se alcanza si las demostraciones forman parte del currículo escolar. Para lograrlo hay que darle la vuelta a la actual tendencia.

Por supuesto, no hay que demostrarlo todo y hay que adaptar las demostraciones al nivel de los alumnos. Pero sí creo muy conveniente que se implante la costumbre de la demostración, de la justificación.

Ante una propiedad matemática que no se demuestra caben varias justificaciones: “no tenemos tiempo para hacerla, pero se hace de modo similar a aquella otra”, e incluso cabe decir “es difícil y ya se estudiará en un curso posterior”, pero siempre se debe dar una explicación demostrativa. Debe quedar claro que en Matemáticas se demuestra todo, aunque al alumno, por una u otra razón, no se le ofrezca la correspondiente argumentación.

Acabo de escribir que en Matemáticas se demuestra todo y realmente esto no es totalmente cierto. Cuando se razona, uno se apoya en verdades ya conocidas y, a su vez, éstas necesitan una justificación. Pronto se comprende que esta cadena hacia atrás debe tener un final, lo que obliga a aceptar ciertos hechos como ciertos y sobre los que no cabe demostración: son los axiomas.

En la enseñanza, especialmente en la elemental, aceptamos como ciertas numerosas propiedades de los números y de las figuras geométricas, pero incluso en estos casos debemos dar al menos una explicación, con ejemplos adecuados, con dibujos sugerentes…

Se puede alegar que las demostraciones no son fáciles y que es casi imposible que los alumnos lleguen a entenderlas. Pienso que hay demostraciones sencillas, que los alumnos sí pueden comprender, adaptadas a sus conocimientos y a su desarrollo intelectual, y que los profesores no tenemos el derecho de ocultárselas.

Es cierto que una demostración exige trabajo y concentración. También a los grandes matemáticos, a quienes idearon los más difíciles razonamientos, les ha costado mucho esfuerzo. Además, forma parte de la Educación la transmisión de los valores propios de la exigencia intelectual.

También se podrá decir que no hay tiempo en el aula para gastar en demostraciones, que es necesario hacer otras muchas cosas. Opino que en las clases de Matemáticas hay tiempo para las Matemáticas y demostrar es hacer Matemáticas. Forma parte de la habilidad del profesor el logro de un reparto equilibrado del tiempo para desarrollar las diferentes facetas del aprendizaje matemático.

Quizás lo más difícil de una demostración es entender lo que una demostración significa. Como no se estudian demostraciones, o son muy pocas las que se presentan, la misma noción de demostración no existe en los estudios de la Educación Secundaria y se convierte en una auténtica novedad de los estudios universitarios. Parece que las verdades matemáticas son las que son por arte de magia, porque lo dice el profesor, porque está en el libro, porque siempre ha sido así...

Al principio, algunos alumnos pensarán que no es necesario demostrar nada y aceptarán gustosos lo que el profesor indique, sin más miramientos. Este es un obstáculo intelectual que es necesario superar.

Puesto que no es posible demostrarlo todo, se debe procurar elegir aquellas demostraciones más claras, más simples y, también, las más elegantes y atractivas.

A continuación incluyo algunas demostraciones que me resultan especialmente bellas. Todas son bien conocidas y antiguas, las más difíciles desde hace veinticinco siglos.

## Área del triángulo

La geometría del triángulo es un campo en el que se encuentran interesantes propiedades que tienen sencillas demostraciones. Es muy instructivo probar que las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto (circuncentro) y que existen propiedades análogas para las bisectrices (incentro), medianas (baricentro) y alturas (ortocentro).

Veamos ahora cómo se puede justificar la célebre fórmula de que el área de un triángulo es la mitad de la base por la altura. Se supone conocido que el área de un rectángulo de lados $a$ y $b$ es $A = ab$ (lo que, por otro lado, es muy "razonable").

Dado el triángulo PQR, se puede construir un triángulo de igual área de vértices RQS, y así obtenemos un paralelogramo de vértices PQSR, tal como se ve en la Figura 1.

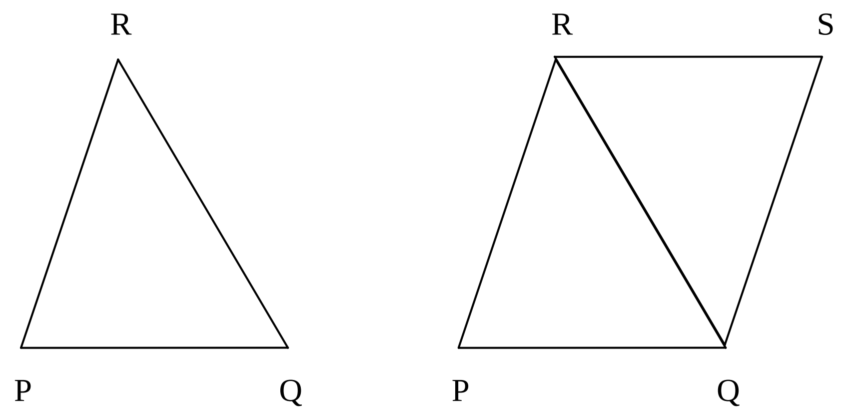


Figura 1

Si trazamos las perpendiculares PU y QV obtenemos el rectángulo PQVU, que tiene igual área que el paralelogramo PQSR y, por tanto, doble área que el triángulo inicial PQR, como se ve en la Figura 2.

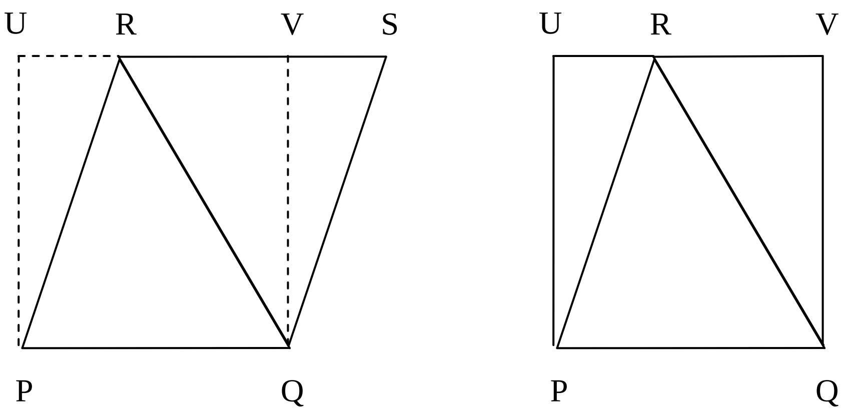


Figura 2

Si llamamos $a$ a la longitud del lado PQ y $b$ a la altura correspondiente, se tiene entonces

$$\text{área rectángulo PQVU} = ab = 2\ \text{área triángulo PQR}$$

y finalmente

$$\text{área triángulo PQR} = \frac{ab}{2}$$

Es decir, el área de un triángulo es la mitad de la longitud de un lado por la longitud de la altura correspondiente.

## Teorema de Pitágoras

Seguramente la propiedad matemática más famosa es el Teorema de Pitágoras. Existen centenares de demostraciones, pero lo habitual es que los alumnos no estudien ninguna de ellas. Me parece que ésta es una de esas propiedades cuya demostración debería ser obligatoria y el profesor cerciorarse de que los alumnos la han entendido. No sólo se trata de ofrecer una demostración para cumplir con los rigores del método matemático. Hay que alcanzar el máximo objetivo: los alumnos deben ser capaces de demostrar, entendiendo lo que hacen... ¡y disfrutando con ello!

La siguiente demostración me parece especialmente sencilla y al alcance de cualquiera. Realmente se trata de mirar con atención los dos dibujos de la Figura 3.

Se convence uno inmediatamente que es cierto que $a^2$ (la hipotenusa al cuadrado) coincide con $b^2 + c^2$ (la suma de los catetos al cuadrado); es decir:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

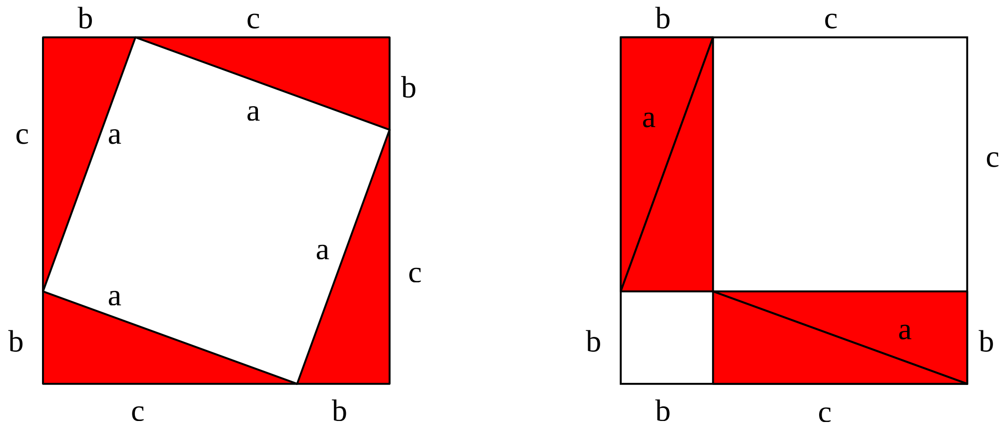


Figura 3

## Igualdades algebraicas notables

Especialmente instructivas son las propiedades que se demuestran de forma algebraica y geométrica, pues así se pone en evidencia la profunda unidad de las Matemáticas. Esto se puede hacer con la demostración de las igualdades notables:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad ; \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad .$$

Cualquiera de las tres igualdades anteriores se puede demostrar algebraicamente, desarrollando el término de la izquierda. Por ejemplo:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2.$$

Pero también se puede probar geométricamente, tal como se muestra en la Figura 4.

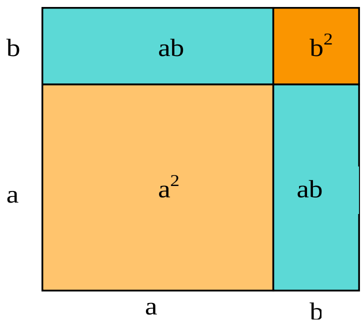


Figura 4

Se considera un cuadrado de lado $a+b$, y observamos que se forman dos cuadrados de lados $a$ y $b$ (luego de áreas $a^2$ y $b^2$) y dos rectángulos de lados $a$ y $b$ (luego ambos de áreas $ab$). Por tanto, el área total $(a+b)^2$ es la suma de las áreas de los dos cuadrados de áreas $a^2$ y $b^2$, y de los dos rectángulos de áreas $ab$:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

## $\sqrt{2}$ es irracional

Subimos el nivel de dificultad en este ejemplo. Vamos a recordar la demostración habitual de que el número $\sqrt{2}$ no es racional; es decir, es irracional. Esto significa que ningún número racional (ninguna fracción de números naturales) tiene su cuadrado igual a 2. El razonamiento que utilizaremos consiste en actuar *por reducción al absurdo,* así que sirve de ejemplo de otro método demostrativo.

Supongamos que la fracción $\frac{m}{n}$ ($m,n$ son números naturales) tiene cuadrado igual a 2 y suponemos también que la fracción ya está simplificada al máximo, es decir no hay factores comunes a $m$ y $n$. Esto significa que

$$\frac{m^2}{n^2} = 2 \ .$$

Entonces se tiene que $m^2 = 2n^2$. Por tanto $m^2$ es un número par, así que $m$ es también un número par y realmente $m^2$ es múltiplo de 4, así que queda $4p = m^2 = 2n^2$, por lo que $n^2$ es par, de donde se tiene que $n$ es par. Es decir, tanto $m$ como $n$ son pares, lo que contradice que no tuvieran factores comunes. Hemos llegado a una contradicción.

Hemos probado que las dos suposiciones que hemos hecho (la fracción $\frac{m}{n}$ tiene cuadrado igual a 2 y está simplificada al máximo) son imposibles al mismo tiempo. Como simplificar una fracción al máximo siempre se puede hacer, concluimos que es imposible que su cuadrado sea 2.

## Hay infinidad de números primos

Concluimos con una propiedad que es muy distinta de todas las anteriores: hay infinitos números primos.

Aquí hay un trato con el infinito y, por tanto, hay una complicación importante, que exige un cierto nivel de madurez por parte de los alumnos. Pero es una magnífica ocasión de abordar una de las ideas matemáticas más notables, la del infinito. Lo que realmente vamos a demostrar es que dada una cantidad finita de números primos siempre podremos encontrar un número primo diferente de todos ellos. Por tanto, tiene que haber una infinidad de números primos.

Recordemos que un número natural $a$ se llama *primo* si solamente es múltiplo de 1 y de sí mismo, y además es diferente de 1. Los primeros números primos son: 2, 3, 5, 7...

Vamos con la demostración. Supongamos que los números $a, b, c..., m$ son primos. Los multiplicamos todos ellos, sumamos 1 y obtenemos el número:

$$p = abc...m + 1 \ ,$$

el cual es diferente de $a, b, c..., m$ (¡es "bastante" más grande que todos ellos!) El número $p$ no es múltiplo de $a$, ya que si lo fuera, entonces también $abc...m$ sería múltiplo de $a$, luego 1 tendría que ser múltiplo de $a$, lo que no puede ser. Análogamente, $p$ no es múltiplo de ninguno de los otros números primos: ni de $b$, ni de $c$..., ni de $m$. Por tanto, o bien el mismo $p$ es primo o bien $p$ es múltiplo de algún otro primo $q$, que es diferente de los primos $a, b, c..., m$. En cualquier caso podemos decir que hay más primos además de los iniciales $a, b, c..., m$.

## ¡Vivan las demostraciones... correctas!

Todo lo escrito hasta aquí se puede resumir en ¡Vivan las demostraciones! Son muy útiles para educar intelectualmente a los alumnos... y a los profesores no nos vienen mal. Además, con ellas se puede disfrutar.

Pero hay que tener cuidado, como ocurre con tantos placeres. Hay demostraciones que son erróneas, así que no se trata de auténticas demostraciones. Son razonamientos tramposos, aunque muchas veces no hay ánimo de engaño por parte de los autores.

Bajo la apariencia de un riguroso razonamiento se puede esconder algún disparate. Esto es obvio cuando la conclusión es claramente falsa. Veamos el siguiente "razonamiento": supongamos que $a$ y $b$ son números que verifican $a = b$, es decir son el mismo número. Entonces:

$$a = b$$

$$a^2 = ab$$

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

$$(a - b)(a + b) = (a - b)b$$

$$a + b = b$$

$$2a = a$$

$$2 = 1$$

¿En qué paso o en qué pasos se ha cometido error?

Otras veces el razonamiento es incorrecto, pero la conclusión es cierta, lo que hace difícil detectar que existe un error. Un ejemplo: supongamos que $a$ y $b$ son números positivos ($a > 0, b > 0$). Entonces:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{a}} + \sqrt{\frac{1}{b}} = \sqrt{\frac{b}{ab}} + \sqrt{\frac{a}{ab}} = \sqrt{\frac{b}{ab} + \frac{a}{ab}} = \sqrt{\frac{b+a}{ab}} = \frac{\sqrt{b+a}}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$$

Luego

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$$

¿Cuál o cuáles de las anteriores igualdades son falsas?

Por tanto, debemos decir ¡Vivan las demostraciones!, pero mejor es que afirmemos ¡Vivan las demostraciones... correctas!

## Final

¿Cuándo es correcta una demostración? No hay respuesta sencilla. Resulta necesario desarrollar el sentido crítico frente a un razonamiento que se nos presenta, ante una justificación que se nos da... Es decir, hay que pensar por uno mismo y animar a los alumnos a que así lo hagan. No está mal como objetivo de la enseñanza de las Matemáticas.

Bertrand Russell escribió que “uno de los principales fines que cumplen las Matemáticas correctamente enseñadas es despertar en el estudiante la fe en la razón, la confianza en la verdad de lo que ha sido demostrado y en el valor de la demostración”. Implícito en esa idea está que el aprendizaje de las Matemáticas contribuya a formar personas capaces de discernir un razonamiento correcto de uno que no lo es.

Si se logra que las demostraciones tengan un peso razonable en la enseñanza de las Matemáticas habremos conseguido elevar el nivel intelectual de nuestras sociedades. Animo a todos a intentarlo, pues creo que vale la pena.

En fin, lo ya dicho: ¡Vivan las demostraciones!