

## Los desarrollos hipermedia y el aprendizaje de la resta

*Ricardo López Fernández; Ana B. Sánchez García*

---

### Resumen

Los resultados de la investigación que presentamos demuestran que la influencia de los desarrollos hipermedia sobre el conocimiento formal y procedimental en el proceso de aprendizaje algorítmico son decisivos y favorecedores del mismo. Específicamente hemos estudiado este hecho en el algoritmo de la sustracción. A través de los datos que presentamos podemos concluir que la instrucción apoyada en una metodología didáctica con apoyo hipermedial actúa sobre el dominio conceptual que sustenta el aprendizaje del algoritmo. Del mismo modo, los resultados han permitido comprobar la inestabilidad del error y su transformación en otras tipologías,

### Abstract

The results of the investigation that we present demonstrate that the influence of the developments hipermedia on the formal and procedural knowledge in the process of learning algorithmic is decisive. Specifically we have studied this fact in the algorithm of the subtraction. Through the data that we present we can conclude that the instruction supported in a didactic methodology with support hipermedial would have acted on the conceptual domain that sustains the learning of the subtractions. In the same way, the results have allowed to check the uncertainty of the error and their transformation in other errors.

### Resumo

Os resultados da pesquisa que apresentamos demonstram que a influência dos desenvolvimentos hipermédia sobre o conhecimento formal e procedimental no processo da aprendizagem algorítmica são decisivos e favorecedores do mesmo. Especificamente estudamos este fato no algoritmo da subtração. Através dos dados que apresentamos podemos concluir que a instrução apoiada numa metodologia didática com apoio hipermedial atua sobre o domínio conceitual que sustenta a aprendizagem do algoritmo. Do mesmo modo, os resultados permitiram comprovar a instabilidade do erro e sua transformação em outras tipologias.

## 1.- Introducción

La metodología didáctica que utiliza el ordenador como apoyo a la enseñanza surge de la fusión entre los postulados teóricos de la ciencia cognitiva y la tecnología de la información, de esta fusión han nacido distintos modelos de indiscutible

aplicación al diagnóstico y tratamiento de las dificultades en el área de las matemáticas. Durante las últimas décadas, la existencia de investigaciones relacionadas con el aprendizaje humano y los procesos de adquisición del conocimiento, han influido de manera evidente en la utilización de estos sistemas aplicados a la enseñanza (VanLehn, 1983a).

De estas investigaciones surgen teorías generales de adquisición del conocimiento (Anderson, 1983; Holland, Holyoak, Nisbett y Thagard, 1986, Newell, 1990; Ohlsson, 1993; VanLehn, 1983b; VanLehn, Ohlsson, y Nason, 1994), que inciden en el uso de estas metodologías. Posiblemente una de las mejores aportaciones, en este sentido, sea el desarrollo de simuladores que representan los procesos de aprendizaje que ha de llevar a cabo un estudiante con el fin de asegurar la consecución de un contenido determinado. La sustracción como modelo cognitivo procesal, se ha convertido en plataforma única, que ha contribuido al diseño y generación de sistemas informatizados aplicados a distintos ámbitos de la adquisición del conocimiento matemático.

Así, el papel de los desarrollos hipermedia cada día está siendo más decisivo, no sólo por su valor instrumental, sino porque emulan los mecanismos de procesamiento de la información que operan en nuestro pensamiento y han creado un "Standard" metodológico que, entre otras cosas, nos ha familiarizado con dichos mecanismos (López, 1999). Ello, ha permitido que avancemos, en un proceso que continuamente se retroalimenta, en la comprensión de nuestros propios procesos cognitivos (Rabinowitz, 1988; López, 2002, 2005; López y Sánchez 2006; Sánchez, 2005). Así pues, el entorno del ordenador, propiamente estructurado, puede proporcionar una herramienta, poderosa y motivadora, que permite dirigir la atención del estudiante directamente hacia sus propios procesos de pensamiento matemático (Collins y Brown, 1988).

La representación del pensamiento matemático que propician estos sistemas hipermediales es una componente esencial en el procesamiento cognitivo que acompaña y determina el aprendizaje algorítmico. Así mismo, los procesos de pensamiento que soportan este tipo de aprendizaje, se desarrollan a través de una interacción continua entre la representación externa – símbolos, lenguaje natural, representaciones gráficas, interfaces específicas con ordenador, objetos físicos...etc.- y los procesos mentales internos.

Es decir, la interacción entre el modelo y sistema de comunicación y los modelos y sistemas que median en el procesamiento de la información necesaria para realizar el cálculo algorítmico. En el desarrollo de la evolución del software aplicado a la educación matemática, las décadas de los años setenta y ochenta, bajo el influjo general del amplio desarrollo de las teorías cognitivas se caracterizaron por la innovación superadora de las antiguas aplicaciones de Enseñanza asistida por Ordenador.

En particular, y también en dicha década, se generaron múltiples desarrollos en ámbitos como los juegos de contenido y los simuladores. Todos ellos sentaron las bases para la producción de herramientas de cálculo simbólico avanzados como

Matemática (Wolfram, 1994), generadores del Micromundos como Cabri (Laborde, 1991), o simuladores de procesos y sistemas integrados de desarrollos de unidades didácticas en formato hipermedia.

Los simuladores de procesos matemáticos y de cálculo simbólico, se desarrollaron extraordinariamente en dichas décadas, siendo herederos de las investigaciones y desarrollos de los años precedentes y prolegómenos de las aplicaciones matemáticas más importante de los años noventa.

El desarrollo de la tecnología hipermedia a partir de los años noventa, ha supuesto la integración en una misma aplicación de los modelos precedentes (juegos, simulaciones,...etc). Por cuanto, la tecnología hipermedia, síntesis de los desarrollos multimedia con la tecnología hipertextual, permite generar desarrollos caracterizados por su capacidad de integración de múltiples formatos de representación, del conocimiento-lenguaje formal simbólico, icónico, ecónico...etc, constituye una tecnología básica y eficiente para implantar desarrollos orientados a la simulación de procesos.

Esta síntesis de funciones instrumentales opera en la medida en que los sistemas hipermedia, permiten el desarrollo integral de todas esas herramientas y usos. Por ello, los sistemas hipermedia constituyen una plataforma-soporte, como hasta ahora no habíamos tenido, esencial para desarrollar juegos instructivos en cualesquiera de las modalidades que se nos puedan ocurrir, por supuesto, para generar todo tipo de simulaciones con una potencia desconocida hasta esta década, también para implementar aplicaciones para el trabajo y la investigación en los campos de mayor especialización de la matemática, para recrear modelos y estilos cognitivos altamente eficientes y, por último, para posibilitar un trabajo de autoría sobre lenguajes y aplicaciones que, desde la perspectiva de los procesos de aprendizaje, son altamente significativas.

Desde la perspectiva de las teorías del procesamiento de la información y el aprendizaje, la capacidad multi-representacional de los soportes hipermedia, favorece la codificación, la elaboración y la organización del conocimiento. Con ello, la capacidad de almacenamiento, la eficiencia de su recuperación y la minimización de las interferencias, el decaimiento y el olvido en el proceso de aprendizaje.

Como anteriormente decíamos, varias características funcionales de los sistemas hipermedia, lo convierten en un soporte especialmente eficiente para desarrollar procesos de simulación en matemáticas.

En primer lugar una característica general, en cuanto a su capacidad para representar dinámicamente y en interacción con el usuario procesos de representación.

No obstante, esta capacidad en si misma, útil para los procesos de enseñanza de las ciencias en general, en el caso de los procesos de simulación en matemática debe venir acompañada de la capacidad para desarrollar, diversos sistemas de

representación del conocimiento y específicamente, sistemas de representación formal-simbólica-notacional.

En este dominio de la representación, y a partir de la formalización modelizada establecida por Golding y Kaput, modelo citado por Kaput (1992), estamos en condiciones de abundar en las argumentaciones sobre la capacidad multi-representacional del soporte hipermedia y su influencia en el procesamiento de la información matemática en general y en los procesos de simulación en particular.

En efecto, el soporte hipermedia permite la representación integrada en los tres sistemas dimensionales establecidos en el modelo de Goldin-Kaput. En algunos de ellos, el sistema de representación soportado en formato multimedia amplía el rango de posibilidades que otros formatos presentaban. En particular, la integración de medios de representación que desarrolla cualquier aplicación multimedia, permite que los nodos de la estructura, soporten conocimiento representado en forma simbólico-notacional, diferentes formas y modelizaciones -, oral - escrita y cualquier representación figurativa del tipo que hemos llamado "imagería".

Esta multi-representación es, hasta el momento, la más completa que en la historia de los formatos y soportes instructivos, hayamos creado. Diferenciándose en los sistemas de representación de las posibilidades ofertadas y desarrolladas en otros medios como el libro, el diaporama, la televisión ó las aplicaciones informáticas de generaciones previas a los desarrollos multimedia. Los nodos que creamos con cualquiera de las aplicaciones multimedia, nos permiten desarrollar todas las funciones de los distintos sistemas de representación del conocimiento matemático

Otras posibilidades para el desarrollo de este tipo de funciones, por parte del sistema, se pueden establecer a partir de otras de las características del hipermedia, como es su capacidad dinámico - interactiva. Los sistemas hipermedia permiten por su disponibilidad, flexibilidad y capacidad dinámica interactiva, adoptar múltiples sistemas notacionales y representacionales enlazados y en interacción continua con el usuario. Aportan, con ello, la integración cognitiva de los conceptos matemáticos, Factor esencial en los procesos eficientes de enseñanza/aprendizaje.

Por todo ello, podemos indicar que los formatos hipermedia, superan las limitaciones representacionales y notacionales que los soportes estáticos de información matemática tienen- clase magistral, libros, manuales- . En los soportes y medios estáticos, los objetos notacionales no pueden cambiar en función del tiempo, por el contrario en los sistemas hipermedia-dinámicos pueden hacerlo.

Otra característica de los sistemas hipermedia es la dinamicidad basada en la capacidad de interacción con el usuario. Para los procesos de simulación dicha característica también resulta esencial.

Los medios interactivos son sistemas creados para dar respuestas y/o contribuciones físicas desde el sistema notacional instalado en el medio. En otras palabras, en los sistemas inertes el usuario solo puede responder a lo que

directamente ha producido. Cualquier otro tipo de respuesta externa debe de aportarla un profesor, o agente externo.

Por el contrario en los sistemas interactivos, el propio sistema notacional responde a las acciones ejecutadas por el usuario, ofreciendo la posibilidad de contestación interactiva. Este mecanismo de “inputs-outputs” que retroalimentan, permanentemente al sistema representacional y notacional en un ciclo, en donde los “outputs” generan nuevos “inputs” y éstos, nuevos “outputs”, constituye la característica esencial de la interactividad.

En el campo de la sustracción, y de los simuladores de errores algorítmicos, la finalidad de estos sistemas se ha centrado en el diagnóstico, catalogación y tratamiento educativo de los errores que cometen los niños durante el aprendizaje. Podemos decir, que no sólo algunos de ellos, representan el proceso matemático sino que rastrean las acciones llevadas a cabo durante la tarea, para que el conjunto de pasos seguidos pueda volverse objeto de estudio y puedan especificarse habilidades necesarias para poder resolver el proceso.

Esta característica, en definitiva, constituiría una de las aportaciones más sobresalientes a nivel pedagógico, puesto que el entorno del ordenador, propiamente estructurado, puede proporcionar una herramienta, poderosa, motivadora, y aún sin explotar que enfoque la atención del estudiante directamente en sus propios procesos del pensamiento matemático, (Collins y Brown, 1988). Del mismo modo, estos sistemas ayudan a centrar la atención del docente, en esos procesos de aprendizaje netamente abstractos que configuran el conocimiento matemático, ayudándole a comprender los pasos seguidos por el alumno en la formulación del error algorítmico. Son pues, estos sistemas que podemos denominar modelos procesales, los que tratarían de representar el conocimiento a través de una red de procesos y subprocesos, en base a un conjunto de reglas o acciones relacionados con ellos.

El conocimiento en el que inciden de manera directa, es el conocimiento que versa sobre los procesos que dirigen y secuencian la realización de determinadas tareas. El objetivo más inmediato de los mismos es lograr un nivel de descripción, que permita asociar la actuación del aprendiz directamente con los componentes individuales de la red procesal. Autores como (Dillenbourg y Self, 1992), afirman que el elemento que conforma y representa a estos modelos, es fundamentalmente que sus componentes no son independientes; sino que están relacionados los unos con los otros. Este arquetipo, es el que se ha encargado más eficientemente de los errores en tareas matemáticas; ya que tiene capacidades de diagnóstico muy importantes. Un sistema pionero basado en este modelo es BUGGY, diseñado por Brown y Burton (1978), se configura alrededor de la red procesal del algoritmo de la resta. “Buggy”, constituye un referente esencial en la literatura científica sobre la cuestión.

El sistema, intentaba identificar y tratar los distintos “bugs<sup>1</sup>” o errores producidos en el algoritmo de la resta. Los errores, se basaban en un modelo mental avalado por una teoría psicológica.

A partir de este primer estudio, comienzan numerosas investigaciones que tratan de abordar los errores en distintas habilidades cognitivas. Se realiza una amplia investigación sobre los tipos de errores, y se categorizan en catálogos o librerías que se incorporan a los programas informatizados, como reglas de producción específicas del sistema, que dirigen las interacciones entre el estudiante y el tutor.

El trabajo de VanLehn (1990), extiende esta concepción de “Buggy”, y analiza cómo se generan estos errores. Para este autor, los “bugs” son el resultado infructuoso de intentar extender las reglas algorítmicas existentes y aplicarlas a nuevas situaciones, y esta acción conformaría lo que el denomina “repairs”, o reparaciones que constituyen cada una de ellas un “bug” diferente. Las reparaciones pueden programarse y pueden predecirse. Esta premisa se convierte en el núcleo central de su teoría llamada “Impasse-Driven Learning” o “Repair Teoría” (Brown y VanLehn, 1980; Brown y VanLehn, 1982; VanLehn, 1983b; 1990) que es aplicada para pronosticar los “bugs” de los estudiantes en la solución de restas multicolumna. Entre otros logros, la teoría de la Reparación predijo la ocurrencia de ciertos modelos inestabilidades o “migraciones del bug” a corto plazo. Estas inestabilidades, fueron encontradas por VanLehn en 1982. Con el objetivo de establecer una librería de bugs, el autor, diseñó un sistema informatizado denominado SIERRA. El objetivo básico que persigue esta implementación informática en su investigación, es desarrollar rigurosamente la teoría que soporte el proceso de aprendizaje, aprovechándose del poder del modelo informatizado. En nuestro trabajo hemos utilizado la tipología de “bugs” establecida por este autor, a través del sistema informatizado SIERRA.

Otros autores importantes en cuanto al diseño de teorías psicopedagógicas, relacionadas con la adquisición del error algorítmico, que utilizan sistemas informatizados son Young y O’Shea (1981), con el sistema PS, (Sistema de Producción de Errores en la Sustracción), Ohlson y Langley con su sistema DPF (Diagnostic Path Finder, de 1988).

## 2.- Objetivos y metodología de la investigación

El objetivo esencial de la fase de investigación, fue comprobar si los errores disminuyen cuando el aprendizaje del algoritmo se complementa con desarrollos hipermedia.

---

<sup>1</sup> **Bugs, buggy procedures-Buggy algorithms:** Términos utilizados para denominar los errores producidos en los algoritmos, tomados del lenguaje de programación informática, donde un proceso erróneo es un proceso correcto con una o más pequeñas perturbaciones, o agujeros, instalados en él, (Brown and Burton 1978, Burton 1982, VanLehn 1982).

## 2.1. Participantes

Un total de 18 niños que eran la totalidad de niños escolarizados en un C.R.A. (Colegio Rural Agrupado), situado en zona de montaña con creciente despoblación en la provincia de Salamanca. Fueron testeados a principios de curso con la prueba de las 20 restas de VanLehn 1990, con el objetivo de comprobar los errores que cometían y categorizarlos según la librería de bugs establecida por VanLehn en 1990. A nueve de los 18 niños, el total de escolarizados en los cursos 2º, 3º y 4º se les pasó un postest practicado a finales del mismo curso, para comprobar la tipología del error cuando el aprendizaje se produce en el aula también con el apoyo del ordenador. Durante todo el curso estos niños habían trabajado con programas hipermedia como complemento de la enseñanza tradicional. Utilizamos programas como “Adibu y Quince por Quince”, ampliamente conocidos en el contexto escolar. El tiempo dedicado al trabajo con estos programas en el ámbito del cálculo algorítmico fue de una hora a la semana.

## 2.2. Material y procedimiento

Prueba de las 20 restas. Los niños resolvieron en el aula sin límite de tiempo, 20 sustracciones, usadas por VanLehn (1990:170), que constituyeron para el autor uno de los instrumentos básicos de identificación de una gran variedad de errores. La fiabilidad y validez de la misma viene avalada por la investigación realizada por el autor, que constituye una referencia de orden mundial en el campo de estudio de los errores en la sustracción y que fundamentó su teoría “Repair Theory”. El tiempo previsto para la realización de ambas pruebas era ilimitado.

Las pruebas se pasaron durante la primera quincena del mes de diciembre para el pretest, y la última quincena del mes de junio del curso académico 2004 para el postest.

## 3.- Resultados

Con el objeto de establecer conclusiones relacionamos las medias del total errores del pretest con las del postest. En la tabla nº 1 informamos sobre los resultados

Variables dependientes	$\bar{X}$ Pre.	$\bar{X}$ Post.	t	p
Total errores en 20 restas	9,11	5	4,11*	0,018*

**Tabla 1.** Prueba t, para muestras relacionadas (pre-post errores en restas). \* n.s.=0,05

Del análisis de la tabla anterior observamos la existencia de diferencia significativa (ns=0,05) entre las medias de errores totales en las 20 restas.

Evidentemente, en el postest, se han reducido significativamente los errores encontrados en el grupo. Afirmamos, por tanto, que los errores disminuyeron durante

el proceso de enseñanza. Proceso que, fue complementado con una metodología didáctica que integró desarrollos informáticos e hipermedia en el aprendizaje del algoritmo. No podemos establecer conclusiones definitivas, aunque sí creemos que las investigaciones de autores como Brown y Burton (1978), VanLehn (1990), Spicer (2000), relacionadas con este tema, caminan en la dirección teórica que evidencia la influencia positiva en el aprendizaje del algoritmo y en el descenso de los errores cuando el proceso de enseñanza/aprendizaje se basa en mediadores tecnológicos como los programas informáticos para el entrenamiento algorítmico.

Para dar un paso más analizamos qué errores se mantuvieron durante el proceso y las características más destacadas de los resultados de dicho proceso. En la tabla nº 2, que presentamos a continuación, plasmamos por cada una de las restas, las categorías de errores en el pretest y las categorías de errores en el postest.<sup>2</sup>

Restas	Pre Categ. Errores*	Post. Categ. Errores*		
		Desaparecen	Nuevos	Transformación
<b>R1</b> (647-45)				
<b>R2</b> (885-205)				
<b>R3</b> (83-44)	93	Desaparecen todos	39	
<b>R4</b> (8305-3)				
<b>R5</b> (50-23)	64, 36, 65, 93	64,36		65, 93 → 29 en (n=1)
<b>R6</b> (562-3)	93	93		93,79 → 79 en (n=1)
<b>R7</b> (742-136)	9, 93, 1	9,93,1		
<b>R8</b> (106-70)	64,36,55,93	Desaparecen todos		
<b>R9</b> (716-598)	32,39,93,33	32,39		93→33/33→38
<b>R10</b> (1564-887)	122,93,44,99	122,93,44,99	39	
<b>R11</b> (6591-2697)	5,39,27,93,33,29, 45,93	Desaparecen todos		29→5/ 45→5/ 5→45
<b>R12</b> (311-214)	5, 93, 45093 <sup>3</sup>			5→39/ 93→44/45093→5
<b>R13</b> (1813-215)	5, 5093			5093→5
<b>R14</b> (102-39)	64,39, 64093,20,65093			64093→79/ 20→40/
<b>R15</b> (9007-6880)	64, 40, 65093, 20,4			40→28/ 65093→36/ 36→40.
<b>R16</b> (4015-607)	64068, 39068, 93068	Desaparecen todos		

<sup>2</sup> Los diferentes errores aparecen con su nombre original en inglés. Existe un consenso general en la utilización de la nomenclatura anglosajona para la descripción de los errores o bugs. Para categorizar los errores cometidos por los alumnos, tomamos como referente el glosario de errores "(bugs)" definidos por VanLehn (1990:223). Asignamos un número del 1 al 120, para cada uno de los errores y agregamos el nº 121 (subcategoría no diagnosticable) y el nº 122 (error de cómputo). Para el estudio de las categorías, utilizamos el programa estadístico SPSS 11.5., al que recurrimos para el análisis cuantitativo de las frecuencias y tipificación de los errores. En total, analizamos 122 errores distintos.

<sup>3</sup> Para describir claramente las categorías de errores combinados y poderlos analizar en el programa SPSS 11.5., optamos por incluir un 0 que separar los errores. Ejemplo 45093 es un error combinado producido en la misma resta en la que el niño comete los errores 45 y el 93.

Restas	Pre Categ. Errores*	Post. Categ. Errores*		
		Desaparecen	Nuevos	Transformación
<b>R17</b> (702-108)	20, 75, 93,			75 →20
<b>R18</b> (2006-42)	74, 64, 101, 20, 69, 93			64074→28/64093→40 / 64093→74
<b>R19</b> (10012-214)	64,5,74,93,7	Desaparecen todos		
<b>R20</b> (8001-43)	29,64,39,74			29064→76/ 39074→28/ 20074→20

**Tabla 2.** Errores y su transformación en Pret. y Post. Categorías de errores especificados y descritos en el anexo nº 1, según nomenclatura y ejemplos tomados de VanLehn, (1990).

## 4.- Conclusiones

De la observación de las tablas anteriores establecemos las siguientes conclusiones:

La mayor parte de los errores que se mantienen se transforman en otras categorías. De estas categorías destacamos las siguientes: 5, 79, 40, 20, 28, 29 (ver descripción de errores en anexo I). A nivel general, apreciamos la desaparición de errores como el 93 (smaller-from-larger) en cuya naturaleza autores como Resnick y Omanson (1987), López y Sánchez (2007), señalan como decisiva la falta de comprensión del dominio conceptual que preside el algoritmo. Por tanto, este error es clasificado como un error de origen semántico. Es decir, la instrucción que se sirve de una metodología con apoyo hipermedial habría actuado sobre el dominio conceptual que sustenta el aprendizaje de las restas; aunque los alumnos-as aún no han aprehendido o capturado la estructura procesal; puesto que los errores que producen tras la transformación de estos primeros denotan que siguen teniendo problemas cuando el cero está en el minuendo y requiere pedir prestado, y manifiestan las siguientes conductas:

- No hacen decremento en un número que está encima de un espacio en blanco.
- Omiten el decremento, a menos que la columna que ha de ser decrementada sea la columna situada más a la izquierda del problema.
- Piden prestado al sustraendo en lugar de al minuendo.
- Al pedir prestado de uno o más ceros, cambian todos los ceros a nueve, pero no hacen decremento alguno en el dígito que no lleva 0.
- Al pedir prestado a un cero, salta a la columna situada a la izquierda del mismo.

Por tanto, aunque la base conceptual del algoritmo ha sido reforzada, los errores iniciales se convierten en errores cuya base está sustentada en la regla del préstamo, fundamentalmente cuando hay un cero que es indicador de valor posicional en el minuendo. En relación a la transformación de unos errores en otros, no podemos concluir este apartado sin introducir la connotación del error como

“inestable”, VanLehn (1990). Para este autor los errores humanos en el algoritmo de la resta, no son estables como lo son los errores en la programación de ordenador. Por el contrario, son inestables. Así, los niños evolucionan desde la adquisición a la eliminación de determinados bugs, o el cambio por otros. A este fenómeno lo denomina “emigración del bug”. La explicación teórica a esta conducta inestable es que el estudiante tiene un procedimiento subyacente estable; pero el procedimiento está incompleto de tal manera que el estudiante comete errores en función de sus experiencias anteriores. En este caso, la tipología del error básicamente está influenciada por la inadecuada enseñanza de la regla del préstamo y el concepto del cero como indicador de valor posicional.

De este modo, apreciamos en nuestro estudio el fenómeno de la emigración del error (Tabla 2), comprobado con anterioridad por VanLehn (1990). Aunque nuestra observación se efectúa en un contexto situacional de enseñanza aprendizaje, obviamente distinto.

En general, de los resultados expuestos en este artículo podemos concluir que el grupo de niños que había sido instruido en el algoritmo de la resta con ayuda de software comercial hipermedia, había obtenido mejores resultados en el postest. No tratamos de generalizar, las conclusiones de este estudio; pues era un estudio reducido de casos. No obstante estos incipientes resultados, nos permiten situarnos en la línea de autores que han investigado esta temática, como Anderson (1988); Brown y Burton (1982); Carbonell (1970); Langley y Ohlsson (1984); López (1999); Martín y VanLehn (1995) y otros muchos, que refrendan la utilización del ordenador como complemento al diagnóstico y tratamiento de los errores aritméticos.

## Anexo 1. Descripción de los errores<sup>4</sup>. Tabla 2.

Categoría	Nombre	Descripción	Ejemplo
93	Smaller-from-larger	El estudiante no roba, pero sustrae el dígito más pequeño del más grande en cada columna	81-38=57
39	Borrow-no-decrement	Al pedir prestado, el estudiante agrega diez correctamente, pero no cambia ninguna columna a la izquierda.	62-44=28
64	Diff-0-N =0	Cuando el estudiante encuentra una columna 0-N del formulario, ella no pide prestado pero en cambio escribe el cero como la respuesta de la columna.	40-21=20
36	Borrow-from-zero-is-ten	Al pedir prestado por el cero, el estudiante cambia el cero a diez y no hace el decremento en el dígito a la izquierda.	604-235=479
65	Diff-0-N=N	Cuando el estudiante encuentra una columna 0-N del formulario, él no pide prestado pero en cambio escribe a N como la respuesta.	80-27=67
29	Borrow-from-bottom	El estudiante pide prestado del sustraendo en lugar de la fila del minuendo.	87 - 28= 79
79	Forget-borrow-over-blanks	El estudiante no hace el decremento en un número que está encima de un espacio en blanco.	347-9=348
9	Add-instead-of-sub	El estudiante añade en lugar de sustraer.	32-15=47

<sup>4</sup> Ordenados por orden de aparición en la tabla nº 2.

Categoría	Nombre	Descripción	Ejemplo
1	0-n=0-after borrow	Cuando una columna tiene un uno que se cambió a ceros por un préstamo anterior, el estudiante escribe el cero como la respuesta a esa columna.	914- 486=508 906- 484=422
55	Decrement-all-on-multiple-zero	Al pedir prestado a lo largo de los ceros, y el préstamo se causa por un cero, el estudiante cambia el cero correcto a nueve en lugar de diez.	600- 142=457
32	Borrow-from-one-is-nine	Cuando pide prestado de un uno, el estudiante lo cambia a un nueve en lugar de un cero.	316- 139=267
33	Borrow-from-one-is-ten	Al pedir prestado de un uno, el estudiante cambia el uno a diez en lugar de a cero.	414- 277=237
38	Borrow-into-one=ten	Cuando un préstamo se causa en una columna del formulario 1-N, el estudiante cambia el uno a un diez en lugar de agregar diez a él.	71-38=32
122	Only-do-first & last-columns	Se hacen las primero y últimas columnas del problema correctamente, pero se omiten otras columnas.	345-111=2 4
44	Borrow-only-once	El estudiante hace los primeros robos correctamente en un problema. Después el estudiante sólo hace la adición de diez y omite el decremento	535- 278=357
99	Smaller-from-larger-with-borrow	Al pedir prestado, estudiante substraen el dígito menor correctamente del más grande como si no hubiera pedido prestado en absoluto.	73-24=41
5	1-1=0-after-borrow	Si una columna tiene un 1 en el minuendo y en el sustraendo y se le pide prestado, el estudiante escribe el cero como la respuesta a esa columna.	812- 518=304
27	Borrow-don't-decrement-unless-bottm-smaller	El estudiante no hace el decremento en una columna si $T \leq B$ .	732 -484= 258
45	Borrow-skip-equal.	Cuando decremnta, el estudiante salta las columnas en que el dígito de la cima y el dedo del fondo es el mismo.	923- 427=406
79	Forget-borrow-over-blanks	El estudiante no hace el decremento en un número que está encima de un espacio en blanco.	347-9=348
20	Borrow-across-zero	Al pedir prestado a un cero, el estudiante salta encima del cero para pedir prestado de la próxima columna. Si esto le exige que pida prestado dos veces, ella los decremmenta el mismo número ambas veces.	904-7= 807
40	Borrow-no-decremnt-except-last	El estudiante omite el decremento a menos que la columna que ha de ser decremmentada sea la columna más a la izquierda en el problema.	6262- 4444=1828
4	0-N=N-except-after-borrow	El estudiante piensa que 0-N es N excepto cuando a la columna se le ha pedido prestado.	906- 484=582
28	Borrow-from-all-zero	Al pedir prestado por uno o más ceros, el estudiante cambia todos los ceros a nueve, pero no hace el decremento del dígito que no lleva 0 en el minuendo apropiadamente.	3006- 1807=2199
68	Dif-N-0=0	El estudiante piensa que N-0 es 0.	57-20=30
75	Don't decrement-zero-over-zero	El estudiante no pide prestado por un cero que está encima de un ceros.	305- 107=208

Categoría	Nombre	Descripción	Ejemplo
74	Don't decrement-zero-over-blank	El estudiante no pide prestado por un cero que está encima de un espacio en blanco.	305-9=306
101	Stops-borrow-at-second-zero.	Al pedir prestado por varios ceros, el estudiante cambia los ceros situados más a la derecha por nueve, pero no cambia otras columnas a la izquierda.	4004-9=4095
7	Add-borrow-decrement	En lugar de restar, el estudiante añade uno, llevándose en la próxima columna si necesario	863-134=749 893-104=809
76	Don't-decrement-zero-until-bottom-blank.	Al pedir prestado por un ceros, el estudiante cambia el cero a un diez en lugar de un nueve a menos que el cero está encima de un espacio en blanco en que el caso él hace la cosa correcta.	506 - 318=198

## Bibliografía

- Anderson, J. (1983): *The architecture of cognition*, Harvard University Press: Cambridge, Massachusetts -EE.UU.
- Anderson, J. (1988): The Expert Module (Capítulo II). In: Martha C. Polson and J. Jeffrey Richardson. Lea (eds.) *Foundations of Intelligent Tutoring Systems*, Hove & London.
- Brown, J.; Burton, R.(1978):"Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills". *Cognitive Science*, 2, 155-192.
- Brown, J. ; VanLehn, K. (1982): "Towards a generative theory of "bugs"". In T. Carpenter, J. Moser; T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, (pp. 117-135). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Brown, J.; VanLehn , K. (1980): "Repair Theory: A Generative Theory of bugs in Procedural Skills". *Cognitive Science*, 4, 379-426.
- Burton, R. (1982): "Diagnosing bugs in a simple procedural skill". In D. H. Sleeman, y J. S. Brown (Eds.) *Intelligent Tutoring Systems*, (227-240), New York: Academic Press.
- Carbonell, T.(1980): "Cognitive development and mathematics learning", In R. Shaumway (comp.), *Research in Mathematics Education*. Reston, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics.
- Collins, A. y Brown, J. (1988): "The computer as a Tool for Learning Through Reflection". In H. Mandl & A. Lesgold (Eds.), *Learning Issues for intelligent tutoring system* (pp. 1-18).New York: Springer-Verlag.
- Dillenbourg P., Self J. (1992): A framework for learner modeling. Technical report AAI/AI-ED 74, Departament of Computing, Lancaster University.
- Holland, L.; Holyoak, K.; Nisbett, R. y Thagard, P. (1986): *Induccion: Processes of inference, learning and discovery*. Cambridge: MA: MIT Press.
- Laborde, J-M. (1991): *CABRI Geometry*. New York: Brooks-Cole.
- Langley, P.; Ohlsson, S. (1984). Automated cognitive modeling. *Proceedings of the Fourth national Conference of the American Association for Artificial Intelligence* (pp. 193-197). Austin, TX: Morgan Kaufmann.

- López, R. (1999): *Desarrollos curriculares de la ciencia de computadores en la enseñanza elemental*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Salamanca, Facultad de Educación, Salamanca. España.
- López, R. (2002). “La resolución de problemas y los soportes hipermedia”. *Aula*, revista de enseñanza e innovación educativa, 14, 93-107.
- López, R. (2005): “Motivation, Hypermedia Systems and e-learning”. In F.J. Garcia, M. López, R. López and E. Verdú (editors), *Educational Virtual Spaces in Practice*. The Odiseame Approach (pp. 91-105). Ariel, Barcelona.
- López, R., Sánchez, A.B. (2006): “Criteria and Prescriptions in the Design of Hypermedia for E-Learning Programs”. En Verdú, E.; Verdú M. J., García, J., and López, R. (2006): *Best Practices in E-learning: Towards a Technology-based and Quality Education* (pp. 9-25). Ediciones Boecillo Multimedia S.A, Valladolid.
- López Fernández, R., Sánchez García, A.B. (2006): “Adquisición del error en la sustracción en Educación Primaria”. *Proceedings of International Symposium on Early Mathematics*. Publisher by Department of Psychology. University of Cadiz. Research Group HUM-634, Cadiz, 249- 261.
- López, R.; Sánchez, A.B. (2007): “Estudio de los componentes generadores de errores algorítmicos”. Caso particular de la sustracción. En *Revista de Educación INCESE*, 344, pp. 377-402
- López, R.; Sánchez, A. B. (en prensa). “Análisis de los errores sistemáticos en la sustracción “. En *Enseñanza de las Ciencias, Revista de investigación y experiencias Didácticas*. Institut de Ciències de l’Educació, Universitat Autònoma de Barcelona.
- Martin, J.; VanLehn, K. (1995): “Student assessment using Bayesian nets”. *Human- Computer Studies*, 42, 575-591.
- Newell, A. (1990): *Unified Theories of Cognition*. Cambridge, MA: Harvard.
- Ohlsson, S.; Langley P. (1988): “Psychological evaluation of path hypotheses in cognitive diagnosis”. In H. Mandl & A. Lesgold (Eds.), *Learning sigues for intelligent tutoring system* (pp. 42-62).New York: Springer-Verlag.
- Kaput, J. J. (1992): “Technology and Mathematics Education”. En Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 515-556). New York: Macmillan.
- Rabinowitz, M. (1988) (Ed.): “Computer simulations as research tools”. *International Journal of Educational Research*, 12(1), 1-102.
- Resnick, L.; Omanson, S. (1987): “Learning to understand arithmetic”. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology*, 3, 41-95. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Sánchez, A. B. (2005): *Componentes Cognitivo contextuales en la generación de los errores algorítmicos “Bugs” y su tratamiento con desarrollos hipermedia*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Salamanca, Facultad de Educación, Salamanca. España.
- Sánchez, A. B (2006.): “Aportaciones educativas de los Modelos informatizados de diagnóstico cognitivo en el algoritmo de la sustracción”. *Revista electrónica de Teoría de la Educación: Educación y Cultura en la sociedad de la información*. En <http://www3.usal.es/>.
- Spicer, J. (2000): Virtual Manipulative: A New Tool for Hands-on Math. ENC Focus 7 (4) p. 14. Extraído en junio de 2004 de

[Http://www.enc.org/features/focus/archive/equity/document.shtm?input=FOC-001754-index](http://www.enc.org/features/focus/archive/equity/document.shtm?input=FOC-001754-index)

- VanLehn, K. (1982): "Bugs are not enough: Empirical studies of bugs, impasses and repairs in procedural skills". *Journal of Mathematical Behaviour*, 3, 3-71.
- VanLehn, K. (1983a): Felicity conditions for human skill acquisition: Validating an AI-based Theory (Tech. Rep. No. CIS-21). Palo Alto, CA: Xerox PARC.
- VanLehn, K. (1983b): "On the Representation of Procedures in Repair Theory" In: Ginsburg, H. (ed.), *The Development of Mathematical Thinking*, New York: Academic Press.
- VanLehn, K. (1990): *Mind bugs: origins of procedural misconceptions*. Cambridge, Mass.: MIT Press.
- VanLehn, K., Ohlsson, S.; Nason, R. (1994): "Applications of Simulated Students: An Exploration". *Journal of Artificial Intelligence in Education*, 2, 135-175.
- Wolfram, S. (1991): "Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer". Addison-Wesley.
- Young, R. y O'Shea, T. (1981): "Errors in children's subtraction". *Cognitive Science*, 5, 153-177.

**Ricardo López Fernández**, Licenciado con grado en Ciencias Físicas por la Universidad Complutense de Madrid y Doctor en Educación por la Universidad de Salamanca con premio extraordinario de doctorado. Profesor Titular de Educación Matemática de la Universidad de Salamanca. Ha sido Vicerrector de Economía en la Universidad de Salamanca. En la actualidad, es Director del Departamento de Didáctica de las Matemáticas y Ciencias Experimentales. Ha participado en diversos programas europeos como FEDER; ADAPT, EUMEDIS y ha desarrollado diversos proyectos de evaluación educativa y tecnológica. Ha publicado en colaboración con otros autores 11 libros y diversas producciones multimedia en soporte CD-Rom de carácter educativo. Algunas de ellas premiadas. Tiene numerosas publicaciones e investigaciones en el campo de la aplicación de las tecnologías de la Información y la Comunicación a los procesos educativos en revistas de impacto como: RIBIE, Computer & Education, R.E (Revista de Educación), Revista de Enseñanza de las Ciencias. Universidad Autónoma .Barcelona, etc. (riclop@usal.es)

**Ana B. Sánchez García**, Licenciada en Ciencias de la Educación por la Universidad de Salamanca y Doctora en Educación con premio extraordinario de doctorado en la misma Universidad. Master en Servicios Sociales por la Universidad de Extremadura. Profesora Asociada en el Dpto. de Didáctica, Organización y Métodos de Investigación de la Universidad de Salamanca. Ha participado en diversos proyectos de investigación I+D+I. Ha desarrollado tareas de coordinación de cursos de Formación del Profesorado en el I.U.C.E. de la Universidad de Salamanca. En la actualidad, es Asesora de Investigación en el Centro Internacional de Tecnologías Avanzadas (CITA) y ha desarrollado diversos proyectos de evaluación educativa y tecnológica. Ha publicado distintos artículos en revistas de impacto como: R.E (Revista de Educación), Revista de Enseñanza de las Ciencias. Universidad Autónoma .Barcelona, etc. (asg@usal.es)