UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2008, Número 15, páginas 139-146
ISSN: 1815-0640

¡¡Esto no es serio!!

José Muñoz Santonja

El asombroso mundo de las falacias matemáticas

Entre las personas que no tienen una estrecha relación con las matemáticas se suele tener la idea de que esta materia es la representación más clara de la exactitud. Incluso muchos matemáticos obtuvimos, al acabar la carrera, nuestro título de Licenciado en Ciencias Exactas. Hay personas que para indicar que algo es preciso dicen que es matemático o para aseverar que algo esta correcto dicen que es como “dos y dos, cuatro”, aunque los que tenemos más relación con esta disciplina sabemos que lo anterior depende de lo que se esté hablando y que, además, es cierto según sea la base con la que estemos operando. En muchos medios de comunicación o incluso cuando se presentan informaciones en empresas o en otras situaciones de la vida, siempre se acompañan con fórmulas o gráficas si queremos dar sensación de ser rigurosos, como queriendo reforzar lo que se pretende presentar. Esto es algo llamativo en la publicidad, donde se utilizan las matemáticas sin sentido, lo que puede apreciarse en la siguiente imagen.

Por todo lo anterior, las matemáticas están consideradas como algo sin posibilidad de manipulación, aunque todos sabemos las variadas interpretaciones que pueden tener los datos según quien haga el estudio (no hay más que pensar en que después de cada elección democrática, siempre resultan ganadores todos los partidos). Por ello, resulta muy chocante para el público en general, que se realicen demostraciones matemáticas donde al final se contradicen los resultados exactos que se han aprendido en la escuela. A estas demostraciones falsas, que llamaremos falacias matemáticas, son a las que vamos a dedicar esta sección hoy.

En general, en este tipo de falacias lo que se hace es demostrar una igualdad imposible utilizando, bien definiciones o partes de la teoría que se aplican mal, teoremas en contextos donde no se cumplen las condiciones básicas para poder aplicarlos, algoritmos y procedimientos de cálculo usados erróneamente o incluso interpretaciones equivocadas, o con un doble sentido de algunas definiciones que no es el adecuado.

La creación de muchas de estas demostraciones se pierde en la noche de los tiempos. Seguro que muchos recordamos algún profesor que, cuando éramos estudiantes, ya nos hizo alguna de estas falsas demostraciones con intención de asombrarnos. Por eso, muchas de las que vamos a recoger aquí serán muy conocidas y además se pueden encontrar en multitud de lugares en Internet. Incluso la wikipedia posee una entrada con el título *demostraciones inválidas* donde están algunas de las que vamos a recoger en estas páginas. Lo que hemos hecho es hacer un vaciado de todo lo que hemos podido encontrar en Internet y agruparlas un poco según el tipo de elementos que se utilizan en su desarrollo.

El primer bloque serán aquellas en las que se aplican, erróneamente en algún momento, las reglas básicas del álgebra y las operaciones con expresiones algebraicas.

Demostración de que 2=1

Vamos a comenzar por la que quizás sea la demostración más conocida de las que se incluyen dentro de las falacias matemáticas.

Partimos de una igualdad	$\mathbf{a = b}$
Multiplicamos por a	$a^2 = a \cdot b$
Restamos b^2	$a^2 - b^2 = a \cdot b - b^2$
Descomponemos en producto de factores los dos miembros	$(a+b) \cdot (a-b) = (a-b) \cdot b$
Dividimos por el factor común a – b	$a+b = b$
Pero al ser a = b de partida	$2 \cdot b = b$
Y tras dividir por b llegamos a la igualdad	$\mathbf{2 = 1}$

Una variación de esta demostración la he encontrado en la siguiente dirección de Internet. Es una página en inglés en la que aparecen varias falacias y paradojas con variaciones interesantes a otras ya encontradas, o algunas que no he localizado en ningún otro sitio. No todas las que aparecen en la página las vamos a recoger aquí por lo que si alguien está interesado en estos temas les aconsejo visitar la página.

http://www.math.toronto.edu/mathnet/falseProofs/fallacies.html

Partimos de una igualdad	$\mathbf{a = b}$
Multiplicamos por a	$a^2 = a\cdot b$
Sumamos a^2	$a^2 + a^2 = a^2 + a\cdot b$
Reducimos términos semejantes	$2\cdot a^2 = a^2 + a\cdot b$
Restamos el producto $2\cdot a\cdot b$	$2\cdot a^2 - 2\cdot a\cdot b = a^2 + a\cdot b - 2\cdot a\cdot b$
Reducimos términos	$2\cdot a^2 - 2\cdot a\cdot b = a^2 - a\cdot b$
Extraemos factor común el 2 en el primer término	$2\cdot(a^2-a\cdot b) = 1\cdot(a^2-a\cdot b)$
Dividimos ahora por el factor común $a^2-a\cdot b$ y llegamos a la igualdad buscada.	$\mathbf{2 = 1}$

Demostración de que a=b siendo a≠b

Partimos del supuesto de que a≠b y por tanto podemos definir un número, distinto de cero, que es su diferencia.

Sea la igualdad	$\mathbf{a - b = c}$
Elevamos al cuadrado ambos miembros y desarrollamos el cuadrado de la diferencia	$a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 = c^2$ (A)
Dado que $c = a-b$ tendremos que	$c^2 = (a-b)\cdot c = a\cdot c - b\cdot c$
Sustituimos el resultado anterior en la igualdad (A)	$a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 = a\cdot c - b\cdot c$
Reordenamos convenientemente los términos	$a^2 - a\cdot b - a\cdot c = a\cdot b - b^2 - b\cdot c$
Extraemos factor común	$a\cdot(a-b-c) = b\cdot(a-b-c)$
Y simplificando por el factor común	$\mathbf{a = b}$

He encontrado en inglés otra demostración cuyo resultado es el mismo que en este caso, pero con la aplicación de otro paso erróneo, común a otras demostraciones.

Queremos demostrar que todos los números son el mismo. Para ello tomamos dos números cualquiera a y b y realizamos los siguientes pasos:

Construimos un nuevo valor.	**$a + b = t$**
Multiplicamos ambos miembros por $a - b$	$(a+b)\cdot(a-b) = t\cdot(a-b)$
Desarrollamos	$a^2 - b^2 = ta - tb$
Trasponemos términos	$a^2 - ta = b^2 - tb$
Añadimos $\frac{t^2}{4}$ a ambos miembros	$a^2 - ta + \frac{t^2}{4} = b^2 - tb + \frac{t^2}{4}$
Ambos miembros son cuadrados de un binomio	$\left(a - \frac{t}{2}\right)^2 = \left(b - \frac{t}{2}\right)^2$
Extraemos la raíz cuadrada	$a - \frac{t}{2} = b - \frac{t}{2}$
Y por último eliminamos términos comunes	**$a = b$**

Demostración de que 10 = 5

Supongamos inicialmente que	**$x = 5$**
Multiplicamos ambos miembros por x	$x^2 = 5\cdot x$
Restamos 25	$x^2 - 25 = 5\cdot x - 25$
Descomponemos ambos miembros en producto de factores	$(x+5)\cdot(x-5) = 5\cdot(x-5)$
Dividimos ambos miembros por el factor común $x - 5$	$x + 5 = 5$
Y dado que partimos del supuesto de que x era igual a 5	**$10 = 5$**

Demostración de que 3 = 2

Consideremos la igualdad siguiente	$\mathbf{x = y}$
Sumamos **2·x** en ambos miembros y reducimos términos	$2\cdot x + x = 2\cdot x + y$ $3\cdot x = 2\cdot x + y$
Restamos **3·y** a ambos miembros y reducimos términos quedándonos	$3\cdot x - 3\cdot y = 2\cdot x + y - 3\cdot y$ $3\cdot x - 3\cdot y = 2\cdot x - 2\cdot y$
Sacamos factor común el 2 y el 3	$3\cdot(x-y) = 2\cdot(x-y)$
Y por último simplificamos el factor común	$\mathbf{3 = 2}$

Demostración de que 1 = 0

Partimos de una igualdad notable	$\mathbf{(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1}$
Pasamos parte del 2º miembro al primero	$(n+1)^2 - (2n+1) = n^2$
Restamos el producto **n·(2n+1)**	$(n+1)^2 - (2n+1) - n\cdot(2n+1) = n^2 - n\cdot(2n+1)$
Extraemos factor común en el primer miembro	$(n+1)^2 - (n+1)\cdot(2n+1) = n^2 - n\cdot(2n+1)$
Sumamos $\frac{(2n+1)^2}{4}$	$(n+1)^2-(n+1)(2n+1)+\frac{(2n+1)^2}{4}=n^2-n(2n+1)+\frac{(2n+1)^2}{4}$
Ambos miembros son desarrollos del cuadrado de una diferencia	$\left[(n+1)-\frac{2n+1}{2}\right]^2=\left[n-\frac{2n+1}{2}\right]^2$
Extraemos la raíz cuadrada	$(n+1)-\frac{2n+1}{2}=n-\frac{2n+1}{2}$
Simplificamos la fracción	$n+1 = n$
Con lo que queda	$\mathbf{1 = 0}$

Veamos ahora un par de falacias en las que no se utiliza álgebra pero en donde se aplican propiedades numéricas erróneas.

Demostración de que 4 = 2

Partimos de una identidad	**4 = 4**
Restamos 4 a ambos miembros	$4 - 4 = 4 - 4$
Expresamos los dos miembros como producto pero con distinta propiedad	$(2 - 2)\cdot(2 + 2) = 2\cdot(2 - 2)$
Si ahora dividimos por el factor común	$2 + 2 = 2$
Y llegamos a la igualdad	**4 = 2**

Demostración de que 2 = 6

Este proceso es parecido al anterior e incluso partimos de la misma igualdad.

Partimos de la identidad	**4 = 4**
Escribimos ambos miembros como restas	$20 - 16 = 52 - 48$
Aún podemos descomponer más	$4 + 16 - 16 = 36 + 16 - 48$
Ambos son el desarrollo del cuadrado de un binomio	$(2 - 4)^2 = (6 - 4)^2$
Extrayendo la raíz cuadrada	$2 - 4 = 6 - 4$
Y eliminando el valor común	**2 = 6**

Demostración de que 4 = 5

Partimos de una identidad	**– 20 = – 20**
Expresamos como restas los valores	$16 - 36 = 25 - 45$
Añadimos a ambos miembros $\frac{81}{4}$	$16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4}$
Ambos miembros son el desarrollo de cuadrados de un binomio	$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$
Extrayendo ahora la raíz cuadrada	$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$
Y sumando $\frac{9}{2}$ a ambos miembros	**4 = 5**

Quienes sean aficionados a leer esta sección, sabemos que alguno hay, sabrán que aunque los contenidos se nutren de los que hay e Internet o en bibliografía adecuada, siempre me gusta meter algún elemento personal que no haya aparecido hasta entonces en ningún otro lugar. Hoy voy a terminar las demostraciones con una con la que me encontré el primer año que di clase. Recién acabada la carrera me quedé como profesor ayudante en la Universidad y, vigilando con otro compañero un examen, de pronto un alumno nos enseñó una resolución de un problema en donde obtenía algo sin sentido. Debo reconocer que en ese momento me quedé en blanco puesto que nunca había visto ese desarrollo y tardamos unos minutos en reaccionar. Desde entonces, cada vez que explico las integrales en segundo de bachillerato suelo ver este caso como ejemplo de que no siempre se pueden utilizar varios métodos para resolver el mismo problema.

En este cado no estamos ante una falacia, ya que la demostración es correcta en todos sus pasos, lo único llamativo es el resultado final.

Demostración de que 0=1

Intentamos calcular la $\int \frac{1}{x \cdot Lx} dx$ (*L* representa el logaritmo neperiano).

Vamos a hacerla utilizando el método de integración por partes.

Tomamos $u = \frac{1}{Lx}$ y $dv = \frac{1}{x} dx$.

Por tanto $du = \frac{-1/x}{(Lx)^2} dx = -\frac{1}{x \cdot (Lx)^2} dx$ y además $v = \int dv = \int \frac{1}{x} dx = Lx$.

Aplicando la fórmula de integración por partes, $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ nos queda

$$\int \frac{1}{x \cdot Lx} dx = \frac{1}{Lx} \cdot Lx - \int Lx \cdot \frac{-1}{x \cdot (Lx)^2} dx = 1 + \int \frac{1}{x \cdot Lx} dx$$

de donde, si eliminamos la integral, quedaría 0 = 1.

Bueno y hasta aquí hemos llegado en este número. Hay muchas más demostraciones erróneas, pero las vamos a dejar para una nueva entrega. En particular hemos dejado para la segunda parte aquellas en que se utilizan elementos no tan corrientes como el álgebra y así nos vamos a encontrar con la unidad imaginaria, sucesiones, logaritmos, desigualdades, etc…

Como habrán apreciado, en ningún momento hemos comentado en qué paso se cometía el fallo matemático. La razón es porque suponemos que en todos los casos es evidente, pero si algún lector quiere alguna aclaración más precisa, no dude en escribir y resolveremos cualquier duda.

Como guinda para cerrar estas páginas me gustaría añadir una paradoja que se atribuye al filósofo y matemático Bertrand Russell. No era mi intención incorporar a este bloque paradojas lógicas, aunque no lo descarto para otra ocasión; sin embargo, este caso se asemeja a alguno de los razonamientos que hemos visto y por eso creo que viene a cuento.

Russell defendía que una proposición falsa puede implicar cualquier cosa y entonces otro filósofo le preguntó que si significaba que si 2+2=5 entonces él sería el Papa. A lo que Russell contestó:

“Si suponemos que 2 + 2 = 5, entonces seguramente estará usted de acuerdo en que si restamos 2 de cada lado de la ecuación, nos da 2 = 3. Invirtiendo los términos, tenemos que 3 = 2 y restando 1 de cada lado, nos da 2 = 1. De modo, que como el Papa y yo somos dos personas, y 2 = 1, entonces el Papa y yo somos uno. Luego, yo soy el Papa”.