



## **Desarrollo de software para El aprendizaje y razonamiento probabilístico: El caso de SIMULAPROB**

**Santiago Insunza; Diego Alonso Gastélum; Anselmo Alvarez**

---

### **Resumen**

Se discute el desarrollo y puesta a prueba de un software para apoyar la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad desde un enfoque frecuencial. El software ha sido desarrollado en lenguaje JAVA bajo principios constructivistas de aprendizaje y considerando sugerencias de la investigación en educación estadística. El software permite abordar conceptos como aleatoriedad, noción frecuencial de la probabilidad, espacio muestral, modelos de urna, distribuciones de probabilidad (binomial e hipergeométrica); además permite explorar resultados teóricos y empíricos y el efecto que el número de simulaciones tiene en dichos resultados.

### **Abstract**

We are discusses the development and testing of educational software to support the teaching and learning of probability from a frequency approach. The software has been developed in JAVA language considering constructivist learning principles and suggestions from research in statistics education. The software allows exploring concepts such as randomness, frequency notion of probability, sample space, urn models for probability distributions (binomial and hypergeometric), can also explore theoretical and empirical results and the effect the number of simulations on the probabilities.

### **Resumo**

Discute-se o desenvolvimento e o teste de um software para apoiar o ensino da probabilidade desde um enfoque frecuencial. O software foi desenvolvido na linguagem Java sob princípios construtivistas de aprendizagem e considerando sugestões da pesquisa em educação estatística. O software permite abordar conceitos como aleatoriedade, noção frequencial de probabilidade, espaço amostral, modelos de urna, distribuições de probabilidade (binomial e hipergeométrica); além disso permite explorar resultados teóricos e empíricos e o efeito que o número de simulações tem nesses resultados.

### **Introducción**

La enseñanza de la probabilidad en la educación básica (6- 14 años de edad) fue motivo de controversia por muchos años a raíz de los estudios de Piaget y sus colaboradores, los cuales muestran el requisito de las operaciones formales en el desarrollo intelectual de los niños para la adquisición del concepto de probabilidad (desde un punto de vista clásico) y su correspondiente razonamiento. Sin embargo,



otros estudios enfocados en investigar el efecto de la enseñanza en las intuiciones de los estudiantes, como es el caso de los estudios realizados por Fischbein y colaboradores (Fischbein, 1975; Fischbein y Gazit, 1984) han mostrado que la noción de probabilidad y la intuición probabilística puede ser adquirida por los niños desde un punto de vista frecuencial desde el nivel elemental, siempre que reciban una enseñanza adecuada basada en actividades experimentales.

A partir de entonces, la probabilidad ha cobrando cada vez mayor importancia como eje del currículo escolar de matemáticas, sobre todo a partir del reconocimiento que se le ha dado a la presencia del azar y la incertidumbre como fenómenos de la vida cotidiana, profesional y científica de los ciudadanos. Ejemplos de ello se pueden encontrar en los documentos curriculares de diversos países (NCTM, 1989; NCTM, 2000; SEP, 1993; MEC, 1992); en reportes, estudios y recomendaciones de asociaciones que promueven la educación estadística y de investigadores en esta área (Coob, 1992; ASA, 2005).

En lo que respecta al bachillerato (15-17 años), bajo el supuesto que los estudiantes han alcanzado la etapa de las operaciones formales, la enseñanza de la probabilidad –al menos en el caso de México- por muchos años ha hecho énfasis en el enfoque clásico, con un uso a veces excesivo de técnicas combinatorias y conceptos formales, los cuales son más propios de un curso de probabilidad a nivel universitario. De acuerdo con Godino et al., (1996, p. 9), ello crea un serio problema didáctico, ya que la mayoría de los estudiantes en los cursos de bachillerato y en el nivel universitario para estudiantes no matemáticos, no es fácil comprender un desarrollo axiomático formal de la teoría de la probabilidad, sobre todo cuando les falta preparación intuitiva previa necesaria.

Ante la problemática anterior, se han realizado propuestas curriculares y recomendaciones para la enseñanza de la probabilidad, las cuales buscan un mayor equilibrio entre el enfoque clásico, frecuencial y subjetivo (por ejemplo, Godino et al., 1996; Shaughnessy et al., 2004). Tales propuestas recomiendan una metodología de enseñanza que considera la experimentación y simulación de fenómenos aleatorios, con lo cual se pretende que el alumno obtenga datos reales o simulados, que haga predicciones acerca de los posibles resultados, que compare sus predicciones con los resultados experimentales y finalmente que los valide mediante un modelo teórico apropiado.

Por ejemplo, el Consejo de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos en su documento titulado Principios y Estándares para la Educación Matemática, recomienda que los problemas de probabilidad puedan ser investigados primeramente por medio de simulaciones para obtener una respuesta aproximada y después usar un modelo teórico para encontrar la solución exacta. Por su parte, Shaughnessy (1992, p. 469) señala sobre la conveniencia de utilizar uno u otro enfoque (clásico o frecuencial):

Aunque algunos experimentos en probabilidad se pueden modelar mejor en un espacio con probabilidad uniforme (enfoque clásico), otros se pueden



modelar mejor desde una perspectiva frecuencial. Existen problemas en los que es deseable un “matrimonio” entre las frecuencias experimentales y la teoría clásica. Sin embargo, existen otros problemas en los que ni siquiera existe una solución teórica, o no se puede disponer de ella para dársela a los estudiantes; en tales casos el enfoque frecuencial tiene un gran mérito. También existen problemas de probabilidad en los que el conflicto entre las tendencias subjetivistas y la teoría clásica se pueden resolver adoptando un punto de vista frecuencial y ejecutando una simulación. Así, yo apoyaría un punto de vista pragmático que implique la modelación de varias ideas de probabilidad.

De esta manera, una enseñanza de la probabilidad que toma en cuenta el enfoque frecuencial presenta varias ventajas didácticas respecto a la enseñanza centrada solamente en el enfoque clásico. Mencionamos las siguientes:

1. Se facilita una enseñanza basada en la experimentación, a través de la cual los estudiantes pueden construir ideas correctas acerca de conceptos probabilísticos.
2. Sirve de puente entre la probabilidad y la estadística, ayudando con ello a comprender la relación tan estrecha que hay entre datos y azar, situación bastante sugerida en muchos currículos actuales.
3. Amplía el campo de aplicaciones de la probabilidad, abordando problemas donde no se cumple necesariamente el principio de equiprobabilidad que exige en enfoque clásico.

Sin embargo, para poder implementar el enfoque frecuencial en la enseñanza de la probabilidad, la computadora es un elemento indispensable, pues realizar los experimentos en forma manual requiere de mucho tiempo, por la gran cantidad de repeticiones de un experimento que hay que realizar para que las frecuencias relativas se estabilicen y se acerquen lo más posible a las probabilidades teóricas, como lo establece la ley de los grandes números en probabilidad.

De esta manera y ante la escasez de herramientas de software educativo con capacidades flexibles de simulación para estudiantes de bachillerato y cursos introductorios en la universidad, nos hemos propuesto desarrollar una herramienta que permita abordar la enseñanza de la probabilidad desde la perspectiva frecuencial, con el propósito de mejorar la intuición y el razonamiento probabilístico de los estudiantes a través de la simulación de experimentos aleatorios. El diseño del software lo hemos visualizado desde la perspectiva de herramienta cognitiva, con un adecuado nivel de interactividad que permita al estudiante definir una serie de parámetros que tienen influencia en los resultados, los cuales pueden ser visualizados por medios de diversas representaciones gráficas y numéricas ligadas entre sí y con posibilidades de una retroalimentación inmediata.

### **La computadora en la enseñanza de la probabilidad**

A pesar del crecimiento que ha venido experimentando la producción de software para la enseñanza de las matemáticas en los últimos años, el software para la enseñanza de la probabilidad es aún escaso. Biehler (1991) señala entre las



causas de ello, la reciente incorporación de la probabilidad en el currículo de muchos países, y por ende la insuficiente investigación acerca de muchos de sus problemas de enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, dicha situación se ha empezado a revertir y cada vez más se desarrollan nuevas herramientas de software para la enseñanza de la probabilidad para los diferentes niveles escolares. Algunos ejemplos de estos programas son: Fathom (Finzer et al., 2002), Probability Explorer (Stohl, 1999-2005), Chance-Maker (Pratt, 1998), ProbSim (Konold, 1992-2003). Además, otro tipo de recursos basados en ambientes Web empiezan a surgir con el propósito de apoyar los cursos de probabilidad y estadística. Tal es el caso de los Java Applets, que son pequeños programas que se ejecutan en línea en una página de Internet. Ejemplos de los diversos recursos que existen en Internet para apoyar la educación estadística son descritos en Inzunsa (2007) y Garfield y Ben-Zvi (2008).

Uno de los aspectos más relevantes en los que la computadora puede ser de gran utilidad como herramienta pedagógica para la enseñanza de la probabilidad es la simulación de fenómenos aleatorios (Inzunsa y Quintero, 2007; Chance, et al., 2007). La simulación consiste en sustituir un experimento aleatorio por otro equivalente. En el caso de una simulación por computadora, mediante diversas instrucciones es posible construir un modelo que represente dicho fenómeno. Así, el estudiante puede explorar y comprender conceptos y principios que de otro modo serían mucho más abstractos, contribuyendo con ello a mejorar la experiencia estocástica y la intuición probabilística.

Biehler (1991), señala que la enseñanza de la probabilidad apoyada con tecnología computacional y con una metodología pedagógica apropiada, puede presentar las siguientes ventajas:

1. El número de repeticiones es fácilmente incrementado, haciendo que la incertidumbre y la variabilidad de los resultados se reduzcan; nuevas clases de patrones pueden ser detectados.
2. Es posible una exploración extensiva cambiando los supuestos del modelo, haciendo experimentos adicionales, cambiando la forma de generar los datos, etc.
3. Representaciones nuevas y más flexibles están disponibles para expresar modelos y procesos estocásticos y despliegue de datos con facilidades gráficas.

Por su parte, Chance et al., (2007) identifican diversas formas en las cuales la tecnología computacional puede apoyar el aprendizaje de los estudiantes:

1. Automatizando cálculos y gráficas
2. En la exploración de los datos
3. En la visualización de conceptos abstractos
4. En la simulación de fenómenos aleatorios
5. En la investigación de problemas reales
6. Proporcionando herramientas de colaboración entre estudiantes

De esta manera, a través de la simulación, conceptos fundamentales en probabilidad y estadística, como la ley de los grandes números, la aleatoriedad, el teorema del límite central, la variabilidad muestral, distribuciones de probabilidad,



pueden ser explorados por los estudiantes con relativa facilidad. Así, en poco tiempo es posible observar como convergen las frecuencias en los resultados de un experimento aleatorio conforme aumentamos el número de repeticiones o cómo se comporta la distribución de un estadístico en las muestras extraídas de una población a medida que aumentamos el tamaño de la muestra.

### Principios teóricos en el diseño del software SIMULAPROB

De acuerdo con la clasificación de software educativo que hacen Hinostraza et al., (2000), SIMULAPROB ha sido concebido como un software que se ubica en la categoría de herramientas cognitivas (Pea, 1987; Jonassen, 1994, Ben-Zvi, 2000), con capacidad para realizar simulaciones de fenómenos aleatorios discretos y con posibilidad de que los usuarios establezcan relaciones entre resultados empíricos y teóricos. Además del desarrollo del software, el proyecto contempla algunas actividades didácticas las cuales van incorporadas en el software mismo.

Pea (1987, p. 91) define una herramienta cognitiva como “cualquier medio que ayuda a trascender las limitaciones de la mente, en el pensamiento, el aprendizaje y las actividades de resolución de problemas. Pea define ciertas funciones, que él llama, trascendentes, las cuales deben ser incorporadas en un software para que la computadora funcione como una verdadera herramienta cognitiva y promueva la actividad cognitiva de los estudiantes en el aprendizaje de la matemáticas. Dichas funciones, las interpretamos como las características que deben regir el diseño de software para la educación matemática. Existen dos tipos de de funciones trascendentes:

- *Funciones propósito*

Estas funciones promueven que los estudiantes lleguen a ser partícipes de lo que aprenden y no se limiten ser ejecutores de instrucciones. Esto es, el software debe dar oportunidad al usuario de generar partes del proceso de resolución de los problemas o de la exploración de los conceptos que se pretende que el aprenda. Es decir, el software no debe ser una “caja negra” en el cual el estudiante sólo se limita a introducir datos y a recibir resultados.

- *Funciones proceso* Las funciones proceso por su parte, permiten abstraer al usuario de tareas laboriosas y rutinarias, y coadyuvan en la exploración de conceptos, permitiendo que en el caso de los estudiantes, generen sus propias conclusiones. Para ello cuentan con las siguientes herramientas:

1. Herramientas para desarrollar la fluidez conceptual.
2. Herramientas de exploración matemática
3. Herramientas de representación.

En este sentido, el diseño del software tiene en cuenta principios constructivistas del aprendizaje y resultados de investigación en el área de didáctica de la probabilidad. Se pretende que el usuario sea partícipe en la construcción de su propio conocimiento al interactuar con las diferentes componentes y



representaciones del software, las cuales estarán diseñadas para generar dicha interacción. En un ambiente constructivista se ve al estudiante como un elemento activo que participa en la construcción de su propio conocimiento, y las computadoras son medios excepcionales para el aprendizaje constructivista (Noss & Hoyles, 1996). Ellas permiten a los usuarios la oportunidad de una retroalimentación de sus acciones y los ayudan a tener control sobre su propio aprendizaje.

## Descripción de las componentes del software

SIMULAPROB es interactivo, y a través de él los estudiantes pueden simular diversos experimentos aleatorios, principalmente de tipo discreto, como es el lanzamiento de monedas, lanzamiento de dados y de otros fenómenos que conducen a distribuciones de tipo binomial e hipergeométrica que se pueden modelar mediante un modelo de urna, como se muestra en la figura 1:

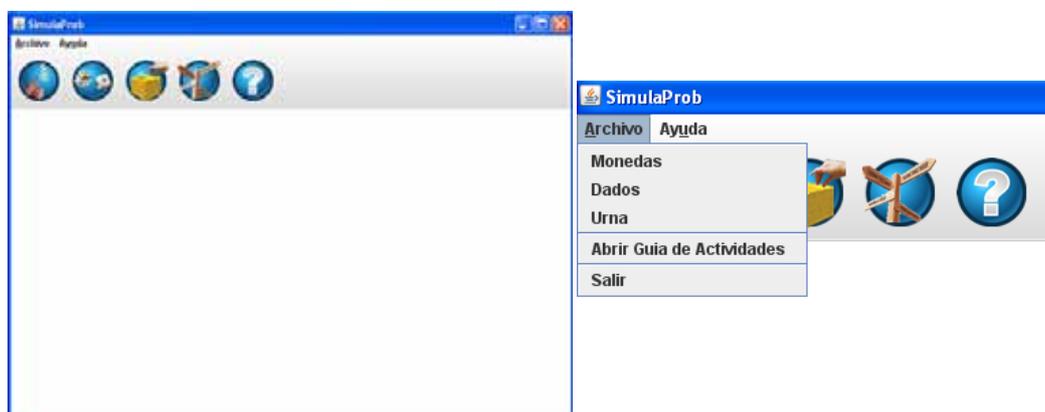


Fig. 1: Pantalla principal de SIMULAPROB

### 1. Ventana de diseño de los experimentos y resultados

Una vez que se ha seleccionado una opción (monedas, dados o urna) el software despliega la ventana de diseño de experimentos, lo cual permite al usuario definir los parámetros de la simulación. Por ejemplo la ventana de diseño de un modelo de urna se muestra en la figura 2. Por su parte, la figura 3 muestra la ventana de diseño de experimentos y resultados para la simulación de monedas.

### 2. Representaciones gráficas

De acuerdo con la tipología de funciones cognitivas definidas por Pea (1987), las herramientas de representación son parte de las funciones proceso y ocupan un lugar muy importante en un software para la enseñanza de las matemáticas. SIMULAPROB posee diferentes tipos de gráficas que permiten visualizar los resultados que son de interés en la simulación.

En el enfoque frecuencial de la probabilidad es sumamente importante comprender que las frecuencias relativas tienden a estabilizarse alrededor del valor de la probabilidad del evento de interés, conforme se incrementa en número de observaciones o repeticiones de un fenómeno aleatorio. Es importante observar la variabilidad que existen cuando se tienen pocos lanzamientos; ello puede contribuir



a que no es posible confiar en pequeñas muestras cuando se estudian fenómenos estocásticos.

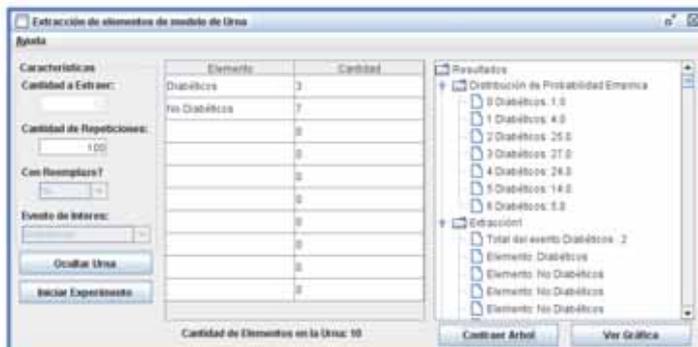


Fig. 2: Ventanas de definición de modelo, parámetros de la simulación y resultados para el caso de la urna

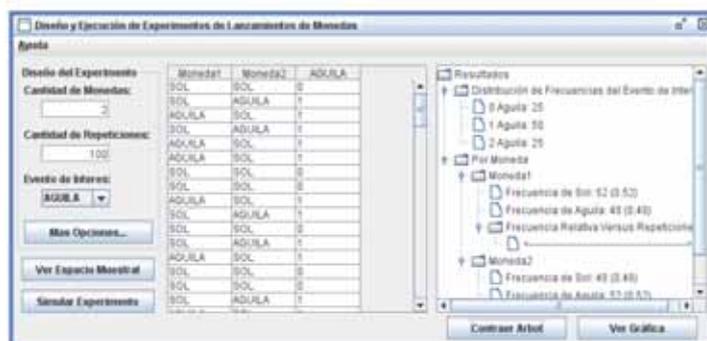


Fig. 3: Ventana de definición de parámetros de la simulación y resultados para el caso de monedas

La figura 4 muestra el comportamiento de la frecuencia relativa del evento de interés (águila) en la simulación del lanzamiento de 10 y 100 monedas respectivamente. Otra característica importante del software que puede visualizarse en esta figura y que identificamos como parte de las herramientas de exploración definidas por Pea (1987), es la posibilidad de construir diversas gráficas de los mismos resultados cambiando algún parámetro de la simulación.

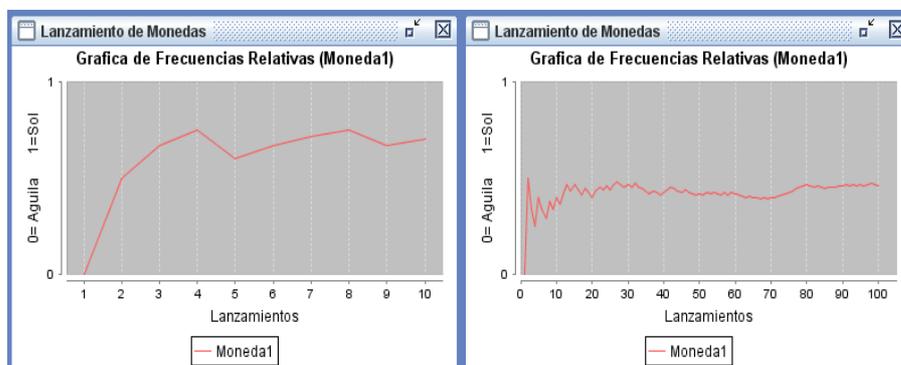


Fig. 4: Gráfica de frecuencia relativa de águilas vs. cantidad de lanzamientos de una moneda



Otra parte importante que hemos considerado en el diseño del software es el recurso de convertir el evento de interés en una variable aleatoria con el propósito de construir su distribución de frecuencias y compararla con la distribución teórica, una situación muy sugerida en didáctica de la probabilidad. Con ello podemos variar el número de repeticiones del experimento y observar cómo se aproxima la distribución de frecuencias (empírica) a la distribución de probabilidad teórica, como se muestra en la figura 5.

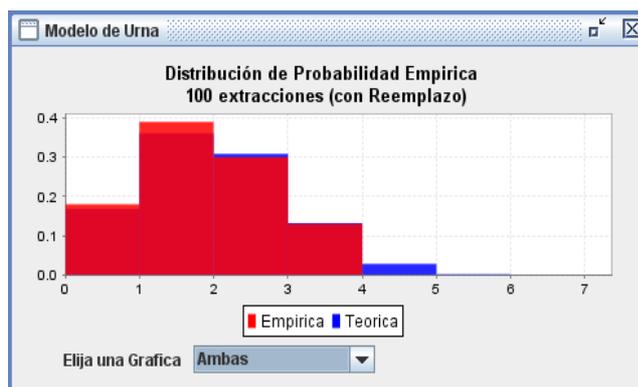
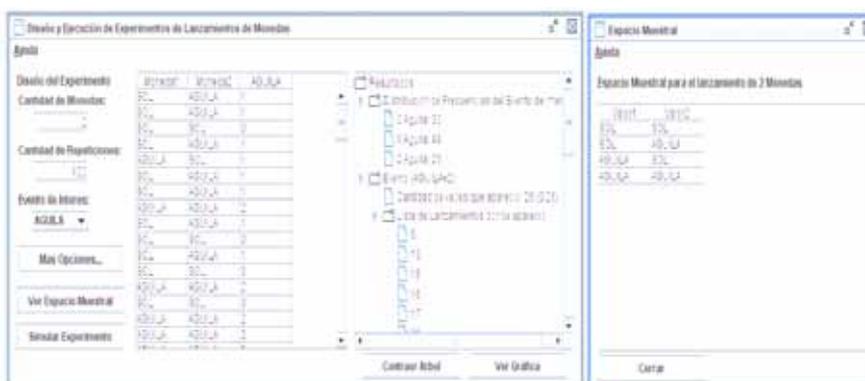


Fig. 5: Comparación de distribución empírica y distribución teórica de probabilidad

### 1. Otras opciones en la ventana de diseño

En el caso de las monedas y los dados, la ventana de diseño del experimento dispone de otras opciones, como desplegar el espacio muestral y definir algún evento de interés del que interese observar su frecuencia. La figura 7, muestra la ventana en la cual se simulan 100 lanzamientos de dos monedas y en la que se define “águila” como evento de interés. El cuadro de resultados muestra la distribución de frecuencias del evento “águila”, la distribución de frecuencias del evento de interés, la frecuencia del evento AA, el cual apareció 26 veces en 100 lanzamientos y el espacio muestral del experimento.



### Prueba piloto del software SIMULAPROB

Con el propósito de verificar la funcionalidad del software, realizamos una primera prueba a nivel de aula, para detectar posibles errores en su diseño y para tener un primer acercamiento sobre la comprensión y razonamiento que desarrollan



los estudiantes cuando lo utilizan. Los sujetos participantes formaban parte de un grupo de 35 estudiantes de nuevo ingreso a la Facultad de Informática (18-19 años) que aún no habían tomado el curso de probabilidad; por lo cual, solo contaban con los antecedentes del bachillerato, en el que han recibido una enseñanza muy ligada al enfoque clásico y uso de técnicas combinatorias para calcular probabilidades.

Se plantearon dos actividades (ver anexo) que requerían utilizar las diversas componentes del software. El profesor (uno de los autores de este artículo) utilizó una computadora con video proyector para guiar a los estudiantes en la primera sesión donde se les instruyó sobre cómo utilizar SimulaProb. El diseño de las actividades contemplaba que los estudiantes primeramente hicieran predicciones sobre los resultados esperados y posteriormente los contrastaran con los resultados de la simulación. A continuación haremos una descripción de las actividades y sus propósitos.

*Actividad 1: Explorando secuencias aleatorias y las frecuencias relativas de un evento.*

El propósito de la actividad ha sido introducir a los estudiantes a la exploración de secuencias aleatorias y revisar los sesgos que muestran en torno a ellas, así como ver el potencial del software para revertirlas. Además nos proponemos una primera introducción al enfoque frecuencial de la probabilidad.

Observamos que en la primera parte de la actividad, la mayoría de los estudiantes mostró una adecuada percepción de la aleatoriedad, al escribir secuencias que son muy probables de ocurrir con un rango de 3 a 7 águilas o soles en una secuencia de lanzamientos. Sin embargo, en la segunda parte de la actividad donde se les cuestionó sobre la probabilidad de diversas secuencias aleatorias, el 74% incurrió en la heurística de representatividad al considerar la segunda opción como más probable de ocurrir, cuando en realidad todas las opciones tienen la misma probabilidad. Después de la simulación muchos estudiantes que contestaron de manera incorrecta modificaron su respuesta. Veamos algunas respuestas:

- *“Mi resultado elegido apareció hasta la simulación 53, por lo tanto la probabilidad es igual para todas las combinaciones”. Martín.*
- *“Mi opción apareció después de 60 intentos, es más probable que aparezcan en desorden”. Laura.*
- *“Apareció después de 17 veces, por lo que se tiene la misma probabilidad de todos los casos”. Máximo.*

Respecto al comportamiento de las frecuencias relativas conforme se incrementa el número de simulaciones se observó lo siguiente:

- *“De acuerdo a como aumentan los lanzamientos, las frecuencias tienden a ser iguales o casi iguales”. Luis Ernesto.*



- *“Cuando aumentan los lanzamientos en la gráfica, se acerca más a 0.50 de probabilidad”. Olga Isabel.*

En resumen, consideramos que este primer encuentro con la aleatoriedad y el enfoque frecuencial de la probabilidad –no obstante que la actividad no se realizó a profundidad-, los estudiantes muestran que han cambiado concepciones equivocadas y que las representaciones del software les han permitido observar algunas propiedades importantes, como es el caso de Olga Isabel que se apoyó en la gráfica de distribución de frecuencias vs. Lanzamientos para emitir su argumentación.

### *Actividad 2: Introducción a los modelos de urna y distribuciones de probabilidad asociadas al muestreo.*

Con esta actividad nos propusimos que los estudiantes pusieran a prueba el modelo de urna del software. Se trata de un problema con contexto de control de calidad que requiere que los estudiantes identifiquen los parámetros en el enunciado del problema y que definan el modelo para simular la extracción de muestras aleatorias. La actividad enfatiza en la identificación de los valores posibles de una variable aleatoria, en el cálculo de probabilidades empíricas y su diferencia con las opciones de reemplazo y no reemplazo.

Los estudiantes en su gran mayoría identificaron que la variable “número de defectuosos” puede tomar valores desde 0 hasta 5. Sin embargo en las predicciones sobre la probabilidad de dichos valores hubo respuestas diversas, lo cual era previsible, dado que algunos valores de la variable tienen probabilidades cercanas entre sí, y no resulta fácil intuir a simple vista cual tiene mayor o menor probabilidad, salvo en el caso del inciso 3 donde es más evidente, puesto que pide señalar cual valor es el menos probable; como el lote tiene un 95% de fusibles no defectuosos resulta poco probable que 5 fusibles sean defectuosos y así lo señalaron prácticamente todos los estudiantes. En el inciso 2 la mayoría de las respuestas se ubicaron en el valor de 0 y 1, siendo correcto el 0. En suma, la mayoría mostró un adecuada intuición probabilística en este problema.

Posteriormente se pidió a los estudiantes comparar la respuesta que habían dado en el inciso anterior con los resultados de la simulación. Algunas respuestas representativas son las siguientes:

- *“Lo que puse arriba parece tener lógica, porque la probabilidad de que salgan 5 defectuosos es casi nula y la probabilidad de que salgan 0 defectuosos es muy probable”. Mario Cesar.*
- *“La gráfica nos indica que hay muchísima probabilidad de que salgan 0 defectuosos, y existe mucha diferencia con el 1 que yo había puesto”. Janeth.*



En resumen, en la presente actividad los estudiantes mostraron buen dominio de los recursos del software para responder las preguntas planteadas. Los estudiantes pudieron contrastar sus intuiciones que escribieron en la primera parte de la actividad, con la evidencia mostrada por las simulaciones. Además observaron la correspondencia entre la distribución teórica y la distribución de frecuencias.

## Conclusiones

El desarrollo de software y otros recursos basados en el uso de computadora para la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad y la estadística, constituyen actualmente un área de interés de muchos profesores e investigadores, sobre todo a partir de recientes recomendaciones curriculares y resultados de investigación que alientan su uso en el salón de clases. En el presente trabajo hemos desarrollado una herramienta de software que permite abordar algunos conceptos de probabilidad desde una perspectiva frecuencial, un enfoque de enseñanza sugerido en los programas de los diferentes niveles educativos de muchos países, pero que frecuentemente es relegado por falta de herramientas de software apropiadas, y sobre todo, que estén al alcance de los profesores.

No obstante que la primera prueba del software no se ha realizado en condiciones más extensas y de mayor rigurosidad en la toma de datos, los resultados preliminares muestran que los estudiantes no tuvieron dificultades para utilizarla. Al contrastar los resultados de la simulación con sus predicciones previas, muchos estudiantes lograron confirmar sus intuiciones y razonamientos cuando fueron correctos, en otros casos tuvieron la oportunidad de corregir sus razonamientos, dada la evidencia proporcionada por la simulación. Creemos que las características de herramienta cognitivas del software, como es el caso de la interactividad, representaciones múltiples y flexibilidad, tuvieron influencia en ello. Sin duda se requiere mayor investigación para conocer el verdadero potencial cognitivo de la herramienta para ayudar a los estudiantes a comprender conceptos de probabilidad.

## Bibliografía

- ASA (2005). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report*. American Statistical Association. USA. Extraído el 10/10/2008 de <http://www.amstat.org/education/gaise/>
- Biehler, R. (1991): *Computers in probability education*” En: R. Kapadia y M. Borovcnik (Eds.). *Chance Encounters: probability in education. A review of research and pedagogical perspectives*, 169-212. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Ben-Zvi, D. (2000): *Toward Understanding the Role of Technological Tools in Statistical Learning*. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(2), 127-155.
- Chance, B. Ben-Zvi, D. Garfield, J. Medina, E. (2007): *The Role of Technology in Improving Student Learning of Statistics*. *Technology Innovations in Statistics Education*: 1(1). Extraído El 12/01/2009 de:  
<http://repositories.cdlib.org/uclastat/cts/tise/vol1/iss1/art2>



- Cobb, G. (1992): *Teaching Statistics*. Em: L. Steen (Ed.). *Heeding the Call for Change: Suggestions for curricular action*, 3-23. MAA Notes 22. Mathematical Association of America.
- Garfield, J. Ben-Zvi, D. (2008): *Using Technology to Improve Students Learning Statistics*. Em: J. B. Garfield y D. Ben-Zvi (Eds.) *Developing Students' Statistical Reasoning*, 91-114. Springer Science+Business Media.
- Godino, J. Batanero, C. Cañizares, J.M (1987): *Azar y probabilidad*. Síntesis, Madrid.
- Finzer, W. Erickson, T., Binker, J. (2002): *Fathom Dynamic Statistics Software*. Key Curriculum Press Technologies.
- Fischbein, E. (1975): *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- Fischbein, E. Gazit, A. (1984) *Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?*. *Educational Studies in Mathematics*, 15(1), 1-24. Kluwer Academic Publishers.
- Hinostroza, J. E. Rehbein, L.E. Mellar, H. Preston, Ch. (2000): *Developing educational software: a professional tool perspective*. Educational and Information Technologies, 5(2), 103-117. Kluwer Academic Publishers
- Inzunsa, S. (2007): *Recursos de Internet para apoyo de la investigación y la educación estadística*. Revista Iberoamericana de Educación, 41(4). Extraído el 13/04/2009 de <http://www.rieoei.org/experiencias142.htm>
- Inzunsa, S. Quintero, J. G. (2007): *The Information and Communication Technologies as Cognitive Tools in the Teaching and Learning of the Probability and Statistics*. Em: F. Tremante, F. Welsch y F. Malpica. (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Education and Information Systems, Technologies and Applications*, 141-146.
- Jonassen, D. H. (1994): *Technology as cognitive tools: learners as designers*. *Department of Instructional Technology*. University of Georgia. Extraído el 20/10/2007 de <http://itech1.coe.uga.edu/itforum/spaper1/paper1.html>
- Konold, C. Miller, C. (2003): *ProbSim Software*. Scientific Reasoning Research Institute University of Massachusetts, Amherst, MA, USA
- MEC (1992): *Diseño Curricular Base para la Educación Secundaria Obligatoria*. Ministerio de Educación y Ciencia. España.
- NCTM (1989): *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA.
- NCTM (2000): *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA.
- Noss, R. Hoyles, C. (1996): *Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Pea, R. (1987): *Cognitive Technologies for Mathematics Education*. En: A. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive Science and Mathematics Education*, 89-122. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Piaget, J. Inhelder, B. (1975): *The origin of the idea of chance in children*. New York.
- Pratt, D. (1998): *Chance-Maker Software*.



SEP (1993): *Educación Secundaria. Matemáticas*. Programas de Estudio. Secretaría de Educación Pública. México.

Shaughnessy, M. Barret, G. Billstein, R. Kranendonk, H. Peck, R. (2004): *Navigating through Probability in Grades 9-12*. National Council of Teachers of Mathematics: Reston VA.

Shaughnessy, M. (1992): *Research in Probability and Statistics: Reflections and Directions*. Em: D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 465-494. New York. Macmillan Publishing Company.

Stohl, H. (2005): *Probability Explorer Software*.

## Anexos

### Actividad 1:

Enrique y Javier juegan a los volados con una moneda. ¿Cómo piensas que deberían ser los resultados de lanzar una moneda 10 veces seguidas? Anota dos posibles resultados sin lanzar ninguna moneda. Escribe A para *águila* y S para *sol*.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Ahora, supongamos que se han lanzado una moneda seis veces consecutivas, ¿Cuál de los siguientes opciones consideras que es más probable de ocurrir?

- a) A A S S S S
- b) A S A S A S
- c) A A A A A A
- d) Todos los resultados anteriores tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Instrucciones:

Abre el programa SIMULA-PROB, simula el lanzamiento de una moneda 6 veces en varias ocasiones y anota los resultados que obtuviste.

--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--

Observa si aparece el resultado que elegiste en el segundo inciso. En caso contrario, repite las simulaciones hasta que aparezca. Escribe tus conclusiones.

Incrementa a 10 repeticiones, expande el árbol de resultados y observa los resultados de moneda 1. Repite varias veces la simulación y observa el rango de variación del evento de interés. Anota tus comentarios sobre los valores consideras que son más probables de ocurrir. Explica.



Construye la gráfica de Frecuencia Relativa versus Repeticiones primero 10, 100, 200, 500 y 1000 lanzamientos respectivamente y compáralas. Además toma nota de las frecuencias relativas de cada evento del árbol expandido en la tabla:

Lanzamientos	Frecuencia de águilas	Frecuencia de soles
10		
100		
200		
500		
1000		

Anota tus conclusiones:

Repite 10 veces el lanzamiento de 20 monedas y anota el numero de rachas (cuando cambia de un resultado a otro) en la siguiente tabla:

Número del experimento	Cantidad de rachas
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Anota tus conclusiones.

### Actividad 2:

Como parte del control de calidad que se realiza en una industria de productos eléctricos, se selecciona una muestra de 5 fusibles eléctricos de toda la producción. De acuerdo a las estadísticas de la empresa se sabe que el 5% de los fusibles producidos tienen algún tipo de defecto. Estimar la probabilidad de que:

- a) Ningún fusible haya resultado defectuoso
- b) Dos fusibles hayan resultado defectuosos
- c) Tres fusibles hayan resultado defectuosos

Para resolver los incisos anteriores considérense por separado las opciones: con reemplazo y sin reemplazo.

Antes de empezar con la simulación:

- ¿Cuáles son los valores que puede tomar la variable NÚMERO DE FUSIBLES DEFECTUOSOS?
- ¿Cuál de los valores que anotaste crees que tenga mayor probabilidad de ocurrir?
- ¿Cuál de los valores que anotaste crees que tenga menor probabilidad de ocurrir?



Después de la simulación:

- Construye la gráfica de la distribución de probabilidad empírica.
- ¿Qué significan los resultados obtenidos en la distribución de probabilidad empírica?
- En la gráfica de la distribución empírica elige la opción AMBAS para que se visualice además la distribución teórica de probabilidad. Observa si ambas distribuciones son similares y anota tus comentarios. Recuerda que simulaste 1000 extracciones de la urna.
- Concentra los resultados obtenidos con ambas opciones (reemplazo y no reemplazo) y trata de explicar porqué son diferentes las probabilidades.

<i>Resultados</i>	<i>Con reemplazo</i>	<i>Sin reemplazo</i>
0 fusibles defectuosos		
2 fusibles defectuosos		
3 fusibles defectuosos		

¿Por qué crees que la probabilidad es tan pequeña para los valores de 2, 3 y 4 fusibles defectuosos en una muestra de 5?

**Inzunsa Santiago.** Nació en Batequitas Badiraguato Sinaloa (México) en 1965. Es Maestro y Doctor en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa. Es profesor e investigador de la Universidad Autónoma de Sinaloa. Pertence al Sistema Nacional de Investigadores. [sinzunza@uas.uasnet.mx](mailto:sinzunza@uas.uasnet.mx)

**Gastélum Diego Alonso.** Nació en Culiacán Sinaloa (México) en 1976. Es Licenciado en Informática y Maestro en Informática Aplicada. Cuenta con certificación en Tecnología LINUX y JAVA. Es profesor de la Universidad Autónoma de Sinaloa. [dchavira@pcc.uasnet.mx](mailto:dchavira@pcc.uasnet.mx)

**Alvarez, Anselmo.** Nació en Juan Aldama Zacatecas (México) en 1957. Es Maestro en Ciencias Computacionales y Candidato a Doctor en Educación. Es profesor de la Universidad Autónoma de Sinaloa. [anselmo@uas.uasnet.mx](mailto:anselmo@uas.uasnet.mx)

**NOTA:** El software SIMULAPROB es completamente libre y puede bajarse de la red del sitio: <http://pcc.uasnet.mx/~dchavira/> . El mismo ha sido producto de una tesis de maestría. Los autores son Diego Gastélum y Santiago Inzunsa.