REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2009, Número 17, páginas 31 – 51
ISSN: 1815-0640

Cuadratura, primera noción de área y su aplicación en la expresión del área de diferentes figuras geométricas como recurso didáctico en la extensión geométrica del Teorema de Pitágoras

Julio Cesar Barreto Garcia

Resumen

En este articulo mostraremos la extensión del Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica, tomando en consideración el área de las figuras geométricas que estan sobre los lados de um triángulo rectángulo y de esta manera ver que se cumple la relación Pitagórica para cualquier tipo de figuras que cumplan cierta relación. Esta axtensión la vamos a realizar espresando el área de algunas figuras geométricas en función de otras, como por ejemplo el área de un triángulo equilátero en función del área de un cuadrado de lado igual a la del triángulo equilátero, para lo cual cuadratura es lo mismo que decir área.

Abstract

In this article we consider an extension of the classical geometric Pythagoras theorem, taking into consideration the areas of the geometric figures which by on the side of rectangular triangle. In this way we see that the Pythagoras relationship holds for every kind of figures which satisfy certain conditions. In particular, this extension is obtained by expressing the areas of some geometric figures as a function of some others, for instance the area of an equilateral triangle as a function of the area of a square whose side is the same of the side of the triangle.

Resumo

Neste artigo mostraremos a extensão do Teorema de Pitágoras na sua acepção geométrica, levando em consideração a área das figuras geométricas que estão sobre os lados de um triângulo retângulo e desta maneira ver que se cumpre a relação Pitagórica para qualquer tipo de figuras que cumpram certa relação. Esta extensão vai ser realizada expressando a área de algumas figuras geométricas em função de outras, como por exemplo, a área de um triângulo eqüilátero em função da área de um quadrado de lado igual a do triângulo eqüilátero, para o qual quadratura é o mesmo que dizer área.

Introducción

El desarrollo de los *procesos cognitivos* en el campo de la *Didáctica de la Matemática* es capaz de ayudar a nuestros estudiantes en la resolución de problemas de geometría, los cuales se deben realizar coordinando la caracterización propuesta por Duval (1998) y desarrollados por Torregrosa, G. y Quesada, H (2007) en la ultima referencia, en donde el proceso cognitivo de *visualización* está íntimamente relacionado con la forma geométrica de la figura, es decir, su configuración y el *razonamiento* se basa en aplicar las afirmaciones matemáticas que les corresponda algebraicamente.

La coordinación de estos *procesos cognitivos* les permitirá construir una teoría para *deducir* el Teorema de Pitágoras desde una acepción geométrica, tomando en consideración los cuadrados que se coloquen sobre los lados de un triángulo rectángulo cualquiera, teniendo en cuenta la idea de área, esto es, si A y B son las áreas de los cuadrados construidos sobre las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo y C es el área del cuadrado construido sobre la longitud de la hipotenusa, entonces se debe cumplir que $A+B=C$. Además trataremos de extender este caso a figuras geométricas poligonales (triángulos equiláteros, pentágonos, hexágonos, etc.) y figuras curvilíneas (semicírculos o lúnulas), lo cual lo haremos expresando el área de estas figuras geométricas en función del área del cuadrado, la cual deduciremos previamente que se cumple la relación Pitagórica.

Relevancia del trabajo para la Educación Matemática

En la *Historia de la Matemática*, se le atribuye a Bhaskara una demostración del Teorema de Pitágoras en el siglo XII en donde asoció la formula $a^2+b^2=c^2$ con el área de los cuadrados que estaban sobre los lados de un triángulo rectángulo (a y b sobre las longitudes de los catetos y c sobre la longitud de la hipotenusa) y operando con los cuadrados que estaban sobre las longitudes de los catetos logró formar el cuadrado que esta sobre la longitud de la hipotenusa.

Esta nueva forma de *deducir* el Teorema de Pitágoras, diferente a la de Bhaskara, permitirá a nuestros estudiantes divertirse operando con figuras geométricas junto a sus compañeros fomentando la unión grupal y les servirá para ir conociendo un poco lo que en matemática significa los conceptos de deducción, extensión y expresión de las áreas de unas figuras geométricas en función de otras, lo cual crea varias formas de aprendizaje en nuestros estudiantes y les hará pensar que los teoremas pueden extenderse de una manera más amena, sin perder la esencia del mismo.

Marco teórico y calidad bibliográfica

El campo de la *Didáctica de la Matemática* ha tomado un auge en los últimos años, debido al estudio que ella ha realizado en relación a los *procesos cognitivos* que deben desarrollar nuestros estudiantes al resolver los problemas de geometría en los cuales estén envueltos.

En este articulo usaremos el modelo propuesto por Duval, en el cual se restringe un poco el concepto de *visualización* al de *aprehensión*, para el cual "Concebimos las especies de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin negar o afirmar" según el Diccionario de la Real Academia Española (2001). En estas aprehensiones, nos desplazaremos de una que empieza cuando el estudiante ve intuitivamente el Teorema de Pitágoras y la cual es llamada *aprehensión perceptiva* e iremos hacia una que conlleva a modificar la configuración inicial y es llamada *aprehensión operativa*, esto nos llevara a un *razonamiento configural* de un *anclaje visual* (ver los cuadrados) a un *anclaje discursivo* (Teórico: Usar los productos notables).

Además sabemos que Piaget, J (1896-1980) destaca lo siguiente: En la etapa de las operaciones formales (de los 11 años en adelante) los adolescentes pasan de las experiencias concretas reales a pensar en términos lógicos más abstractos. Son capaces de utilizar la *lógica propositiva* para la solución de problemas hipotéticos y para derivar conclusiones. Son capaces de emplear el *razonamiento inductivo* para sistematizar sus ideas y construir teorías sobre ellas; pueden usar el *razonamiento deductivo* para jugar el papel de científicos en la construcción y comprobación de teorías. Pueden usar un *lenguaje metafórico* y *símbolos algebraicos* como símbolos de símbolos. Son capaces de pasar de lo que es real a lo que es posible, pueden pensar en lo que podría ser, proyectándose en el futuro haciendo planes en Teoría cognoscitivas en la etapa de desarrollos formales (D, Bolívar, 2000). Por lo cual podemos pensar en que nuestros estudiantes son capaces de usa el *razonamiento inductivo* y el *razonamiento inductivo* en estas extensiones del Teorema de Pitágoras.

A pesar de que muchas veces partamos de situaciones netamente intuitivas, J, Molin y A, Oktaç señalan que Fischbein (1987,1989) dice lo siguiente: El término *intuición* no tiene definición única, sino que debemos entenderlo como aquellas ideas que se aceptan como ciertas al ser evidentes por si mismas, no requieren de argumentación para que sean aceptadas, es decir, así tenemos que el Teorema de Pitágoras no es evidente por si mismo, después de su demostración e instrucción escolarizada nos convencemos de su certeza. Además dice que: Las personas tenemos la necesidad de entrar en un estado de convencimiento acerca de los conceptos matemáticos con los que nos encontramos, es decir, tener certeza de ellos. Ese estado de convencimiento es mediado por la *intuición* a través de *modelos intuitivos*. La delimitación que es fundamental para dar sentido a este articulo es la referente a *modelos intuitivos* ya que ello influye en la cognición que nuestros estudiantes puedan adquirir al examinar el Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica y extenderlo expresando el área de algunas figuras geométricas como el cuadrado en función del área de otras figuras geométricas, bien sean estas triángulos equiláteros pentágonos, semicírculos, lúnulas, etc.

Para Fischbein los *modelos intuitivos* son nociones intuitivamente aceptables que se desempeñan como un sustituto de las nociones intuitivamente inaceptables:

Los modelos representan una herramienta esencial para moldear o para darle forma a las cogniciones intuitivamente inaceptables. Cada vez que una persona se tiene que enfrentar con una noción intuitivamente inaceptable tiende a producir (algunas veces deliberadamente, otras inconscientemente) sustitutos de esta noción que son intuitivamente mas accesibles. Tales sustitutos son comúnmente llamados modelos intuitivos (Fischbein, 1987, p. 21 traducción y énfasis de la referencia de J, Molina y A, Oktaç, 2007).

Metodología y resultados

Se trata de un estudio del Teorema de Pitágoras visto desde una acepción geométrica realizado en diversos eventos de *Educación Matemática* tanto nacionales como internacionales donde participaron diferentes estudiantes y profesores en esta área. Se diagnostico mediante una serie de actividades en torno a la *deducción* que se ha realizado en torno a este teorema tan importante para la matemática en general, la demostración la haremos usando los productos notables de la suma y de la diferencia del cuadrado de dos cantidades desde un punto de vista geométrico y partir de allí vamos a extender el Teorema de Pitágoras para otro tipo de figuras geométricas expresándolas en función de la deducción anterior.

> *“La Geometría existe en todas partes... En el disco del sol, en la forma del datilero, en el arco iris, en el diamante, en la estrella de Mar, en la tela de araña y hasta en un pequeño grano de arena”.*
>
> *Platón. Filosofo griego.*

Nota histórica (Demostración de Platón: el Menon)

Según nos cuenta D. Jiménez en la sexta referencia: El cuadrado, es la figura rectilínea perfecta por excelencia, y se impuso desde el principio como el principal patrón de comparación, de allí que la palabra “cuadratura” fuera utilizada como una forma de referirse a lo que hoy denominamos calculo del área.

En la Figura 1 de abajo se nota como cuadrar un rectángulo formado por los dos cuadrados rojos en un solo cuadrado como lo es el cuadrado azul que esta sobre la longitud de la hipotenusa:

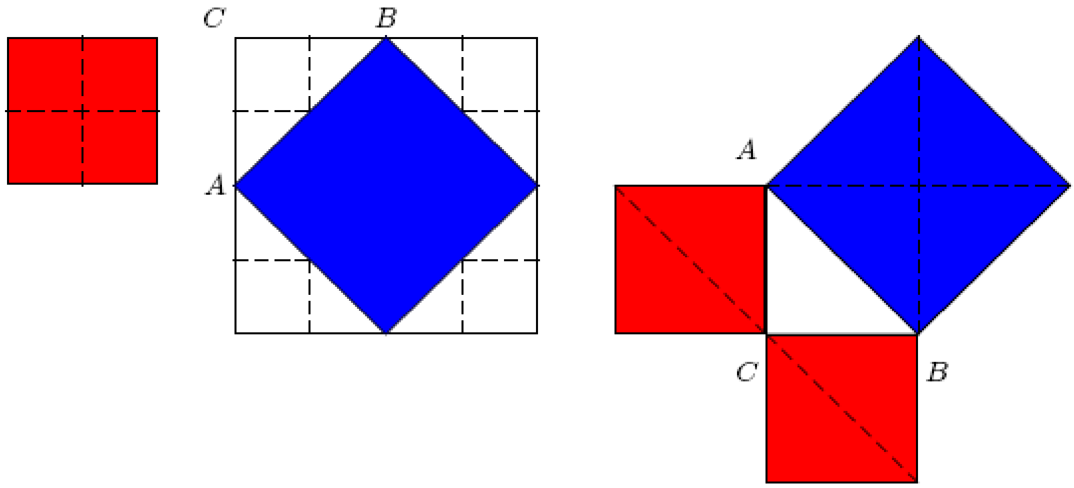


Figura 1: Platón construyó un cuadrado cuyo lado es de dos unidades (izquierda, rojo). Su área vale cuatro unidades cuadradas. Trazando un nuevo cuadrado ahora sobre su diagonal AB, se obtiene un cuadrado de ocho unidades cuadradas (centro, azul), doble superficie de la del primero. Hasta aquí la duplicación del cuadrado.

Pero esto no es una demostración, es simplemente una *inducción*[1] muy particular del Teorema de Pitágoras[2], por lo cual veamos la parte de abajo.

Deducción a través del trinomio cuadrado perfecto

Vamos a ver el siguiente *proceso de inferencia deductiva* para tratar de encontrar una forma de demostrar el Teorema de Pitágoras, apelando a los *procesos cognoscitivos*[3] que intervienen en la *resolución de un problema*[4].

Esto lo haremos a partir del producto notable del cuadrado de la suma de dos cantidades:

Sea, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Despejando tenemos que:

$$(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2. \qquad (1)$$

Es decir, cambiando del *anclaje discursivo* al *visual*[5] según la Figura 2, tenemos que:

[1] Para mayor información ver http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_03.php o en la décimo tercera referencia.
[2] En el libro de los Elementos de Euclides, el Teorema de Pitágoras es la proposición 47 del libro I.
[3] De acuerdo con Heller (1989), son mecanismos de naturaleza intelectual que una persona utiliza para adquirir, procesar y organizar información en su estructura cognoscitiva.
[4] Permite la adquisición de enfoques generales que ayudan a enfrentar situaciones matemáticas diversas, posibilitan la realización de descubrimientos originales y ayudan a “aprender a aprender”.
[5] Es la asociación de una afirmación matemática a un dibujo.

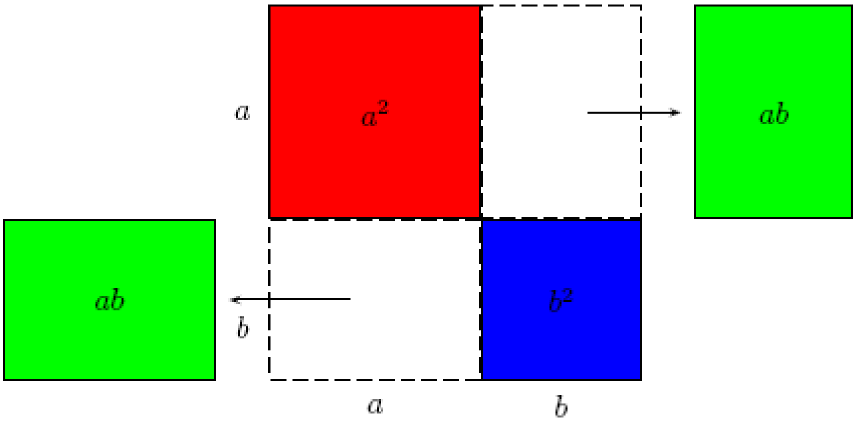


Figura 2: Producto notable del cuadrado de la suma de dos cantidades visto desde una perspectiva geométrica.

Notemos que $a^2 + b^2$ se formara con los dos rectángulos que se le han quitado al cuadrado de lado $(a + b)$ los cuales tienen de largo a y ancho b y sumándole un cuadrado de lado $(a - b)$. Es decir, aplicando una *aprehensión operativa de reconfiguración*[6], veamos la Figura 3 de abajo:

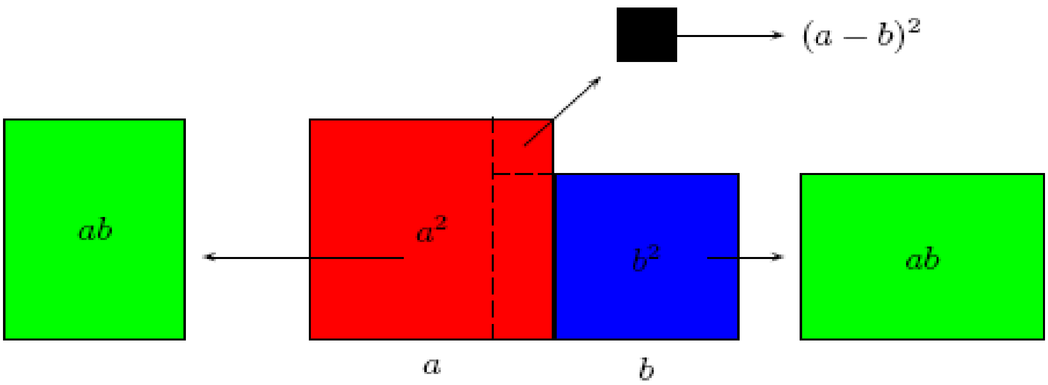


Figura 3: Producto notable del cuadrado de la diferencia de dos cantidades visto desde una perspectiva geométrica.

Los dos rectángulos se pueden convertir mediante una *aprehensión operativa de cambio figural*[7] en cuatro triángulos rectángulos de longitud en la base b y longitud de altura a, es decir veamos la Figura 4 de abajo:

[6] Es cuando las subconfiguraciones iniciales se manipulan como piezas de un puzzle.
[7] Es cuando se añaden (quitan) a la configuración inicial nuevos elementos geométricos (creando nuevas subconfiguraciones).

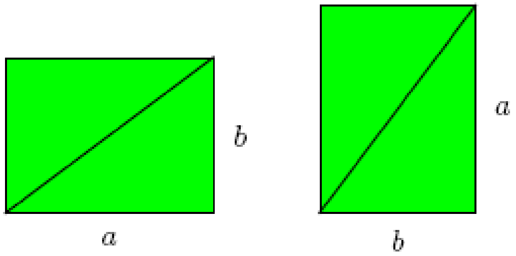


Figura 4: Rectángulos que están sobrando en el producto notable de la suma de dos cantidades (Fig. 2) los cuales son los mismos que están en el producto notable de la diferencia de dos cantidades (Fig. 3). Los dividimos mediante una aprehensión operativa de cambio figural colocándoles una línea en sus diagonales a este par de rectángulos (4 triángulos rectángulos).

Si llamamos, $c^2 = (a + b)^2 - 2ab. \quad (2)$

Veremos que efectivamente c^2 es otro cuadrado de lado c y cumple el producto notable del cuadrado de una suma, es decir, se puede formar de la suma de estas dos áreas. Veamos como se forma, desarrollando algebraicamente:

$$c^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - 2ab \quad \text{(Desarrollando).}$$
$$c^2 = (a^2) - 2ab + b^2 + 2ab \quad \text{(Asociando).}$$
$$c^2 = (a - b)^2 + 2ab \quad \text{(Producto Notable).}$$

De aquí que, tomando $2ab = 4\left(\frac{ab}{2}\right)$, es decir 4 triángulos rectángulos más un cuadrado en el *cambio dimensional*[8] de lado $(a - b)$ como en la siguiente Figura 5 de abajo y a la izquierda:

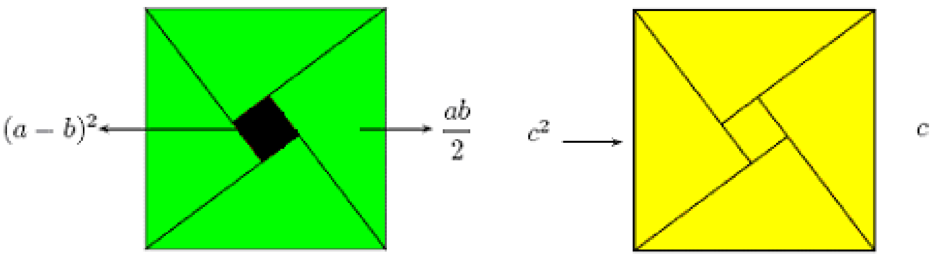


Figura 5: A la izquierda se muestra como se forma este cuadrado de lado c usando los 4 triángulos rectángulos verdes y el cuadradito negro. En la derecha vemos que efectivamente este es el cuadrado de color amarillo de lado c buscado.

Es decir, de (1) y (2) tenemos el siguiente *discurso*:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

[8] Es cuando cambio la información desde una perspectiva unidimensional o tridimensional, ya que son dados siempre bidimensionalmente sobre el papel o la pantalla de un ordenador.

Cumpliendo que: $c^2 = (a-b)^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)$.

Y este también es un cuadrado de lado c, mediante la *construcción* que se realizó, como lo vemos en la Figura 5 de arriba y a la derecha.

Y además, esa es la longitud igual a c de la hipotenusa que esta sobre el triángulo rectángulo así por el *razonamiento como un proceso configural*[9], nos queda el siguiente *truncamiento*[10], como veremos en la Figura 6 que tenemos allá abajo:

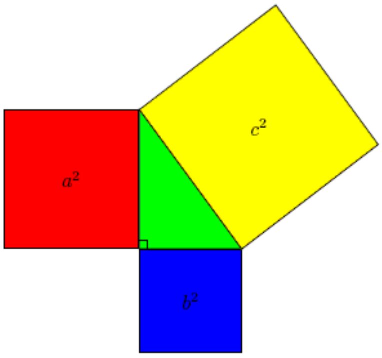


Figura 6: Conclusión hallada para el Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica para un triángulo rectángulo cualquiera.

Y lo que hemos deducido es la siguiente conclusión de la Figura 7 de abajo:

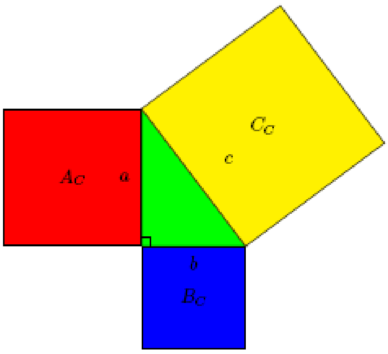


Figura 7:Conclusión geométrica del Teorema de Pitágoras, donde se satisface que $C_C = A_C + B_C$.

Donde:

- A_C : Es el área del cuadrado rojo de lado a, es decir, $A_C = a^2$.
- B_C : Es el área del cuadrado azul de lado b, es decir, $B_C = b^2$.
- C_C : Es el área del cuadrado amarillo de lado c, es decir, $C_C = c^2$.

[9] Es la coordinación entre la aprehensión discursiva y la operativa
[10] Es cuando la coordinación proporciona la "idea" para resolver deductivamente el problema (conjeturando afirmaciones que se prueban). Conduce a la solución de un problema.

Y podemos enunciar lo siguiente:

Teorema 1: En un triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre las longitudes de los catetos.

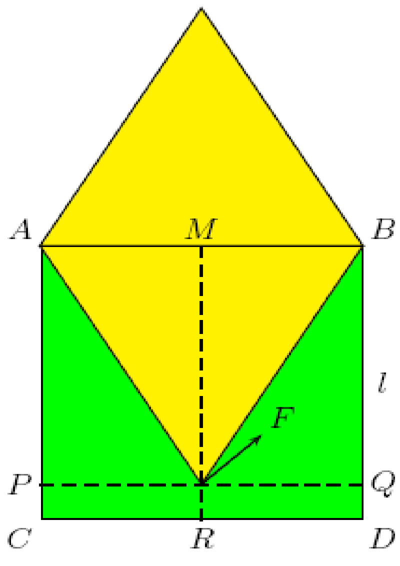
En la proposición 31 del libro II de Euclides se demuestra que si sobre los lados de un triángulo rectángulo se construyen figuras semejantes, el área de la figura construida sobre la hipotenusa será igual a la suma de las áreas de las figuras construidas sobre los catetos, esto lo veremos en lo que sigue:

Extensión para figuras rectilíneas (con frontera poligonal)

Actividad 1: Sobre el lado de un cuadrado, se construye un triángulo equilátero. El cual nos proporciona un *modelo implícito o tácito*[11] para ver si se puede usar en la extensión del Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica.

¿Cuál es la relación que existe entre el área del cuadrado y el área de este triángulo equilátero?

La figura en cuestión, es dada con el siguiente *cambio configural* que veremos en la Figura 8 de abajo:



Notación:

- A_C : Es el área del cuadrado que tiene como dato el lado: l y donde, $l = \overline{AB} = \overline{BD} = \overline{CD} = \overline{CA}.$
- A_T : Es el área del triángulo equilátero con base: b y donde tenemos como dato que $b = \overline{AB} = l.$ Además tenemos de incógnita la altura: h, donde $h = \overline{MF}.$

Figura 8: Representación que muestra la condición geométrica entre el cuadrado dado y el triángulo equilátero.

Observación: El área del triángulo equilátero es menor que la del cuadrado. ¿Pero cuanto menor?

[11] Según la clasificación de Fischbein: Se da cuando el sujeto no esta consciente de su influencia o alcance.

Solución:

Ahora bien, sabemos que el cuadrado tiene área:

$$A_C = l^2. \qquad (1)$$

Observación: Indiferentemente podemos denotar A_C como $A_C(l)$ y entonces tener el *modelo explicito*[12] $A_C(l) = l^2$, pero por comodidad lo colocamos $A_C = l^2$.

Luego, como $b = l$, calculemos h:

$$h = \sqrt{(l)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}, \text{ por Teorema de Pitágoras, versión lineal.}$$

$$h = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}}, \text{ propiedades de potenciación.}$$

$$h = \sqrt{\frac{4l^2 - l^2}{4}}, \text{ por suma de fracciones.}$$

$$h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}, \text{ reduciendo.}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}\sqrt{l^2}}{\sqrt{4}}, \text{ por propiedades de radicación.}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}l, \text{ pues } l \text{ es positivo.}$$

Así, en el triángulo equilátero tenemos que su área en función del cuadrado es la siguiente:

$$A_T = \frac{l\left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)}{2}, \text{ sustituyendo en la formula para hallar el área de un triángulo.}$$

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2, \text{ reduciendo.}$$

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{4}A_C, \text{ por la parte (1).}$$

[12] Según la clasificación de Fischbein: Se construyen o escogen en forma consciente para facilitar que se llegue a una solución. Esta función nos ayudaría a encontrar las dimensiones que debería tener tal lado para que la figura contenga la mayor área posible.

Observación: Notemos que si tenemos el *modelo explicito* para el área del triángulo $A_T(l) = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$, veremos que efectivamente esta función área es menor que el área del cuadrado $A_C(l) = l^2$ en una relación $\frac{\sqrt{3}}{4}$ que es menor que la unidad.

Veamos que si en el Teorema 1 deducido e introductorio, hacemos lo siguiente:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) C_C = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(A_C + B_C).$$
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) C_C = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) A_C + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) B_C.$$

Entonces, se cumple también que: $C_T = A_T + B_T$.

Donde:

- A_T : Es el área del triángulo equilátero rojo.
- B_T : Es el área del triángulo equilátero azul.
- C_T : Es el área del triángulo equilátero amarillo.

Así, lo que hemos deducido es lo siguiente veamos la Figura 9 de abajo:

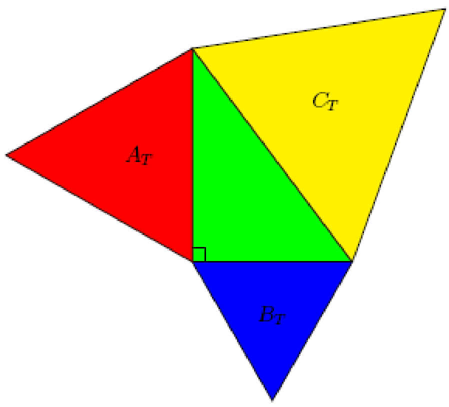


Figura 9: Vemos geométricamente el Teorema de Pitágoras, que satisface $C_T = A_T + B_T$.

Y podemos enunciar lo siguiente:

Teorema 2: En un triángulo rectángulo, el área del triángulo equilátero construido sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre las longitudes de los catetos.

Actividad 2: Sobre el lado de un cuadrado, se construye un pentágono. El cual nos proporciona otro *modelo implícito o tácito* para ver si se puede usar en la extensión del Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica.

¿Qué relación existe entre el área del cuadrado y el área de este pentágono?

Veamos el siguiente *cambio configural* de la Figura 10 de abajo:

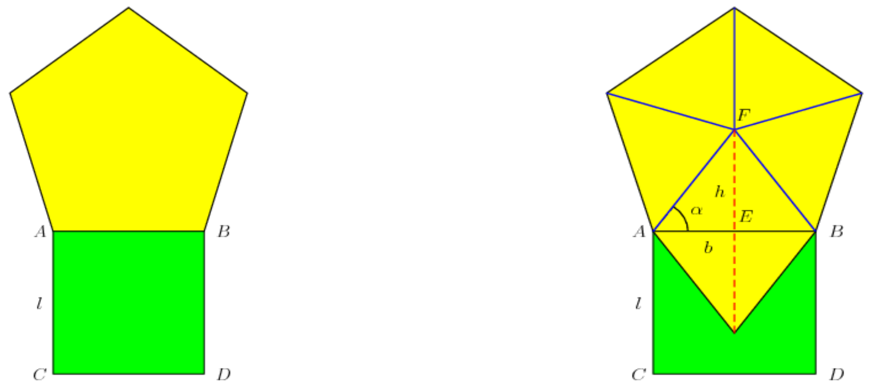


Figura 10: En la parte izquierda se muestra la representación geométrica de la Actividad 2 y en la parte derecha se le realizo una aprehensión operativa de cambio figural para dividirlo en cinco triángulos con un ángulo α conocido $\left(\alpha = 54^0\right)$ y altura h.

Solución:

En la mitad del triángulo ABF tenemos un triángulo AEF denotado T_{AEF}. Notemos que en este triángulo $b = \dfrac{l}{2}$ y de la relación trigonométrica $\tan\alpha = \dfrac{\text{longitud del cateto opuesto}}{\text{longitud de la hipotenusa}}$, tenemos según lo mostrado en la Figura 10 que $\tan\alpha = \dfrac{h}{b} \Rightarrow h = b\tan\alpha \Rightarrow h = \dfrac{l}{2}\tan\alpha$, con $b = \dfrac{l}{2}$. Así, tenemos que el área de este triángulo es $A_{T(AEF)} = \dfrac{bh}{2} = \dfrac{\left(\dfrac{l}{2}\right)\left(\dfrac{l}{2}\tan\alpha\right)}{2} = \dfrac{\dfrac{l^2}{4}\tan\alpha}{2} = \dfrac{l^2\tan\alpha}{8}$, con $A_{T(AEF)}$ denotando esta área.

Por tanto el área del triángulo ABF es dos veces esta área, es decir, $A_{T(ABF)} = 2A_{T(AEF)} = 2\left(\dfrac{l^2\tan\alpha}{8}\right) = \dfrac{l^2\tan\alpha}{4}$, con $A_{T(ABF)}$ denotando esta área. Luego, tenemos que el área de este polígono[13] es $A_P = 5A_{T(ABF)} = \dfrac{5l^2\tan\alpha}{4}$, con A_P

[13] Para mayor información ver http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_02.php o en la décimo segunda referencia.

denotando esta área. Notemos que en este caso esta área es mayor que la del cuadrado. Por analogía de acuerdo a la **Actividad 2** enuncie un Teorema de Pitágoras para este caso y trate de enunciarlo para otros polígonos regulares.

Extensión para figuras curvilíneas (con frontera curvilínea)

Actividad 3: Sobre el lado de un cuadrado, se construye un semicírculo[14].

¿Qué relación existe entre el área del cuadrado y el área de este semicírculo?

La figura es dada con el siguiente *cambio configural* en la Figura 11 de abajo:

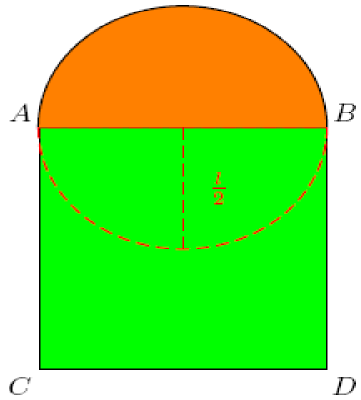


Figura 11: Representación de la condición geométrica entre el cuadrado y el semicírculo.

Notación:

- A_C : Es el área del cuadrado que tiene como dato el lado l, donde $l = \overline{AB} = \overline{BD} = \overline{CD} = \overline{CA}$.
- A_{SC} : Es el área del semicírculo, con radio: r, donde $r = \frac{\overline{AB}}{2}$.

Observación: El área de la semicírculo es menor que la del cuadrado. ¿Pero cuanto menor?

Solución:

Ahora bien, en el cuadrado sabemos que su área[15] es: $A_C = l^2 \quad (2).$

Luego, en el semicírculo su área es:

$$A_{SC} = \frac{\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2}, \text{ sustituyendo la formula para hallar el área de un semicírculo.}$$

$$A_{SC} = \frac{\pi l^2}{8}, \text{ reduciendo.}$$

$$A_{SC} = \frac{\pi}{8}A_C, \text{ por la parte (2).}$$

[14] Es la región cuya frontera es la circunferencia.

[15] Este es el mismo *modelo explicito* $A_C(l) = l^2$.

Observación: Notemos que si tenemos el *modelo explicito* $A_C(l)=\frac{\pi}{8}l^2$, dado el *modelo implícito* anterior, veremos que efectivamente esta función es menor que la otra que modela el área del cuadrado $A_C(l)=l^2$, en una relación de $\frac{\pi}{8}$.

Notemos que si en el **Teorema 1** deducido e introductorio, hacemos lo siguiente:

$$\left(\frac{\pi}{8}\right)C_C=\left(\frac{\pi}{8}\right)(A_C+B_C).$$
$$\left(\frac{\pi}{8}\right)C_C=\left(\frac{\pi}{8}\right)A_C+\left(\frac{\pi}{8}\right)B_C.$$

Entonces, tenemos que se cumple que: $C_{SC}=A_{SC}+B_{SC}$.

Donde:

- A_{SC} : Es el área del semicírculo rojo.
- B_{SC} : es el área del semicírculo azul.
- C_{SC} : es el área del semicírculo amarillo.

Así, lo que hemos deducido es lo siguiente veamos la Figura 12 de abajo:

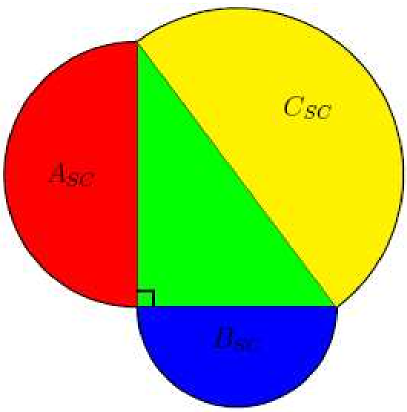
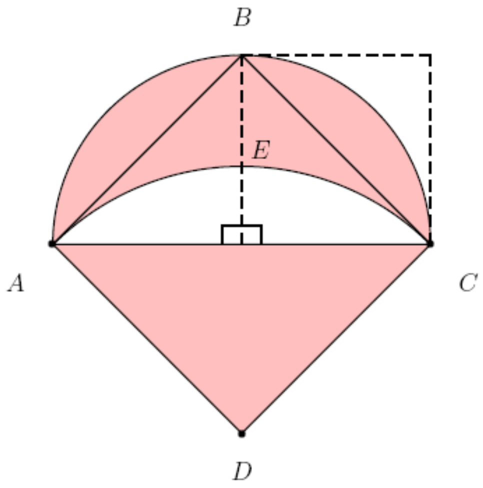


Figura 12: Vemos geométricamente el Teorema de Pitágoras, que satisface $C_{SC}=A_{SC}+B_{SC}$.

Y podemos enunciar lo siguiente:

Teorema 3: En un triángulo rectángulo, el área del semicírculo construido sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre las longitudes de los catetos.

Actividad 4: Demuestre que el área comprendida entre los dos arcos de círculo es igual al área del triángulo isósceles ABC o bien ACD.



Notación:

- $A_{SC(ABC)}$: Área del semicírculo ABC.
- A_T : Área del triángulo ADC o bien ABC, pues ambos forman el cuadrado $ABCD$.
- $A_{R(AECD)}$: Área de la región $AECD$.
- $A_{S(ABCE)}$: Área del sector $ABCE$, llamada lúnula.
- $A_{R(AEC)}$: Área entre la región AEC, y la cuerda AC.

Figura 13: Lúnula de Hipócrates. Representación geométrica de la Actividad 3.

En el lenguaje común, resolver la cuadratura del círculo significa buscar la solución de un problema que no tiene solución. "Darle forma cuadrada" al círculo, es construir exactamente, con una regla y un compás, un cuadrado de la misma área que un círculo dado.

Existen numerosas soluciones que se acercan, pero ninguna es exacta. Sin embargo, un matemático Griego, Hipócrates de Quios, propuso una solución en el siglo V a. C. Logró *construir* un cuadrado exactamente igual a una figura delimitada por dos círculos, una lúnula. La figura en cuestión, es dada con el siguiente cambio configural en la Figura 13 de arriba.

Solución:

Notemos además que:

- $\overline{AC}$: Diámetro del semicírculo ABC.
- $\overline{AD}$ o $\overline{DC}$: Radio del sector cırcular AEC.

Ahora bien, tenemos el triángulo rectángulo ABC (isósceles), el cual tiene por magnitud de medida en la hipotenusa $AC = l$.

Así, de acuerdo al **Teorema de Pitágoras** (versión lineal) tenemos que:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2.$$

$$\overline{AC}^2 = 2\overline{AD}^2, \quad \text{pues } \overline{AD} = \overline{DC}. \qquad (3).$$

Ahora, calculemos el área del semicírculo ABC:

$$A_{SC(ABC)} = \frac{\pi\left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi\left(\frac{\overline{AC}^2}{4}\right)}{2} = \frac{\pi\overline{AC}^2}{8}.$$

Y ahora, calculemos el área de la región $AECD$:

$$\mathrm{A}_{\mathrm{R(AECD)}} = \frac{\pi\overline{\mathrm{AD}}^2}{4}.$$

Luego, como los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros esto es de acuerdo a la Proposición XII del Segundo Libro de los Elementos.

Tenemos que:

$$\frac{A_{SC(ABC)}}{A_{R(AECD)}} = \frac{\frac{\pi\overline{AC}^2}{8}}{\frac{\pi\overline{AD}^2}{4}} = \frac{4\overline{AC}^2}{8\overline{AD}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{2\overline{AD}^2} = \frac{2\overline{AD}^2}{2\overline{AD}^2} = 1, \text{ por (3)}.$$

Por tanto,

$$A_{SC(ABC)} = A_{R(AECD)}. \qquad (4)$$

Por otra parte,

$$A_{S(ABCE)} = A_{SC(ABC)} - A_{R(AEC)}\ .$$

Y además,

$$A_T = A_{R(AECD)} - A_{R(AEC)}.$$

Pero por (4) se deduce directamente que:

$$A_{S(ABCE)} = A_T\,.$$

Dado que el triángulo es una figura cuadrable, este resultado garantiza por transitividad que la lúnula también lo es.

Calcule el área de este triángulo isósceles en función del área del cuadrado, dado en la siguiente Figura 14 de abajo:

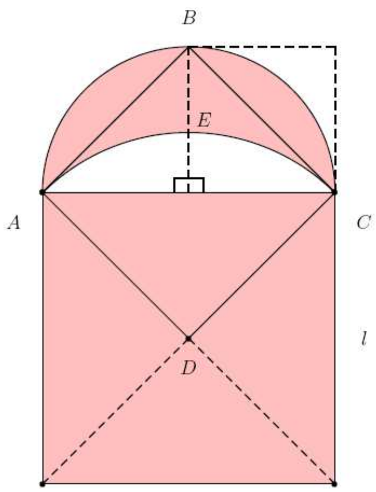


Figura 14: Representación geométrica de la lúnula y un cuadrado de longitud en la base del triángulo igual al lado del cuadrado.

Notemos que el área del triángulo isósceles es la cuarta parte del cuadrado.

Así tenemos:

$$A_{TI} = \frac{\overline{AC}}{4}.$$

Donde A_{TI} denota el área del triángulo isósceles.

Las diagonales dividen al cuadrado en cuatro triángulos iguales al triángulo ABC.

Observación: Esto lo podemos verificar notando que la altura h y la base b del triángulo isósceles son l y $\frac{l}{2}$ respectivamente. Y así, obtenemos lo siguiente:

$$A_{TI} = \frac{bh}{2} = \frac{l\left(\frac{l}{2}\right)}{2} = \frac{l^2}{4} = \frac{A_C}{4}.$$

Observación: Con $A_C = l^2$, lo colocamos nuevamente así en vez del *modelo explicito* $A_C(l) = l^2$.

Notemos que si en el **Teorema 1** deducido e introductorio, hacemos lo siguiente:

$$\left(\frac{1}{4}\right)C_C = \left(\frac{1}{4}\right)(A_C + B_C).$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)C_C = \left(\frac{1}{4}\right)A_C + \left(\frac{1}{4}\right)B_C.$$

Entonces, $C_L = A_L + B_L$.

Donde:

- A_L : Es el área de la lúnula roja.
- B_L : Es el área de la lúnula azul.
- C_L :Es el área de la lúnula amarilla.

Así, lo que hemos deducido es lo siguiente veamos la Figura 15 de abajo:

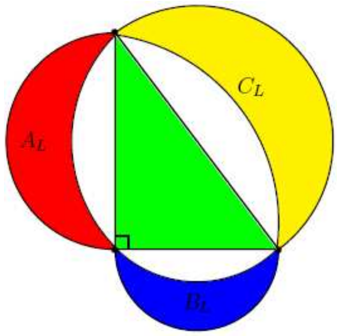


Figura 15: Vemos geométricamente el Teorema de Pitágoras, que satisface $C_L = A_L + B_L$.

Y podemos enunciar lo siguiente:

Teorema 4: En un triángulo rectángulo, el área de la lúnula construida sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de las lúnulas construidas sobre las longitudes de los catetos.

Actividad 5: En la siguiente Figura 15 de abajo:

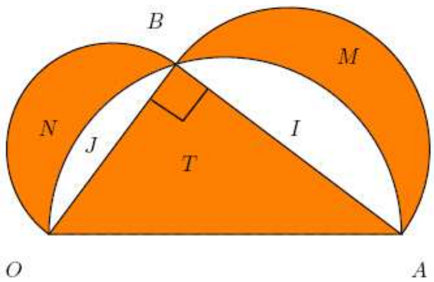


Figura 15: En la figura se muestra un triángulo rectángulo inscrito en una semicircunferencia y las lúnulas construidas sobre sus catetos.

Demostrar que:

$$\acute{A}rea\ T = \acute{A}rea\ M + \acute{A}rea\ N.$$

Sugerencia: Use el resultado del ejemplo anterior y compare las áreas.

Respuesta:

Consideremos la siguiente configuración geométrica (*cambio figural*):

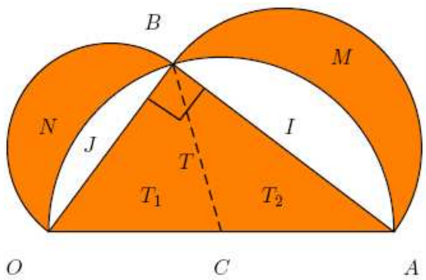


Figura 16: Configuración geométrica de la Figura 15.

Y ahora hagamos las siguientes notaciones:

- N : Es el área de la lúnula correspondiente al segmento $\overline{OB}$.
- M : Es el área de la lúnula correspondiente al segmento $\overline{BA}$.
- T : Es el área del triángulo rectángulo OAB.
- T_1 : Es el área del triángulo OBC.
- T_2 : Es el área del triángulo ABC.

Luego, sabemos que de la **Actividad 3** se cumple que:

$$N = T_1 \quad (5).$$
$$\mathrm{M} = \mathrm{T}_2 \quad (6).$$

Así, tenemos que:

$$T = T_1 + T_2, \text{ por ser el triángulo rectángulo a la vez una Figura Elemental.}$$
$$= N + M, \text{ por (5) y (6).}$$

Por tanto, se cumple que:

$$\acute{A}rea\ T = \acute{A}rea\ M + \acute{A}rea\ N.$$

"Defiende tu derecho a pensar, porque incluso pensar en forma errónea es mejor que no pensar".

Hipatia de Alejandría, Egipto, 370-415 d.C.

Interpretaciones y conclusiones

En el estudio de estas extensiones del Teorema de Pitágoras, nuestros estudiantes aprenderán a expresar las áreas de unas figuras geométricas en función de otras ya conocidas como es el caso del área del cuadrado. Y además aprenderán lo que realmente significa la palabra extensión o generalización en matemática, partiendo de la *deducción* del Teorema de Pitágoras en una acepción geométrica donde son cuadrados los que están sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Estos procesos netamente *intuitivos* les permitirá a través de la *Historia de la Matemática* conocer como surgen conceptos de situaciones reales de la vida, como es el caso del concepto de cuadratura que se convirtió después en el concepto de área de figuras geométricas, los cuales además pueden hacerse usando regla y compás, según lo hacían los griegos de acuerdo con lo estudiado en *la Historia de la Matemática*.

En otro orden de ideas, así como podemos transformar un rectángulo como vimos en la nota histórica, también podemos mantener un triángulo equilátero que tenga la misma área que la suma de otros dos triángulos equiláteros de base dada usando este teorema tan importante. Así mismo podemos hacer con dos círculos con diámetros dados formar un círculo de área igual a la suma de estas dos, con las lúnulas, etc. Por lo que puedo decir que si de Leonardo da Vinci tenemos forma de perfecta en la cuadratura humana del hombre de Vitruvio donde en el pensamiento renacentista: *el hombre medida de todas las cosas, la belleza ajustada a cánones, equilibrio, proporción…* en los Pitagóricos tenemos la belleza de las cuadraturas de las formas geométricas y en la hipotenusa la razón áurea de la perfección geométrica en donde descansa la perfección del mundo en general.

Bibliografía

- Barcenas D,. (2006). *La integral de Lebesgue un poco mas de cien años después*. Venezuela: Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. 13, (1), pp. 68-69.
- Barreto J,. (2007). *Otras deducciones del teorema de Pitágoras a lo largo de la historia de la matemática, como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje*. F González (Presidente). Memorias del VI Congreso Venezolano de Matemática. (pp. 537-546). Maracay: Universidad Pedagógica Experimental Libertador.
- Barreto J. (2008). *Deducciones de las formulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos*. [Versión electrónica], Números (69). Recuperado el 17 de Marzo de 2008, disponible en: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_02-php
- Barreto J. (2008). *Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.* [Versión electrónica], Números (69). Recuperado el 17 de Marzo de 2008, disponible en: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_03.php
- Bolívar D,. (2000). *Desarrollo psicológico.* Universidad Nacional Abierta. Caracas, Venezuela
- Duran D. (2004). *Geometría Euclideana*. V Talleres de Formación Matemática. Maracaibo, Venezuela: Asociación Matemática Venezolana
- Jiménez. D (2004). π *la letra griega que los griegos no usaron.* Venezuela: Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. 9 (1), pp. 103-117.
- Jiménez D. (2005). *Geometría, el encanto de la forma*. Colección Minerva N$^{\underline{0}}$ 36. Los libros de El Nacional. Editorial CEC, SA. Caracas, Venezuela.
- Jiménez D. (2006) *¿Qué era un irracional para un matemático griego antiguo?* Venezuela: Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. 13, (1), pp. 87-103.

- Molina J. y Oktaç A,. (2007). *Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 10 (2), pp. 241-273. México.
- Mora D. (2002). *Didáctica de las matemáticas en la educación venezolana*. (Ediciones Biblioteca-EBUC). Caracas, Venezuela.
- Oliveira C,. (2002). *Equacão do segundo grau pela volta ao quadrado perfeito. IV simpósio de educación matemática*, Universidad Luterana Do Brasil.
- Oliveira C,. (2004). *A história como recurso didáctico no processo de ensino e aprendizaje da matemática.* V congreso venezolano de educación matemática. UPEL-IPB del 26 al 20 de Noviembre. Barquisimeto, Venezuela.
- Torregrosa G. y Quesada H. (2007). *Coordinación de los proceso cognitivos en geometría*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 10, (2), pp. 275-300. México.

Julio Cesar Barreto Garcia, Nació en San Felipe Estado Yaracuy, Estudiante avanzado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas en la Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado” en Barquisimeto y de Educación Mención Matemática en la Universidad Nacional Abierta Centro Local Yaracay, Venezuela.
Ha trabajado eventualmente en la educación media, diversificada y a distancia. Esto es el fruto de: Ponencias presentada en Trujillo (IV Congreso Internacional Trujillano en Educación Matemática y Física); Ponencia, Cartel y Talleres dictados en Barquisimeto (VIII Jornada Centroccidental de Educación Matemática); Ponencia, Cartel y Taller dictado en Maracaibo (XXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa), Ponencia con Publicación Arbitrada en la Memorias del evento y Taller dictado en Maracay (VI Congreso Venezolano de Educación Matemática) y Comunicación Científica con Publicación no Arbitrada, Póster, Mini Curso y Relato de Experiencia efectuados en Brasil (IV Congresso Internacional de Ensino da Matemática). Y últimamente aceptada para Taller en México (11th INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION); y otra Ponencia en México (22 Reunión Latinoamérica de Matemática Educativa).
Dos Publicaciones en la revista Números en la edición 69 año 2008: *Deducciones de las formulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos* y *Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática*.
Obtuvo el primer lugar en el VIII Encuentro Nacional de Estudiantes de Ciencias, en el área de matemáticas en el año 2006.