

## El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú

[umalasp@pucp.edu.pe](mailto:umalasp@pucp.edu.pe)

### Producto máximo

#### Problema

*Dados los dígitos  $a, b, c$  y  $d$ , siendo  $a < b < c < d$ , escoge dos de ellos para escribir un multiplicando de dos cifras y otros dos para escribir un multiplicador de dos cifras, todas diferentes entre sí, de modo que el producto sea máximo.*

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \times$$

---

Los lectores de UNION, y en particular de esta sección, recordarán que traté un problema similar en el número 11. Entonces contaba la experiencia didáctica con un niño de quinto grado de primaria al haber propuesto el problema considerando un factor de dos dígitos y otro de un dígito, y hacía algunos análisis usando criterios del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.

Me he animado a compartir con los lectores este problema similar, porque tuve otra experiencia didáctica al aplicarlo a jóvenes de secundaria, participantes voluntarios de un taller sobre matemáticas, en el marco del *Primer Encuentro Iberoamericano de Jóvenes con Capacidades Superiores*, realizado en Lima, en agosto del 2008. Fueron 24 en total, 9 mujeres y 15 varones y su edad promedio fue 15,6 años.

Ahora haré algunos análisis y comentarios a las soluciones presentadas de este problema, que fue uno de varios problemas trabajados en el taller, la mayoría de ellos en forma grupal y en contextos lúdicos.

El problema no fue propuesto aisladamente. A continuación copio las cuatro primeras cuestiones planteadas a los jóvenes, para ser resueltas trabajando individualmente.

- a) Dados los dígitos 5, 6, 8 y 9, escoge tres de ellos para escribir un multiplicando de dos cifras y un multiplicador de una cifra, todas diferentes entre sí, de modo que el producto sea máximo.

$$\begin{array}{r} \square \square \\ \square \\ \hline \end{array} \times$$

- b) Dados los dígitos  $a, b, c$  y  $d$ , siendo  $a < b < c < d$ , escoge dos de ellos para escribir un multiplicando de dos cifras y otros dos para escribir un multiplicador de dos cifras, todas diferentes entre sí, de modo que el producto sea máximo.

$$\begin{array}{r} \square \square \\ \square \square \\ \hline \end{array} \times$$

- c) Explica cómo llegaste a la respuesta que diste en (a)

- d) Explica cómo llegaste a la respuesta que diste en (b)

La intención de las partes  $c$  y  $d$  es indagar los procedimientos y las argumentaciones a los resultados obtenidos, ya que en  $a$  y  $b$  se les deja amplia libertad para que escriban sus resultados, sin que necesariamente tengan que explicitar sus razones.

Puede verse que el nivel de dificultad de  $b$  es mayor que el de  $a$ , pues no sólo se pasa a trabajar con ambos factores de dos dígitos, sino con un criterio de generalidad. La intención era que la experiencia de trabajar con números específicos en  $a$ , los ayude a resolver  $b$ . 16 jóvenes dieron soluciones correctas de  $a$ ; 11 dieron soluciones correctas de  $b$  y 8 respondieron correctamente  $a$  y  $b$

Es muy interesante examinar las soluciones y las explicaciones dadas por los jóvenes. Para que los lectores tengan una idea global de ellas, sin revisar cada una de las hojas escritas, muestro cuatro cuadros, considerando algunos criterios acerca de sus explicaciones y de lo observado en sus hojas de respuestas. He llamado situación A a la que conforman las cuestiones  $a$  y  $c$  y situación B a la que conforman las cuestiones  $b$  y  $d$ . Un primer análisis de estas situaciones se muestra en los cuadros 1 y 2.

**Cuadro 1:** Sobre las cuestiones a y c

| A ( a y c ) |          |                             |        |                    |                |                     |
|-------------|----------|-----------------------------|--------|--------------------|----------------|---------------------|
| Solución    |          | Procedimiento / Explicación |        |                    |                |                     |
| Incorrecta  | Correcta | Inconsistente               | Tanteo | Tanteo Inteligente | Raz. Abstracto | Raz. Abst. Riguroso |
| 8           | 16       | 1                           | 8      | 9                  | 6              | 0                   |

He considerado:

- *Solución correcta*, en todos los casos en los que se ha escrito

$$\begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array}$$

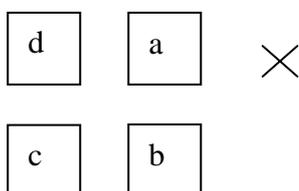
- Una *explicación inconsistente*, aquella que no muestra coherencia entre lo dicho y lo hecho.
- Un procedimiento por *tanteo*, aquel que muestra cálculos (o dice haberlos hecho) con diversas posibilidades, sin examinar previamente qué posibilidades son las que dan los más altos productos.
- Un procedimiento por *tanteo inteligente*, aquel que muestra cálculos (o dice haberlos hecho) considerando solo las posibilidades que dan los productos más altos.
- Un procedimiento por *razonamiento abstracto*, aquel que examina la situación más allá de casos particulares, buscando o dando razones – no necesariamente correctas – para que los dígitos ocupen determinados lugares a fin de obtener el máximo producto.
- Un procedimiento por *razonamiento abstracto riguroso*, aquel que examina la situación más allá de casos particulares, explicando correctamente las razones por las cuales tres de los cuatro dígitos dados deben estar ubicados de determinada manera en las casillas para que el producto sea máximo.

**Cuadro 2:** Sobre las cuestiones *b* y *d*

| <b>B (b y d)</b>  |                 |                                    |                  |              |                       |                            |
|-------------------|-----------------|------------------------------------|------------------|--------------|-----------------------|----------------------------|
| <b>Solución</b>   |                 | <b>Procedimiento / Explicación</b> |                  |              |                       |                            |
| <b>Incorrecta</b> | <b>Correcta</b> | <b>Inconsistente</b>               | <b>En blanco</b> | <b>P → G</b> | <b>Raz. Abstracto</b> | <b>Raz. Abst. Riguroso</b> |
| <b>13</b>         | <b>11</b>       | <b>1</b>                           | <b>2</b>         | <b>12</b>    | <b>9</b>              | <b>0</b>                   |

En este caso, he considerado:

- *Solución correcta*, en todos los casos en los que se ha escrito



- Un procedimiento **P → G**, aquel que asigna valores particulares a las variables a, b, c y d (casi en todos los casos los números 1, 2, 3 y 4 respectivamente), busca el producto máximo en tal caso y luego generaliza regresando a las variables, según la ubicación de los valores particulares dados.
- Un procedimiento por *razonamiento abstracto riguroso*, aquel que examina la situación más allá de casos particulares, explicando correctamente las razones por las cuales cuatro dígitos dados, diferentes entre sí, deben estar ubicados de determinada manera en las casillas para que el producto sea máximo.
- Los otros procedimientos o explicaciones, que coinciden con los considerados en la situación A, se asumen con los mismos criterios.

Los cuadros 3 y 4 muestran algunos cruces de la información registrada en las situaciones A y B respectivamente.

**Cuadro 3:** Soluciones y Explicaciones/ Procedimientos en la situación A

| <b>A</b>               | <b>Exp. Inconsistente</b> | <b>Tanteo</b> | <b>Tanteo inteligente</b> | <b>Raz. abstracto</b> | <b>Raz. abstracto riguroso</b> | <b>Totales</b> |
|------------------------|---------------------------|---------------|---------------------------|-----------------------|--------------------------------|----------------|
| <b>Sol. correcta</b>   | <b>0</b>                  | <b>4</b>      | <b>9</b>                  | <b>3</b>              | <b>0</b>                       | <b>16</b>      |
| <b>Sol. incorrecta</b> | <b>1</b>                  | <b>4</b>      | <b>0</b>                  | <b>3</b>              | <b>0</b>                       | <b>8</b>       |

**Cuadro 4:** Soluciones y Explicaciones/ Procedimientos en la situación B

| <b>B</b>               | <b>Exp. incon-<br/>sistente</b> | <b>En<br/>blanco</b> | <b><math>P \rightarrow G</math></b> | <b>Raz.<br/>abstracto</b> | <b>Raz.<br/>abstracto<br/>riguroso</b> | <b>Totales</b> |
|------------------------|---------------------------------|----------------------|-------------------------------------|---------------------------|--|----------------|
| <b>Sol. correcta</b>   | 0                               | 1                    | 6                                   | 4                         | 0                                      | 11             |
| <b>Sol. incorrecta</b> | 1                               | 1                    | 6                                   | 5                         | 0                                      | 13             |

### Algunos comentarios

1. La información cuantitativa que he mostrado es solo una parte de los diversos análisis que se pueden hacer a partir de esta experiencia didáctica, sobre todo cualitativamente y teniendo en cuenta que los participantes fueron jóvenes seleccionados de sus centros educativos por haber mostrado “capacidades superiores”, aunque no específicamente en matemáticas. Los diversos marcos teóricos sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática pueden dar muchas luces al respecto.
2. Algunos aspectos de la información registrada llaman la atención y suscitan preguntas y algunas pistas para hacer investigaciones:
  - a. En ninguna de las situaciones se encuentra una solución con un procedimiento abstracto riguroso. ¿Podemos afirmar que esto es natural, considerando la edad de los jóvenes? ¿No es una muestra de la forma en que se enseña la matemática en el nivel secundario y cómo se induce a resolver problemas; es decir, dando poca importancia a los razonamientos más generales?
  - b. En la situación A predomina el tanteo y un poco más el tanteo inteligente (Cuadro 1). Más aún, todos los que procedieron con un tanteo inteligente dieron una respuesta correcta (Cuadro 3). ¿Está jugando un papel importante la intuición? Siendo un problema de optimización, ¿Estamos teniendo otra muestra de existencia de “intuición optimizadora”?
  - c. En la situación B predomina el procedimiento  $P \rightarrow G$ . ¿Este es un procedimiento inducido en las clases, o una manera intuitiva de ver lo general en lo particular? Por cierto, es un asunto delicado, pues siendo muy importante examinar casos particulares, si no se tiene plena conciencia de la dualidad ejemplar-tipo (usando términos del enfoque ontosemiótico), en muchos casos se puede pasar fácilmente a hacer falsas generalizaciones. De hecho, el 50% de los que usaron este procedimiento no llegaron a una respuesta correcta.

Dejo a los lectores las inquietudes que provocan estas situaciones y la información cuantitativa mostrada. Sería interesante replicar la experiencia – no necesariamente con jóvenes con capacidades superiores – y profundizar investigaciones con marcos teóricos como el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática o las situaciones didácticas, y con métodos de

investigación como la ingeniería didáctica. Me dará mucho agrado recibir comentarios y propuestas de investigación.

Para una mejor aproximación a la experiencia didáctica realizada, muestro a continuación la hoja de trabajo de uno de los jóvenes.

- a) Dados los dígitos 5, 6, 8 y 9, escoge tres de ellos para escribir un multiplicando de dos cifras y un multiplicador de una cifra, todas diferentes entre sí, de modo que el producto sea máximo.

Handwritten calculations for part (a):

$$\begin{array}{r} 5 \\ 86 \times 9 \\ \hline 774 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 59 \times 8 \\ \hline 472 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 96 \times 8 \\ \hline 768 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 89 \times 6 \\ \hline 534 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 53 \times 9 \\ \hline 477 \end{array}$$

Handwritten multiplication:

$$\begin{array}{r} 43 \times 9 \\ \hline 387 \end{array}$$

Handwritten multiplication:

$$\begin{array}{r} 41 \times 9 \\ \hline 369 \end{array}$$

Handwritten multiplication:

$$\begin{array}{r} 42 \times 9 \\ \hline 378 \end{array}$$

Handwritten multiplication:

$$\begin{array}{r} 43 \times 8 \\ \hline 344 \end{array}$$

Handwritten multiplication:

$$\begin{array}{r} 41 \times 8 \\ \hline 328 \end{array}$$

Handwritten multiplication:

$$\begin{array}{r} 42 \times 8 \\ \hline 336 \end{array}$$

Handwritten multiplication:

$$\begin{array}{r} 43 \times 6 \\ \hline 258 \end{array}$$

Handwritten multiplication:

$$\begin{array}{r} 41 \times 6 \\ \hline 246 \end{array}$$

Handwritten multiplication:

$$\begin{array}{r} 42 \times 6 \\ \hline 252 \end{array}$$

8

6

×

9

---

- b) Dados los dígitos a, b, c y d, siendo  $a < b < c < d$ , escoge dos de ellos para escribir un multiplicando de dos cifras y otros dos para escribir un multiplicador de dos cifras, todas diferentes entre sí, de modo que el producto sea máximo.

Handwritten calculations for part (b):

$$\begin{array}{r} a=1 \\ b=2 \\ c=3 \\ d=4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 43 \times dc \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 41 \times da \\ \hline 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \times ab \\ \hline 31 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 43 \times bc \\ \hline 125 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 41 \times cd \\ \hline 1302 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \times ab \\ \hline 125 \end{array}$$

Handwritten multiplication:

$$\begin{array}{r} d \ a \\ \hline c \ b \end{array}$$

Handwritten multiplication:

$$\begin{array}{r} d \ a \\ \hline c \ b \end{array}$$

d

a

×

c

b

---

- c) Explica cómo llegaste a la respuesta que diste en (a)

Traté de escoger a los # más grandes y probar las multiplicaciones.

- d) Explica cómo llegaste a la respuesta que diste en (b)

Le di un valor numérico a las letras teniendo en cuenta que:  $a < b < c < d$ ; y luego jugué con los # para obtener el máximo resultado.