UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Año XVI - Número 59. Agosto 2020
Páginas 180-203

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

Establecimiento de analogías durante el planteo de problemas matemáticos. Reflexiones para el contexto escolar

Miguel Cruz Ramírez, Osvaldo Jesús Rojas Velázquez, Beatriz Avelina Villarraga Baquero

Fecha de recepción: 03/08/2018
Fecha de aceptación: 28/08/2020

Resumen	Este estudio imbrica dos aspectos importantes que caracterizan el pensamiento matemático: el planteo de nuevos problemas y el uso de analogías. Se parte de una estrategia que explica el proceso de planteo de problemas, estructurada por seis etapas que se interconectan en el plano cognitivo. Mediante un análisis epistémico se explora la naturaleza y la forma en que se establecen analogías durante el proceso de planteo de problemas matemáticos nuevos e interesantes. Los elementos teóricos se ejemplifican con ayuda de paquetes computacionales, y luego se reflexiona acerca de la incidencia del planteo de problemas matemáticos y del razonamiento analógico en el contexto escolar. **Palabras clave:** analogías, planteo de problemas, resolución de problemas, pensamiento crítico.
Abstract	This study involves two important aspects that characterize mathematical thinking: posing new problems and using analogies. It is based on a strategy that explains the mathematical problems posing process, structured by six stages that are interconnected in the cognitive plane. Through an epistemic analysis we explore the nature and the way in which analogies are established during the process of posing new and interesting mathematical problems. The theoretical elements are exemplified with the help of computer packages, and then it thinks over the incidence of mathematical problem posing and analogical reasoning in the school context. **Keywords**: analogy, problem posing, problem solving, critical thinking.
Resumo	Este estudo envolve dois aspectos importantes que caracterizam o pensamento matemático: a formulação de novos problemas e o uso de analogias. Baseia-se numa estratégia que explica o processo de formulação de problemas, estruturado por seis etapas interligadas no plano cognitivo. Por meio de uma análise epistêmica são explorados a natureza e o modo como as analogias são estabelecidas durante o processo de apresentar problemas matemáticos novos e interessantes. Os elementos teóricos são exemplificados com o auxílio de pacotes computacionais e, então, refletimos sobre a incidência da criação de problemas matemáticos e do raciocínio analógico no contexto escolar. **Palavras-chave**: analogias, formulação de problemas, resolução de problemas, pensamento crítico.

1. Introducción

Junto a la capacidad para resolver problemas, el planteo de nuevos problemas y el empleo de analogías son aspectos importantes que caracterizan el pensamiento matemático. En el campo de la educación, el estudio de la resolución de problemas ha dejado una impronta fértil en hallazgos científicos que, si bien no abarcan todas las carencias de aprendizaje, dan crédito de un interés compartido por muchas generaciones de maestros e investigadores (Cai y Hwang, 2019). Paralelamente, aunque no han sido profusas las investigaciones sobre el planteo de problemas y el empleo de analogías, no dejan de ser atrayentes para todos los que comparten el noble propósito de promover un aprendizaje activo y desarrollador de sus estudiantes.

De forma general, el término “problema” expresa, en primera instancia, una situación que no puede ser resuelta con los recursos tradicionales y requiere de la activación de procesos cognitivos asociados al razonamiento lógico y creativo, así como de aspectos motivacionales y volitivos. En síntesis, es la formulación de una pregunta que cobra un significado relevante para el sujeto. También por problema puede entenderse esta misma noción de interrogante, pero con un mayor nivel de elaboración en forma de tarea docente y capaz de activar el desarrollo del pensamiento, en un ambiente de motivación y participación (Cruz, 2006a). En este sentido, el estudio de los procesos cognitivos asociados al planteo de nuevos problemas ha sido objeto de investigaciones en educación matemática durante los últimos años (Akay, 2010; Cankoy, 2014; Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi, y Sriraman, 2005; English, Fox, y Watters, 2005; Kar, Özdemir, Sabri İpek, y Albayrak, 2010; Stoyanova, 2003; Wang y Liu, 2008).

El planteo de problemas puede verse como una competencia profesional del maestro, asociada a la elaboración de tareas docentes y a la graduación de sus niveles de dificultad (Leavy y Hourigam, 2019). Asimismo, este proceso también constituye una actividad de aprendizaje, donde el estudiante formula preguntas razonables que expresan una elevada comprensión de los contenidos matemáticos (English, 2019; Stoyanova, 2003). El planteo de problemas es una actividad compleja y multifactorial que, desde el plano didáctico, refiere tanto la generación de nuevos problemas como la reformulación de problemas dados (Silver, 1994).

Esta concepción ha sido sostenida en muchos currículos escolares, con lo cual, el planteo de problemas se reconoce como un componente necesario de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (NCTM, 2000). Como sugiere J. Kilpatrick, en la clase de matemáticas:

> […] la formulación de problemas debería ser vista no solo como meta de instrucción sino como medio de instrucción. La experiencia en descubrir y crear por sí mismos problemas matemáticos debe ser parte de la educación de los estudiantes (Kilpatrick, 1987, p. 123).

Las actividades de planteo de problemas no solo permiten desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, sino también enriquecer y consolidar su comprensión relacionada con los conceptos y métodos matemáticos (English, 1998; English, 2019; Silver y Cai, 1996; Stoyanova y Ellerton, 1996). Estos procesos también pueden servir de referente para diagnosticar problemas de aprendizaje (Silver, 1994), e incluso para comprender mejor los procesos cognitivos y diagnosticar tempranamente el origen de las dificultades (Crespo y Sinclair, 2008).

Investigaciones realizadas durante los últimos años revelan varios problemas de orden didáctico, psicológico y epistemológico asociados al planteo de problemas matemáticos en el contexto escolar. Usualmente, se explora la naturaleza del planteo de problemas, sus inagotables potencialidades inherentes al desarrollo de pensamiento en el aula, la estructura de los procesos psicológicos asociados, la estrecha relación con la resolución de problemas y las conexiones con el pensamiento creativo (English *et al.*, 2005; Silver, 1994). Cuando el planteo de nuevos problemas se enfoca como tarea docente, no se tiene del todo claro a qué resultado realmente se va a llegar, incluso cómo se llevará a cabo o a partir de qué información se formulará la pregunta. Es por ello que E. Pehkonen (1995, p. 56) clasifica el planteo de problemas como problema en sí mismo, específicamente de tipo abierto. Aunque esto parezca redundante, el dilema reside en la naturaleza dual del concepto de problema matemático escolar: una ontológica y otra gnoseológica.

Respecto al uso de analogías, matemáticos notables reconocen su papel relevante para el desarrollo científico. Por ejemplo, S. M. Ulam atribuye a su mentor S. Banach el comentario de que un buen matemático encuentra analogías entre teoremas o teorías, pero que el mejor matemático ve analogías entre analogías (Ulam, 1976, p. 203). A. Weil adopta una postura similar al referir el lugar que ocupan las analogías en las matemáticas, con palabras un poco más metafóricas:

> Nada es más fecundo –todos los matemáticos lo saben– que estas oscuras analogías, estas perturbaciones que se reflejan de una teoría a otra, estas caricias furtivas, estos inexplicables apuntes escondidos; nada da también más placer al investigador (Weil, 1960, p. 408).

El planteo de problemas constituye un acto creativo que alberga cierto grado de descubrimiento. Justo aquí también emergen las analogías. Al respecto, H. Poincaré señala que:

> El descubrimiento es discernimiento, selección. […] Los hechos matemáticos dignos de ser estudiados son aquellos que, por su analogía con otros hechos, son capaces de encauzarnos al conocimiento de una ley matemática, de la misma forma que los hechos experimentales nos encauzan al conocimiento de una ley física (Poincaré, 1914, p. 51).

Bajo la mirada didáctica de un matemático, G. Pólya destaca la utilidad del uso de analogías para el despliegue del razonamiento verosímil, como una especie de similitud que se singulariza por el carácter activo del sujeto cognoscente:

> La diferencia esencial entre la analogía y otras clases de similitud consiste, me parece a mí, en las intenciones del pensador (Pólya, 1954, p. 13).

Esta última perspectiva requiere de una participación consciente y motivada del estudiante pues, como señala A. I. Uemov, el establecimiento de analogías se comporta más como un proceso psicológico que lógico (citado por Slepkan, 1983, p. 59). Consecuentemente, el estudio del razonamiento analógico ha motivado el interés de varios investigadores por su incidencia en el desarrollo del pensamiento matemático (Bernardo, 2001; Davis, 2013; Novick y Holyoak, 1991; Schlimm, 2008; Vosniadou, 1995; Wilbers y Duit, 2006).

En el campo del planteo de problemas matemáticos, las investigaciones relacionadas con el uso de analogías son poco frecuentes (Cruz, García, Rojas, y Sigarreta, 2016; Cruz, 2020). Por ejemplo, en un estudio relacionado con el planteo de problemas con texto, A. Bernardo (2001) establece una estrategia que promueve la transferencia analógica y facilita la recuperación de problemas análogos pertinentes. Por su parte, I. Peled (2007) investiga el rol del razonamiento analógico en el diseño de tareas para la formación de maestros de matemática. El presente trabajo tiene el propósito de reflexionar acerca del lugar que ocupan las analogías durante el proceso de planteo de problemas matemáticos, así como sus posibles conexiones con las raíces epistémicas que sustentan el ambiente de aprendizaje.

2. El planteo de problemas como proceso cognitivo

Desde el plano psicológico, K. Dunker (1945) arguye que la resolución de problemas consiste en reformulaciones sucesivas de un problema inicial. Resulta natural que el proceso de planteo de problemas esté asociado a la resolución de problemas en una dimensión que requiere elevada creatividad. Incluso se afirma que los mejores resultados ocurren en un ambiente de resolución de problemas (Kar *et al.*, 2010). El planteo de problemas requiere de un pensamiento productivo, razón por la cual ha sido de utilidad para medir la fluencia, flexibilidad y originalidad en la manera de pensar de los individuos (Sternberg y Sternberg, 2012). Existe consenso en que la generación de preguntas variadas y heterogéneas caracteriza a los individuos creativos (English *et al.*, 2005); no obstante, la extensión de esta relación y su estructuración cognitiva no ha sido suficientemente investigada (Lowrie, 2002).

En el ámbito escolar, la expresión matemática de los estudiantes a través de la creación de sus propios problemas revela no solo su grado de comprensión y nivel de desarrollo conceptual, sino también su percepción sobre la naturaleza de las matemáticas y su actitud hacia dicha disciplina (English *et al.*, 2005; Lavy y Shriki, 2010). Por tanto, es necesaria una enseñanza desarrolladora que promueva el pensamiento crítico y una concepción dinámica del saber matemático. En general, el estudio del planteo de problemas matemáticos comprende un contexto, un resultado y un proceso. El contexto está relacionado con la instrucción, el resultado se expresa en el nuevo problema, y el proceso entraña las problemáticas gnoseológicas del *insight* creativo.

El planteo de problemas adquiere características especiales en la formación del maestro de matemáticas, razón por la cual se han realizado investigaciones tanto en maestros en servicio (Chen, Van Dooren, Chen, y Verschaffel, 2011; Peled, 2007) como en estudiantes para maestro (Abu-Elwan, 2007; Akay, 2010; Crespo, 2003; Crespo y Sinclair, 2008; Fetterly, 2010; Kar *et al.*, 2010; Lavy y Shriki, 2010). En este contexto se requiere de habilidades especiales para plantear y resolver problemas; e incluso confluyen, a la vez, la preparación para el ejercicio de una enseñanza desarrolladora y la necesidad de un aprendizaje activo e inquisitivo de las matemáticas que se transmitirá después a los alumnos.

Por una parte, se aprecia una formación matemática que favorezca el planteo de nuevos problemas; por otra parte, es necesaria una formación didáctica que asegure la propuesta de problemas de diferentes niveles de dificultad para sus futuros estudiantes. El *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) destaca el papel del maestro en la selección, modificación e implementación de tareas de aprendizaje:

> Analizando y adaptando un problema, anticipando las ideas matemáticas que pueden manifestarse durante el proceso de resolución, y previendo las posibles preguntas de los estudiantes, los maestros pueden decidirse si los problemas particulares ayudarán a fomentar los objetivos de la clase (NCTM, 2000, p. 53).

Aunque los profesores en formación regularmente poseen mayor interés por su ciencia y un desarrollo cognitivo relativamente considerable, esto no es suficiente para dar por hecho que sean capaces de plantear problemas adecuados para el contexto escolar. No solo es importante formular preguntas rigurosamente y proveer problemas con sentido matemático, sino también prever las respuestas posibles y ser capaz de reformular la tarea variando las demandas cognitivas. Investigaciones recientes indican que la mayoría de las preguntas que el maestro formula son cerradas y factuales, y que se enfocan hacia la memorización y reproducción de procedimientos de bajas exigencias cognitivas (Crespo y Sinclair, 2008). Para los profesores en formación es complicado plantear problemas que promuevan el razonamiento matemático, tomando en consideración que durante muchos años de instrucción ellos han estado expuestos a preguntas tradicionales planteadas por sus maestros o contenidas en los libros de texto (Crespo, 2003).

Algunas investigaciones han considerado el planteo de problemas en un ambiente de criticismo (English, Cudmore, y Tilley, 1998; Lewis, Petrina, y Hill, 1998), mientras que otras lo han enfocado como destreza, habilidad, e incluso como competencia (Abu-Elwan, 2007; Charalambos, Kyriakides, y Philippou, 2003; Chen *et al.*, 2011; Kar *et al.*, 2010). No se trata de concepciones divergentes, sino de dos miradas de un mismo constructo desde ángulos diferentes. Desestimando enfoques marcadamente tradicionalistas y no siempre superados de la enseñanza de las matemáticas, los siguientes aspectos implican varios retos de órdenes teórico y metodológico en educación matemática:

1. El planteo de problemas constituye un proceso cognitivo complejo, el cual presupone un conjunto de etapas interconectadas que es necesario revelar desde el punto de vista científico. Enseñar a plantear problemas requiere la aprehensión de estas etapas y la calidad del aprendizaje subyace en la sinergia de sus interconexiones.
2. El planteo de problemas es expresión de un punto de vista crítico de las matemáticas. Las etapas no son contenido de enseñanza, sino el reflejo de una actitud crítica e inquisitiva del saber matemático.

Ambas perspectivas proveen al maestro de oportunidades para promover el planteo de problemas en el aula de matemáticas, pero a la vez, también generan ciertos peligros. La primera variante puede culminar con la enseñanza del planteo de problemas como una especie de algoritmo, mientras que la segunda alerta sobre la insuficiencia del método de enseñanza separado de la propia concepción de la actividad matemática. Si la enseñanza enfatiza el primer enfoque entonces potencia el carácter sistémico de las matemáticas; si enfatiza el segundo enfoque entonces potencia el carácter dialéctico.

En el epígrafe siguiente se describe una estrategia compuesta por seis etapas, la cual también puede enfocarse como la estructura de cierta habilidad, susceptible de ser enseñada y aprendida. Este camino ha sido planteado por A. N. Leontiev (1975) y conduce a la búsqueda de una base orientadora de cada acción, a la determinación de las operaciones más elementales de cada etapa, y a la automatización de las relaciones sistémicas que existen entre ellas. Bajo esta epistemología, el aprendizaje es visto como un proceso que transita por fases, donde maduran y se complejizan las acciones mentales (Galperin, 1969), así que la estrategia requeriría de una serie de momentos de interiorización y automatización no trivial.

El segundo enfoque guarda cierta relación con el constructivismo social, cuya premisa menos polémica concibe el desarrollo de las matemáticas bajo la influencia del lenguaje y los factores sociales. Sin embargo, el postulado más controversial concibe el saber matemático bajo una dualidad antagónica: por una parte, estable, necesario y autónomo; por otra parte, contingente, falible e históricamente cambiante (Ernest, 1998). Al respecto, P. Ernest ha señalado que:

> Las matemáticas se constituyen primordialmente del planteo y resolución humanos de problemas, una actividad que es accesible para todos. Por tanto, para todos, las matemáticas escolares deberían ocuparse centralmente del planteo y resolución humanos de problemas, y deberían reflejar su falibilidad (Ernest, 1991, p. 265).

Al tomar de esta epistemología el camino menos movedizo del pensamiento crítico, toda estrategia metacognitiva sería una expresión objetiva de una voluntad subjetiva, enfocada hacia la exploración crítica del saber matemático. El pensamiento crítico requiere disposición del estudiante (Barak, Ben-Chaim, y Zoller, 2007), y también comprende una variedad de habilidades tales como la identificación de la fuente de información, el análisis de su credibilidad, la reflexión sobre la consistencia de la información respecto al conocimiento previo, y el establecimiento de conclusiones (Linn, 2000).

3. Estrategias para favorecer el planteo de problemas

Como proceso cognitivo, el planteo de problemas implica la ejecución de estrategias complejas, el despliegue de habilidades y destrezas matemáticas, la activación de recursos metacognitivos, y también la influencia de creencias y concepciones subyacentes (Chen *et al.*, 2011). El acto de plantear nuevos problemas imbrica procesos específicos que han sido descritos por varios autores: aceptar / ¿qué-si-no? (Brown y Walter, 1990; Lavy y Bershadsky, 2003; Wang y Liu, 2008), ¿qué-si-más? (Jim Kaput, 1984, citado por Kilpatrick, 1987), analogías y generalización / particularización (Pólya, 1957), y muchas más. Por ejemplo, la dinámica entre aceptar un hecho matemático y plantear la pregunta ¿qué-si-no?, despliega amplias posibilidades para establecer los puntos de partida, como en el caso de problemas ya resueltos, teoremas ya demostrados, y conceptos ya establecidos. El pensamiento prosigue por un camino inquisitivo y creador, donde se modifican elementos y se indaga acerca de qué pasaría bajo tales condiciones.

S. I. Brown y M. I. Walter (1990, p. 64) observan la presencia de cinco etapas en el *insight* del planteo de problemas: seleccionar un punto de partida, listar atributos, preguntar ¿qué-si-no?, establecer la pregunta, y analizar el problema. Esta idea es similar a lo observado por Pólya (1957) en el proceso de resolución de problemas matemáticos, donde cuatro etapas generales expresan el camino que sigue el resolutor (comprender el problema, establecer un plan, llevar a cabo el plan, y la mirada retrospectiva). La identificación de etapas tanto en el planteo como en la resolución de problemas refleja la naturaleza estructural de ambos procesos cognitivos, así como la relación estrecha que existe entre los mismos.

Si bien la estrategia ¿qué-si-no? se esclarece gracias a numerosos ejemplos suministrados por Brown y Walter, estos autores indican que el proceso de planteo no es lineal y subsume una especie de ciclo (Brown y Walter, 1990, pp. 55-60). Basándose en esta estrategia, X. Wang y D. Liu (2008) han estudiado el planteo de problemas de geometría analítica y han observado que los alumnos tienden a transformar el problema (los datos o las preguntas) sin conservar la consistencia de sus atributos, lo cual conduce a problemas inválidos. Las evidencias empíricas no muestran acciones regresivas que faciliten el control metacognitivo durante el planteo, o sea, regularmente los alumnos no implementan una evaluación retrospectiva de sus acciones desarrolladas, similar al *looking back* descrito por Pólya (1957) en la fase final de la resolución de problemas.

C. Christou *et al.* (2005) establecen una taxonomía del proceso de planteo de problemas y su modelo consiste de cuatro procesos cognitivos: aprehensión, traducción, edición y selección. Como una consecuencia de su investigación en escolares de sexto grado, estos autores sugieren que el proceso de planteo comienza con la comprensión, aunque existe cierta propensión por la edición y selección de información cuantitativa, lo cual es similar a la consabida tendencia a la ejecución en los procesos de resolución de problemas.

En una investigación sobre el planteo de problemas, por parte del maestro de matemáticas en formación, M. Cruz (2006b; 2019, 2020) establece una estrategia metacognitiva para generar problemas, a partir de un objeto matemático, la cual tiene en cuenta las regresiones cíclicas y las etapas sugeridas por Brown y Walter (1990). Esta estrategia contiene seis etapas: selección, identificación, asociación, búsqueda, verbalización y transformación. La secuencia de las primeras cinco expresan el camino más lineal, pero al incorporar la transformación se establece un proceso mucho más complejo. En lo adelante, a esta estrategia se le denominará SCABV+T para abreviar.

Estructuralmente, la estrategia SCABV+T (Figura 1) comienza con la *selección* de un objeto o fenómeno dado, lo cual se corresponde con la selección de un punto de partida descrito por Brown y Walter (1990) y expresa la intencionalidad del planteo de problemas como actividad cognitiva consciente y motivada. A continuación, el sujeto escinde el objeto o fenómeno mediante un proceso analítico-sintético, lo cual es similar a la implementación de la estrategia heurística descomponer / recomponer, descrita también por Pólya (1957) en el proceso de resolución de problemas. A esta segunda etapa se le denomina *clasificación*, para significar la operación mental que implica listar atributos, compararlos y organizarlos según ciertos criterios (Inhelder y Piaget, 1969). Esta fase se caracteriza por la identificación de elementos conocidos dentro del objeto seleccionado.

La fase subsiguiente, comprende la *asociación* de conceptos y propiedades, a los elementos resultantes de la clasificación. Por ejemplo, a un triángulo es posible hacerle corresponder los conceptos de área, perímetro, baricentro, semejanza, en una lista tan profusa como cultura matemática posea el sujeto. Análogamente, la identificación de un triángulo puede conectarse con propiedades tales como el teorema de la suma de las amplitudes de los ángulos interiores, los teoremas de Tales y Pitágoras cuando es rectángulo, entre otras.

Figura 1. Una estrategia metacognitiva para el planteo de problemas matemáticos
Fuente: Cruz (2020)

A continuación, mediante un proceso de toma de decisiones, el sujeto escoge un subconjunto relativamente reducido de los conceptos y propiedades asociados, con el objetivo de especular sobre posibles relaciones o dependencias. Bajo este punto de vista, la etapa de *búsqueda* es una especie de análogo a la etapa de trazar un plan, señalada por Pólya (1957) en el proceso de resolución de problemas, ya que en ambos casos subyace el enigma del *insight* matemático.

Siguiendo un recorrido predominantemente lineal, la última etapa consiste en la *verbalización* del problema, lo cual presupone una organización y síntesis de las ideas. Mediante la verbalización se expresa la pregunta o la conjetura que permite socializar el problema. Este subproceso cognitivo requiere de habilidades comunicativas especiales, interconectadas con el lenguaje simbólico de las matemáticas. Por automatizada que resulte, esta etapa entraña dificultades con el rigor del problema planteado, así como formulaciones que se podrían interpretar de formas diferentes (ambigüedad). Es importante diferenciar la realización trivial de una pregunta del acto consciente de plantear un problema. La verbalización es una expresión materializada del planteo y emerge como resultado de un complejo proceso cognitivo, de un conflicto interno asociado a un objeto o fenómeno analizado.

Un recorrido no lineal sugiere la existencia de subprocesos regresivos que devuelven la información relativamente diferente, bajo ciertas transformaciones. La etapa de *transformación* reconoce la libertad del sujeto para efectuar cambios intencionales en el transcurso de la estrategia. Así, es razonable pensar que algunos componentes del problema pueden ser modificados antes, durante o después del *insight*. Desde este punto de vista, la estrategia ¿qué-si-no? se podría localizar en las relaciones duales como transformación-clasificación o búsqueda-transformación. La tendencia a la transformación puede manifestarse en cualquier estadio de la estructura cíclica, en dependencia del grado de flexibilidad y criticismo alcanzado por el sujeto.

La estrategia SCABV+T representa el avance progresivo hacia el planteo de un nuevo problema. Con la ubicación central de la transformación se reconocen las potencialidades para que esta etapa se interrelacione con todas las restantes. Además, el avance hacia el planteo no significa que dejen de existir retrocesos e interacciones dinámicas entre diferentes etapas. Bajo esta estructura, es posible diferenciar los ciclos de Brown y Walter (1990) en dos grupos: los lineales (de tipo I), relacionados con ciclos que tienen lugar entre fases subsiguientes, como asociación-búsqueda, y los ciclos no lineales (de tipo II) que implican el paso por la transformación.

La parte final de la saeta en la Figura 1 no significa un vacío ni un estadio conclusivo en el proceso de razonamiento. Precisamente, es este el momento en que el pensamiento matemático avanza hacia el proceso de resolución de problemas. Por tanto, la estrategia metacognitiva descrita tiene lugar en unidad dialéctica con las estrategias de solución de problemas.

4. El uso de analogías en el planteo de problemas matemáticos

Tomando en consideración la estrategia SCABV+T, un paso de avance hacia su comprensión conlleva al análisis del lugar que ocupan las analogías durante su implementación, especialmente como parte de los diferentes ciclos. En ello consiste la motivación general del presente trabajo, con la peculiaridad de que se toma en consideración la base epistémica subyacente en el método de enseñanza, o sea, un punto de vista flexible, falibilista e inquisitivo del saber matemático. Antes de proseguir, es necesario profundizar en algunos aspectos relacionados con el razonamiento analógico.

Una analogía puede ser descrita como un mecanismo de pensamiento, como una forma de pensar, e incluso como un tipo de semejanza. Según S. Vosniadou (1995), la esencia del razonamiento analógico reside en la identificación y transferencia de estructuras y relaciones desde un sistema bien conocido (fuente) hacia uno menos conocido (objetivo). La analogía requiere mantenimiento, manipulación, activación e inhibición selectiva de representaciones mentales, dirigidas a establecer correspondencias e inferencias acerca de relaciones de similitud de orden superior. Además, el razonamiento analógico se configura gracias a varias operaciones mentales que son especialmente importantes en un sentido amplio de la cognición humana, tales como la comparación, el análisis, la síntesis, la generalización, la clasificación, y la identificación de relaciones causa-efecto (Morrison y Cho, 2008).

Tomando en consideración el volumen de la información transferida de la fuente hacia el objetivo, las analogías pueden clasificarse en dos tipos: analogías entre propiedades y analogías entre relaciones (Guetmanova, 1989). A partir de esta clasificación, es posible considerar una tipificación simplificada de problemas matemáticos análogos en el contexto escolar. En efecto, los problemas planteados pueden ser análogos estructuralmente por contener datos o preguntas similares (analogía externa) o bien análogos por las relaciones que entrañan (analogía interna). Como ocurre con otros razonamientos, el analógico varía por su significado, función, rango y naturaleza.

Para lograr una distinción más precisa de los mecanismos empleados durante el razonamiento analógico, es factible adoptar la teoría de D. Gentner (1983) sobre el mapeo de estructuras. El primer concepto sobre el cual se funda la teoría de Gentner consiste en un dominio de situaciones, el cual se comprende psicológicamente como un sistema de objetos junto a sus atributos y relaciones. Este aspecto puede reinterpretarse en el campo del planteo de problemas, exactamente el objeto o fenómeno seleccionado y enriquecido tras la dinámica selección-clasificación-identificación. Ya Bernardo (2001) ha señalado la importancia del conocimiento previo para el despliegue del razonamiento analógico. Un conocimiento amplio favorece la selección de propiedades y relaciones, con mayores oportunidades para la búsqueda posterior de relaciones. No obstante, la amplitud del conocimiento no es lo suficientemente efectiva si carece de otros aspectos reguladores, tales como la fluidez en la distinción de elementos y la flexibilidad en su respectiva selección.

Un segundo aspecto señalado por Gentner (1983) consiste en asumir el conocimiento como redes proposicionales de nodos y predicados. Los nodos representan los conceptos tratados como totalidades, mientras que los predicados aplicados a los nodos expresan proposiciones sobre los conceptos. En tercer lugar, este autor distingue los predicados sintácticamente de dos formas diferentes. Por una parte, los diferencia tomando en consideración los atributos, ya sean de objetos o relaciones; por ejemplo, *área(∆ABC)* y *semejantes(∆ABC*, *∆PQR)*, respectivamente. Por otra parte, distingue los predicados de primer orden que toman objetos como argumento (como el caso de los dos ejemplos anteriores), y los de orden superior que adoptan proposiciones como argumento, por ejemplo, *causa[dependencia(AB, CD), independencia(AB, EF)].* Estas distinciones enriquecen la forma de diferenciar las analogías con base en su contenido.

Si bien A. Guetmanova (1989) establece una clasificación de las analogías según su contenido, distinguiendo las analogías de propiedades y las de relaciones, con las observaciones de Gentner (1983) es posible delimitar niveles de complejidad en dichas analogías. En efecto, haciendo confluir los objetos y sus propiedades por un lado y las relaciones entre objetos por otra, las analogías basadas en los predicados simples expresarían niveles primarios de complejidad. Por su parte, las analogías relacionadas con predicados de orden superior expresarían niveles más avanzados de complejidad. Esta observación reafirma una tesis expresada por Gick y Holyoak en un trabajo pionero en la solución analógica de problemas, donde plantean que las analogías pueden ser representadas por niveles múltiples de abstracción (Gick y Holyoak, 1980, p. 310).

Como cuarto y último concepto, Gentner (1983) incluye las representaciones, las cuales están destinadas a reflejar la forma en que las personas construyen una situación por intermedio de diferentes clases de predicados. La flexibilidad de estas representaciones va más allá de lo que pudiera parecer lógicamente posible. Sobre esta base, la teoría de mapeo de estructuras tiene el mérito de definir las analogías dependiendo solo de las propiedades sintácticas en que se representa el conocimiento, y no del contenido específico de su dominio. En efecto, una analogía se distingue de una abstracción, una similitud literal y otras clases de comparaciones, en que transporta (mapea, aplica) pocos o ningún atributo de la fuente hacia el objetivo. Por el contrario, las inferencias analógicas se refieren principalmente a la estructura relacional del objeto. Si las relaciones de orden superior están presentes en la fuente, entonces se pueden mapear hacia el objetivo mediante un razonamiento analógico.

Todo mapeo puede representarse como una función que aplica de la fuente en el objetivo $M: F \rightarrow O$, donde a un conjunto de nodos f_i de la fuente le corresponde un conjunto de nodos o_j en el objetivo ($f_i \rightarrow o_j$). Ahora, este mapeo determina otra correspondencia de orden superior que transporta atributos *A* y relaciones *R*, en forma de predicados de mayor complejidad. Para potenciar las analogías, Gentner (1983) refiere tres principios básicos: primero, tratar de descartar los atributos de objetos; segundo, tratar de preservar las relaciones entre objetos; y tercero, elegir sistemas de relaciones para así decidir qué relaciones se conservan. A esta tercera idea, dicho autor la denomina *principio de sistematicidad* y sugiere que, al decidir qué relaciones se conservan, es necesario elegir un sistema de relaciones en lugar de predicados aislados.

D. Schlimm (2008) señala que la teoría estructuralista del mapeo de relaciones ha resultado muy influyente en la psicología cognitiva, mucho más que otras teorías como la explicación con base axiomática. Sin embargo, la transferencia analógica por inferencia no es infalible –acota Schlimm–, pero desempeña un papel importante para la ciencia. Como cabe esperar, esta teoría puede ser útil para explicar el razonamiento analógico bajo un enfoque cognitivo del planteo de problemas, así que puede ser útil también para la enseñanza.

5. Un ejemplo de razonamiento analógico durante el planteo de un problema de geometría elemental

A continuación, se presenta un ejemplo donde se ilustra el despliegue del razonamiento analógico durante el planteo de un problema geométrico. La descripción ha sido adaptada de los argumentos expresados por el autor del problema (*vid*. Ochoa, 1998), en una entrevista desarrollada como parte del presente trabajo. Para el análisis del proceso se adoptan dos pilares teóricos fundamentales: la estrategia SCABV+T que describe el proceso creativo e intencionado de plantear nuevos problemas, y la teoría estructuralista del mapeo de relaciones.

Selección. Como plantea E. Silver (1994), durante la etapa inicial es factible partir de un problema ya resuelto y reformularlo, o bien generar nuevos problemas. Esta concepción no comporta la definición de caminos separados, sino situaciones diferentes que pueden servir de base para el despliegue del pensamiento creativo. En la práctica, la reformulación y el descubrimiento de nuevos problemas pueden converger en un mismo camino de razonamiento. Precisamente, el ejemplo que sigue constituye un problema discutido inicialmente en el aula.

Problema fuente. Sea *ABCD* un cuadrado de lado 1. Sean *P* y *Q* dos puntos interiores de los segmentos *DA* y *AB*, respectivamente, tales que $\angle PCQ = 45º$. Hallar el perímetro de ΔPAQ.

Para resolver este problema es posible rotar el ΔCDP respecto al punto *C*, un ángulo recto en sentido positivo. Así, tomando en consideración que *M* es la imagen de *P*, resulta que *Q*, *B* y *M* están alineados, como ilustra la Figura 2A. Por el criterio lado-ángulo-lado resulta $\Delta QCM = \Delta PCQ$, de manera que $QP = QM = QB + BM = QB + DP = (1 – AQ) + (1 – PA)$, de donde resulta el perímetro $P_{\Delta PAQ} = AQ + QP + PA = 2$. Más información puede encontrarse, por ejemplo, en el link Quora.

Bajo un enfoque tradicional, el proceso de razonamiento termina justo aquí. Sin embargo, en el sentido de Pólya (1957), una mirada retrospectiva al problema no solo garantiza posibles correcciones, la mejora de sus argumentaciones, e incluso el hallazgo de caminos más óptimos. Pertrechado por un punto de vista crítico, el sujeto también puede hacerse preguntas relacionadas con las condiciones que inciden en la unicidad de la solución, en la estructura que esta cumple cuando se flexibilizan ciertas condiciones, entre otras. Pero todavía es más compleja y versátil la búsqueda de problemas análogos, trasladando las ideas del problema inicial hacia otros objetos matemáticos. Pólya aportó una hermosa metáfora al referir esta importante etapa de razonamiento:

> Encontrar un nuevo problema que sea interesante y accesible, no es fácil; necesitamos experiencia, buen gusto y suerte. Sin embargo, no debemos dejar de buscar otros problemas nuevos cada vez que hayamos logrado resolver uno. Los buenos problemas y ciertas clases de setas tienen algo en común, crecen en racimos. Habiendo encontrado uno, deberías mirar alrededor; hay una buena posibilidad de que haya algunos bastante cerca (Pólya, 1957, p. 65).

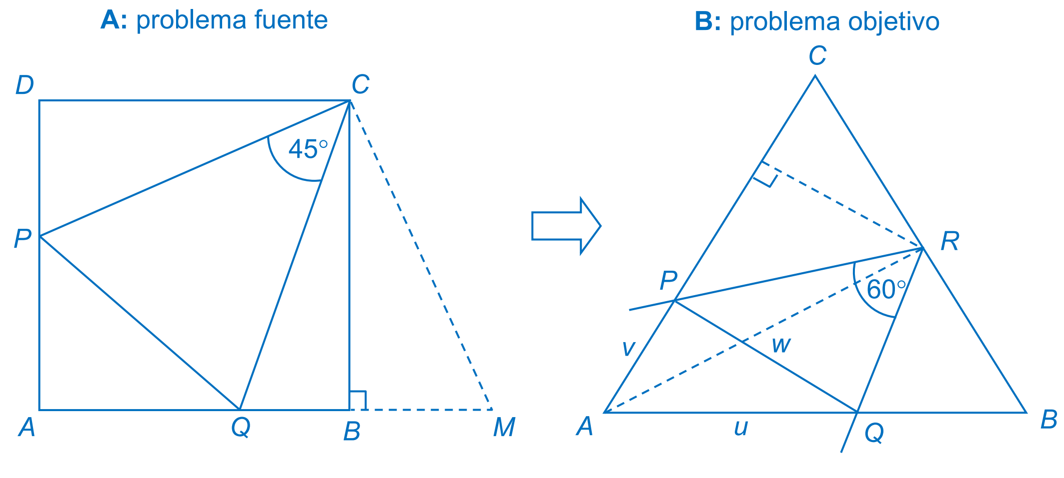

Figura 2. Proceso de formulación de un problema análogo
Fuente: testimonio del autor del problema (*cf.* Ochoa, 1998)

En este sentido, el profesor puede movilizar el pensamiento por medio de preguntas heurísticas, tales como: ¿Qué elementos del problema producen una solución constante, a pesar de que *P* y *Q* pueden moverse por los segmentos respectivos manteniendo el $\angle PCQ$ = 45º? ¿Ocurrirá un fenómeno similar sobre otra figura geométrica? Por tanto, la etapa de selección no significa tomar al azar un punto de partida, sino comprender la esencia del problema resuelto antes de transferirlo hacia nuevos objetos. En su testimonio, el entrevistado comenta que experimentó con muchas variantes, principalmente tomando rectángulos que constituyen la generalización natural del cuadrado. Este hecho sugiere que se han tomado en consideración ciertos elementos del problema fuente que se tratan de transportar hacia otro objeto en el problema objetivo.

Clasificación. Esta etapa refiere la identificación tanto de atributos de forma como de contenido, o sea, la búsqueda de analogías puede conectar problemas desde el punto de vista estructural e incluso respecto a su solución (problemas análogos con/sin soluciones análogas). Existen varios elementos que tipifican el problema anterior, como el cuadrado, la movilidad del ángulo, y el valor constante del perímetro. No obstante, existen otros detalles tales como la posición del vértice del ángulo móvil, la amplitud tomada bajo un ángulo notable, la familia de triángulos formada por los puntos móviles y el vértice *A*, entre otros aspectos. Clasificar implica considerar no solo lo aparentemente esencial, sino todos los elementos posibles que tipifican el problema original. Esto último está estrechamente relacionado con las observaciones de Gentner (1983), respecto a la distinción primaria de atributos y relaciones, para luego abstraerse de las características no esenciales y potenciar las que expresan relaciones.

En los objetos matemáticos, rara vez se observan atributos que no estén supeditados a relaciones por intermedio de su definición. Por ejemplo, el cuadrado *ABCD* de la Figura 2A expresa la igualdad entre las longitudes de los lados del concepto genérico de rectángulo, mientras que el valor constante del perímetro de cualquier triángulo ΔPAQ puede verse como un atributo del objeto. Sin embargo, aun así, es factible considerar el perímetro como una función del $\angle QCB$ variable. Con ello se llega al concepto función que, en definitiva, es también un tipo de relación. Una singularidad aparente reside en el hecho de que el vértice del ángulo móvil esté localizado sobre un vértice del cuadrado.

Asociación/Búsqueda. Esta relación dinámica entraña una fluencia de conceptos y propiedades relevantes, pero condicionada por un proceso analítico-sintético orientado hacia la búsqueda de analogías. Es posible relacionar varias propiedades para cada elemento reconocido en el objeto matemático inicial, como pensar en la búsqueda de otros polígonos regulares que sirvan de soporte a un nuevo problema. Este tipo de asociación no busca generalización sino similitud. Buscar sobre una nueva figura (por ejemplo, sobre un pentágono regular), consiste primariamente en un proceso de ensayo-error, donde podría experimentarse con un ángulo de igual amplitud que el inicial, pero no siempre se forma un triángulo al ubicar el vértice del ángulo de 60° sobre cualquier vértice del pentágono, considerando los puntos de intersección de los lados del ángulo y los lados del pentágono que no contienen el vértice fijado.

El entrevistado señala que probó con varios polígonos regulares, considerando amplitudes principalmente de ángulos notables, pero este ensayo-error no le produjo frutos adecuados. Por ejemplo, para el caso del pentágono podría seleccionarse un ángulo de amplitud $72° < \alpha < 108°$, con lo cual siempre se consigue la formación de un cuadrilátero. No obstante, puede demostrarse que el área siempre es variable para todo α de este intervalo.

Como es posible ver, la asociación se centró en la transportación de relaciones expresadas por predicados no triviales, tales como:

1. La figura seleccionada es un polígono regular y el ángulo escogido es de una amplitud notable.
2. El ángulo fijo se mueve bajo ciertos límites consiguiéndose siempre la formación de un triángulo.
3. El perímetro del triángulo siempre es constante (no depende de la posición del ángulo).
4. El vértice del ángulo yace sobre uno de los vértices del cuadrado.

Todos estos predicados se articulan de forma compleja en el proceso de búsqueda y, en general, el conjunto se comporta como un sistema de relaciones, lo cual es favorable para razonar analógicamente. Tal como señala Gentner:

> Es más probable que se importe al objetivo un predicado que pertenece a un sistema mapeable de relaciones interconectadas mutuamente, que un predicado aislado (Gentner, 1983, p. 163).

Por tanto, es lícito determinar qué relaciones son fundamentales y qué transformaciones no vulneran las propiedades esenciales del objeto inicial. Ello implica la posibilidad de variar algunas condiciones del problema por intermedio de la estrategia ¿qué-si-no?, descrita por Brown y Walter (1990), siempre que los cambios conserven la analogía.

Transformación. En su explicación, el autor del problema comenta que, inicialmente, durante sus comprobaciones había desechado el triángulo equilátero, pues al ubicar el vértice del ángulo móvil sobre cualquier vértice apenas se consigue un segmento en el lado opuesto. Por azar, ensayó sobre el punto medio de uno de los lados del triángulo, tampoco sin éxito tras mantener la amplitud inicial de 45°. Sin embargo, las relaciones observadas le sugirieron tratar de conseguir ciertas relaciones de semejanza. El autor relata que, en ese momento, apenas su propósito era construir un problema interesante por las potencialidades de las relaciones observadas. Sin embargo, inesperadamente, al comprobar con un ángulo de 60° nuevamente consiguió un triángulo de perímetro constante (el ΔPAQ en la Figura 2B).

Cabe entonces cuestionar si las propiedades resultan análogas o no. El posicionamiento del vértice aparenta ser el obstáculo fundamental. No obstante, la intuición sugiere que existen semejanzas, pues ambos problemas "se parecen" como manifiesta el autor. Ocurre que, al tomar el vértice del ángulo móvil sobre el punto medio R del lado CB, la analogía se hace más visible reformulando el cuarto predicado antes considerado. Por ejemplo, en lugar de adoptar que "El vértice del ángulo yace sobre uno de los vértices del cuadrado", asumir el predicado más general "…yace en un punto equidistante de dos vértices no contenidos en el triángulo formado". Esta observación justifica dicha intuición analógica, la cual podría ser más visible considerando ciertas simetrías respecto a las rectas que contienen, respectivamente, la diagonal *AC* en la Figura 2A y la altura *AR* en la Figura 2B.

Verbalización. Como se señaló anteriormente, esta etapa no se reduce a la simple comunicación del problema por intermedio del vocabulario técnico. Es necesario ordenar y sintetizar los hallazgos, recodificar las ideas que operan en un lenguaje simbólico y expresarlas con rigor, e incluso atender aspectos estéticos. También debe evitarse la redacción ambigua, principalmente cuando se plantea un problema con texto. Esta última observación es válida para problemas reducibles a modelos matemáticos, por intermedio de la interpretación matemática de complejidades lógico-lingüísticas. Por ejemplo, problemas conducentes a sistema de ecuaciones lineales, de proporcionalidad directa e inversa, entre otros. Para el caso del problema encontrado en la Figura 2B, un planteo adecuado puede ser el siguiente:

Problema objetivo. Sea ΔABC un triángulo equilátero de lado 2, *R* el punto medio del lado *BC*, y los puntos *P* y *Q* interiores a los segmentos *AC* y *AB* respectivamente, de manera que $\angle PRQ = 60º$. Encontrar el perímetro del triángulo ΔAQP.

En primer lugar, nótese que la longitud del lado es 2, a diferencia del problema de la Figura 2A. El motivo está dado por razones de comodidad en los cálculos y la posibilidad de conseguir un valor entero en la solución. Este aspecto es más estético que matemático y su realización ocurre principalmente en la etapa de verbalización.

Como puede obviamente ocurrir, la solución del problema objetivo no es similar a la del problema fuente, así que la analogía está presente solo en los objetos y sus relaciones, y no necesariamente en el camino argumentativo de las soluciones. En efecto, sean *u*, *v*, *w* las longitudes respectivas de los segmentos *AQ*, *AP* y *QP*. Si $Q \to A$ ($u \to 0$) entonces $\angle CPR \to 90°$, por tanto $CP \to ½CR = ½$ de donde $v < 2 – ½ = \frac{3}{2}$. De igual manera puede verificarse que $u < \frac{3}{2}$, y entonces $u + v < 3$ (I). Por otra parte, de las semejanzas de los triángulos ΔQBR y ΔRCP resulta $1/(2 – v) = (2 – u)/1$, de donde $uv = 2(u + v) – 3$ (II). Tomado en consideración la ley de los cosenos resulta $w^2 = u^2 + v^2 – 2uv \cdot cos60° = u^2 + v^2 – uv$, o bien $(u + v)^2 – 3uv = w^2$ (III). Sustituyendo (II) en (III) se obtiene $(u + v)^2 – 6(u + v) + 9 = w^2$ que equivale a la igualdad $(u + v – 3)^2 = w^2$. Ahora, de la desigualdad (I), se verifica $w = |u + v – 3| = –u – v + 3$, y finalmente el perímetro $P_{\Delta AQP} = u + v + w = 3$.

Para finalizar esta ejemplificación es importante señalar que, en la medida que sea más profunda la mirada retrospectiva al problema resuelto, mayor cantidad de problemas pueden salir a la luz. Por ejemplo, el problema original se enfocó hacia el perímetro de un triángulo y fue esta, precisamente, la característica métrica que ocupó la transferencia analógica hacia el nuevo problema. Sin embargo, pudieron seguirse otras ideas como las siguientes, al concluir el problema de la Figura 2A:

1. ¿Qué condiciones es necesario establecer, para que el área del triángulo sea constante?
2. ¿Cuál es el lugar geométrico del baricentro?

3. Supongamos que se prolongan los lados del cuadrado y se rota el $\angle PCQ$ libremente con centro en el vértice C. ¿Qué ocurre con los perímetros de los triángulos exteriores formados?
4. Las condiciones del problema son suficientes para que el perímetro sea constante. ¿Serán también necesarias?

Preguntas como estas movilizan el pensamiento. Respecto a la última de ellas puede demostrarse que, efectivamente, las condiciones del primer problema son también necesarias (una demostración puede encontrarse en el link Quora). Incluso, para un contexto universitario de cálculo, puede verse que en ambos problemas los ángulos encontrados son los únicos posibles. Considérese las figuras 2A y 2B respectivamente; si se denotan por x la amplitud de los ángulos variables $\angle QCB$ y $\angle QRB$, y se asumen ambas amplitudes de los ángulos $\angle PCQ$ y $\angle PRQ$ como un parámetro a, es posible mostrar que, en ambos casos, los perímetros vienen dados por sendas funciones cuyas derivadas se anulan para todo x del dominio de definición, exactamente cuando $a = \pi/4 + k\pi$ y $\pi/3 + k\pi$ con k entero, respectivamente. Por las condiciones de ambos problemas, todo esto tiene sentido solo para $k = 0$.

Las siguientes sentencias son expresiones matemáticas de ambas funciones, en un formato de texto para calculadoras en línea:

```
f(x)=sqrt((1-sin(2*(x+a)))/sin(x+a)^2+(1-
sin(2*x))/cos(x)^2)-cot(x+a)-tan(x)+2
```

```
g(x)=4-sin(x)/sin(2pi/3-x)-sin(pi-a-x)/sin(a+x-
pi/3)+sqrt((sin(pi/3)/sin(2pi/3-
x))^2+(sin(pi/3)/sin(a+x-pi/3))^2-
2*(sin(pi/3)/sin(2pi/3-x)*(sin(pi/3)/sin(a+x-
pi/3)*cos(a))
```

Puede estudiarse su comportamiento utilizando, por ejemplo, el paquete de cálculo simbólico *on-line* Calculadora de Derivadas, y sustituir algunos valores de a para compararlos en cada caso con $\pi/4$ y $\pi/3$, respectivamente. Además, una visualización bastante efectiva puede conseguirse con un paquete de geometría dinámica como GeoGebra, utilizando un deslizador para el parámetro a. La Figura 3 ilustra el comportamiento de la función $f(x)$ para cuatro valores del deslizador del intervalo $0 \leq a \leq 1$. La curva de línea verde simboliza el gráfico de la función, mientras que la de línea azul simboliza su derivada. Nótese que, salvo en los puntos de indefinición, para $a = \pi/4$ la derivada coincide con la función nula, mientras que la función $f(x)$ es naturalmente una constante, justo $f(x) = 2$, el valor encontrado para el perímetro del ΔPAQ.

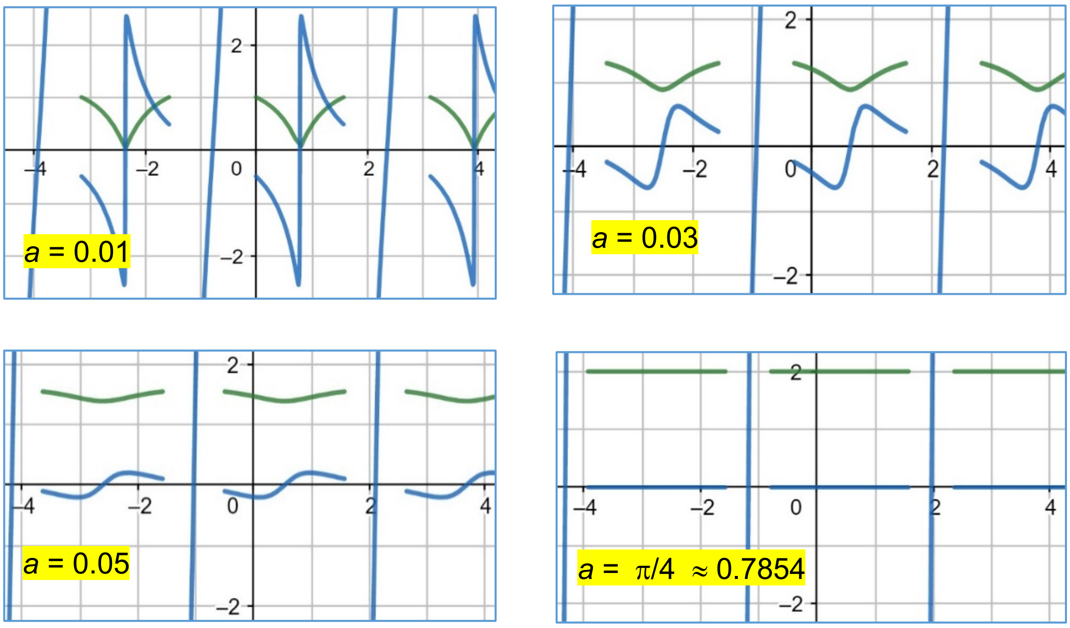

Figura 3. Una ilustración del comportamiento de la función *f(x)* para cuatro valores del parámetro
Fuente: elaboración propia con GeoGebra

Como experimento final, resulta interesante graficar ambas funciones *f(x)* y *g(x)* simultáneamente con GeoGebra. Si se activa recursivamente el deslizador sobre el intervalo $-5 \leq a \leq 5$, el estudiante puede notar que, en momentos diferentes, las familias de curvas parecen seguir un patrón similar de comportamiento. ¿Existirá un homeomorfismo que conecte ambos gráficos? Este tipo de análisis ayuda a pensar matemáticamente, como ejemplo de búsqueda de analogías entre analogías.

6. Reflexiones para el contexto escolar

Trasladar al aula enfoques como este suele ser un reto, incluso para el maestro. No siempre se cuenta con el tiempo adecuado, y también puede ocurrir que no se disponga de una respuesta inmediata ante algún problema fortuito que emerja durante el análisis. De todos modos, lo más importante es la huella que el planteo de nuevos problemas deja en el pensamiento. El *looking back* de Pólya (1957) no debe reducirse a la comprobación del problema resuelto, sino que la mirada es perspectiva además de retrospectiva. Son numerosos los aspectos que se pueden aprovechar en ese momento, como analizar la posibilidad de extender la vía de solución hacia otros problemas, explorar la utilidad del propio resultado que potencialmente podría servir de lema o teorema en ciertos contextos, reinterpretar el problema y visualizarlo geométricamente, y también plantear nuevos problemas.

Estos aspectos no deben verse por separado, sino en forma de sistema. La planificación de las clases puede ser el espacio didáctico donde el maestro seleccione problemas que faciliten este tipo de análisis. Cada problema tiene sus potencialidades, pero es necesario determinar qué aspectos pueden ser aprovechados en el aula. Los ejercicios rutinarios, aunque necesarios para la automatización de ciertos procedimientos, no suelen crear buenas oportunidades para el planteo de problemas interesantes. El germen fundamental para el hallazgo de nuevos problemas son los propios problemas. De todas formas, siempre es permisible la modificación de ciertos elementos de un ejercicio y crear así una situación de problema. De hecho, al hacerlo ya se ha dejado atrás el estigma de lo rutinario.

La estrategia descrita no constituye un algoritmo, sino un camino para emprender la búsqueda de nuevos problemas. Las etapas son momentos que se interconectan mutuamente. Existen regresiones que pueden implicar transformaciones, e incluso dos o más etapas pueden concurrir a la vez. La estructura de la estrategia metacognitiva SCABV+T presupone un orden general, el cual es favorable durante los primeros pasos. En cambio, no se recomienda hacer explícita esta estrategia durante el proceso docente-educativo. Lo importante es educar el camino de pensamiento y enfatizar el criticismo con flexibilidad y creatividad. Un enfoque así puede favorecer que el estudiante perciba una imagen más falibilista y humana del saber matemático.

Si bien los currículos suelen promover la implementación de analogías, la enseñanza de las matemáticas no aprovecha esto suficientemente en el aula. No es el planteo de problemas el único espacio que favorece el razonamiento analógico, sin embargo, las reflexiones anteriores muestran que tampoco esto le es ajeno. Las analogías ocupan un lugar importante en el desarrollo del pensamiento matemático, así que le corresponde al maestro identificar espacios de construcción conceptual, de planteo y resolución de problemas, de aprehensión de nuevas propiedades, donde es viable y oportuno desplegar el razonamiento analógico.

Una arista no menos importante del planteo de problemas consiste en el uso de paquetes computacionales. Por un lado, el cálculo simbólico es esencial para humanizar el trabajo o verificarlo, y así concentrar la atención sobre aquellos aspectos fundamentales. Por otro, la geometría dinámica favorece la visualización por intermedio de la movilidad. El uso de estos softwares también tiene la ventaja práctica de economizar el tiempo durante el planteo de problemas, para concentrar los esfuerzos intelectuales en aspectos medulares de la clase.

Para evaluar el desarrollo alcanzado por el estudiante, el maestro puede tomar en consideración el grado de dificultad de los conocimientos matemáticos implicados, la fluencia de relaciones desplegadas durante las etapas de búsqueda y asociación de propiedades, el número de interrogantes formuladas y su heterogeneidad, la profundidad y pertinencia de las transformaciones realizadas, los tipos de analogías que tienen lugar durante el razonamiento, el nivel de complejidad de los sistemas de relaciones y que se expresan en predicados de orden superior (Gentner, 1983), e incluso los tipos de ciclos (lineales o no lineales) experimentados. Otro aspecto importante de la estrategia SCABV+T consiste en que el proceso no queda abierto, sino que se relaciona con el proceso de resolución de problemas. Por tanto, la combinación de ambos aspectos favorece un mejor desarrollo del pensamiento matemático.

7. Conclusiones

El objetivo central del presente trabajo ha consistido en profundizar en la implementación de analogías, durante el proceso de planteo de problemas matemáticos. Un contexto propicio que favorece el uso de analogías es aquel ambiente de aprendizaje donde el planteo de problemas se manifiesta conscientemente y se expresa de manera intencional, con base en un espíritu crítico del conocimiento matemático. No es suficiente incorporar el planteo de problemas a los objetivos curriculares, e incluso determinar y asegurar las bases orientadoras de las acciones mentales a desplegar. Es necesario incorporar a la clase una concepción inquisitiva y falible del saber matemático, lo cual, además de constituir un reto para el aprendizaje es la expresión subyacente de una forma desarrolladora de la enseñanza de las matemáticas.

Como proceso psicológico, el planteo de problemas comprende un conjunto de etapas interconectadas, donde un mayor grado de complejidad de las interconexiones expresa un nivel superior de desarrollo de la habilidad para plantear problemas. El proceso de planteo puede ser enseñado a partir de estrategias previamente sistematizadas, a las cuales se incorporan particularidades propias de la individualidad del sujeto. Es decir, la base orientadora de las acciones puede apoyarse en las seis acciones descritas, cuyas interconexiones fueron ejemplificadas de manera concreta, pero en el proceso de interiorización cada individuo configura el camino a seguir y despliega sus propios recursos.

La estrategia SCABV+T constituye un recurso heurístico para encontrar nuevos problemas, por ello el análisis se centra en la forma en que cada sujeto lleva a cabo la interiorización, en dependencia del grado de criticismo en el salón de clases. Por tanto, en investigaciones posteriores es necesario tener en cuenta teórica y experimentalmente la diversidad de formas en que se interioriza la estrategia. Esto requiere del estudio del carácter generalizado (amplitud de situaciones donde se generan problemas), del carácter desplegado (especificidad de las acciones que realmente se utilizan) y del carácter asimilado (nivel de automatización y rapidez) de la estrategia.

Por otra parte, los constructos analizados no abarcan por completo la complejidad inherente a la naturaleza del planteo de problemas matemáticos en el quehacer didáctico. De especial interés es el proceso de perfeccionamiento y mejora continua del problema planteado. Aquí emergen razones de rigor, motivos estéticos, perspectivas de diagnóstico y evaluación, normas de calificación, entre otros aspectos.

Existen otros elementos también importantes que no han sido abordados con la profundidad necesaria en el presente trabajo, como el caso de la notable relación entre el planteo y la resolución de problemas. En relación a ello, un estudio experimental descrito por Cruz *et al.* (2016) revela que los estudiantes de mayor aptitud hacia la resolución de problemas tienden a plantear problemas más complejos, formulan preguntas consistentes con los datos y consumen menos tiempo en la etapa de búsqueda de relaciones y dependencias. En esta investigación también se reflexiona sobre el diseño de instrumentos, naturalmente necesarios para evaluar el planteo de problemas en el contexto escolar.

Desde el punto de vista teórico, resulta significativo el hecho de que las aportaciones de Gentner (1983) son viables durante el planteo de nuevos problemas. No solo se destaca la capacidad explicativa de la teoría estructuralista del mapeo de relaciones, para fundamentar cómo se articula el razonamiento analógico desde un objeto matemático hacia otro, sino también las potencialidades epistémicas que alberga su principio de sistematicidad. En efecto, al tratar de elegir sistemas de relaciones para luego decidir qué relaciones se conservan, el sujeto se encuentra en mejores condiciones de establecer analogías plausibles y no meras semejanzas. Por tanto, en el orden didáctico este principio revela la necesidad de explorar el objeto matemático en profundidad, abarcar la mayor cantidad posible de relaciones, para entonces intuir posibles analogías bajo un sentido heurístico.

Tomando en consideración los resultados obtenidos, puede afirmarse que la investigación aporta nuevos conocimientos sobre el uso de analogías y plantea problemáticas abiertas para estudios futuros. El uso de analogías es un componente del pensamiento matemático, así que es natural que se manifieste en cualquier ámbito de la actividad matemática como en el caso particular del planteo de nuevos problemas. Esto reafirma la importancia de las analogías en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, pero no solo en el sentido estrecho de la formación de un matemático sino en el sentido más amplio del desarrollo de razonamiento matemático.

Agradecimientos

Se agradece a la Universidad Antonio Nariño por el financiamiento de la presente investigación, desarrollada por el Grupo de Educación Matemática (COL0021659) en el marco del proyecto «Incidencia del Pensamiento Visual en el Proceso de Enseñanza Aprendizaje de la Matemática». También se agradece póstumamente al profesor Raúl Ochoa Rojas de la Universidad de Holguín, quien por muchos años dirigió el equipo nacional cubano participante en las olimpiadas internacionales de matemáticas y accedió amablemente a explicar cómo ideó, 20 años atrás., el ejemplo desarrollado en el presente trabajo.

Referencias

Abu-Elwan, R. A. (2007). The use of webquest to enhance the mathematical problem-posing skills of pre-service teachers. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 14*(1), 31-39.

Akay, H. (2010). The effect of problem posing oriented Analyses-II course on the attitudes toward mathematics and mathematics self-efficacy of elementary prospective mathematics teachers. *Australian Journal of Teacher Education, 35*(1), 59-75.

Barak, M., Ben-Chaim, D., & Zoller, U. (2007). Purposely teaching for the promotion of higher-order thinking skills: A case of critical thinking. *Research in Science Education, 37*(4), 353-369.

Bernardo, A. B. I. (2001). Analogical problem construction and transfer in mathematical problem solving. *Educational Psychology, 21*(2), 137-150.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1990). *The Art of Problem Posing* (2nd ed.). Erlbaum, Hillsdale, New Jersey (1st ed. in 1983).

Cai, J., & Hwang, S. (2019). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research* (in press). doi: 10.1016/j.ijer.2019.01.001.

Cankoy, O. (2014). Interlocked problem posing and children's problem posing performance in free structured situations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 12*(1), 219-238.

Charalambos, C., Kyriakides, L., & Philippou, G. (2003). Testing a comprehensive model for measuring problem solving and problem posing skills of primary pupils. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME*, vol. 2 (pp. 205-212). Honolulu: PME.

Chen, L., Van Dooren, W., Chen, Q., & Verschaffel, L. (2011). An investigation on Chinese teachers' realistic problem posing and problem solving ability and beliefs. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(4), 919-948.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(3), 149-158.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 243-270.

Crespo, S., & Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(5), 395-415.

Cruz, M. (2006a). *La Enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas*. La Habana: Educación Cubana.

Cruz, M. (2006b). A mathematical problem-formulating strategy. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. CIMT, University of Plymouth, United Kingdom, http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm.

Cruz, M. (2019). Aprendiendo a plantear nuevos problemas. Una experiencia con GeoGebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 32(1), 468-477.

Cruz, M. (2020). Planteo analógico de problemas matemáticos. Descubriendo relaciones entre el teorema de Walter y el de Morley. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 33*(1) (por aparecer).

Cruz, M., García, M. M., Rojas, O. J., & Sigarreta, J. M. (2016). Analogies in mathematical problem posing. *Journal of Science Education, 17*(2), 84-90.

Davis, J. (2013). Student understandings of numeracy problems: Semantic alignment and analogical reasoning. *The Australian Mathematics Teacher, 69*(2), 19-26.

Dunker, K. (1945). On problem solving. *Psychological Monographs, 58* (5, whole N.270). Washington, DC: American Psychological Association.

English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal context. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 83-106.

English, L. D. (2019). Teaching and learning through tathematical problem posing: commentary. *International Journal of Educational Research* (in press). doi: 10.1016/j.ijer.2019.06.014.

English L. D., Cudmore, D., & Tilley, D. (1998). Problem posing and critiquing: How it can happen in your classroom. *Mathematics Teaching in the Middle School, 4*(2), 124-129.

English, L. D., Fox, J. L., & Watters, J. J. (2005). Problem posing and solving with mathematical modeling. *Teaching Children Mathematics, 12*(3), 156-163.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. New York: The Falmer Press.

Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. Albany, New York: State University of New York Press.

Fetterly, J. M. (2010). *An Exploratory Study of the Use of a Problem-posing of Preservice Elementary Education Teachers' Mathematical Creativity, Beliefs, and Anxiety*. Electronic Theses, Treatises and Dissertations, paper 4468. Florida State University, Tallahassee, FL.

Galperin, P. I. (1969). Stages in the development of mental acts. In M. Cole & I. Maltzman (Eds.), *A Handbook of Contemporary Soviet Psychology* (pp. 249-273). New York: Basic Books, Inc.

Gentner, D. (1983). Structure-mapping: a theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7(2), 155-170.

Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1980). Analogical problem solving. *Cognitive Psychology, 12*(3), 306-355.

Guetmanova, A. (1989). *Logic*. Moscow: Progress Publishers.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1969). Mental images or intellectual operations and their development. In P. Fraisse & J. Piaget (Eds.), *Experimental Psychology: Its Scope and Methods*, vol. 7 (pp. 87-164). London: Routledge & Kegan Paul.

Kar, T., Özdemir, E., Sabri İpek, A., & Albayrak, M. (2010). The relation between the problem posing and problem solving skills of prospective elementary mathematics teachers. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 2*(2), 1577-1583.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 123-147). Erlbaum, Hillsdale.

Lavy, I., & Bershadsky, I. (2003). Problem posing via "what if not?" strategy in solid geometry: A case study. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(4), 369-387.

Lavy, I., & Shriki, A. (2010). Engaging in problem posing activities in a dynamic geometry setting and the development of prospective teachers' mathematical knowledge. *Journal of Mathematical Behavior, 29*(1), 11-24.

Leavy, A., & Hourigan, M. (2019). Posing mathematically worthwile problems: developing the problema-solving skills of prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education* (in press). doi: 10.1007/s10857-018-09425-w.

Leontiev, A. N. (1975*). Actividad, Conciencia y Personalidad*. La Habana: Pueblo y Educación.

Lewis, T., Petrina, S., & Hill, A. M. (1998). Problem posing-adding a creative increment to technological problem solving. *Journal of Industrial Teacher Education, 36*(1), 5-35.

Linn, M. C. (2000). Designing the knowledge integration environment. *International Journal of Science Education, 22*(8), 781-796.

Lowrie, T. (2002). Designing a framework for problem posing: young children generating open-ended tasks. *Contemporary Issues in Early Childhood, 3*(3), 354-364.

Morrison R. G., & Cho, S. (2008). Neurocognitive process constraints on analogy: what changes to allow children to reason like adults? *Behavioral and Brain Sciences, 31*(4), 391-392.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va: NCTM.

Novick, L. R., & Holyoak, K. J. (1991). Mathematical problem solving by analogy. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 17*(3), 398-415.

Ochoa, R. (1998). Problema 18. *Siproma, 2*(3), 22.

Pehkonen, E. (1995). Using open-ended problems in mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 27*(2), 55-57.

Peled, I. (2007). The role of analogical thinking in designing tasks for mathematics teacher education: An example of a pedagogical ad hoc task. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(4), 369-379.

Poincaré, H. (1914). *Science and Method*. New York: Thomas Nelson & Sons.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning* (vol. I, Induction and analogy in mathematics). Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. (1957). *How to Solve It: A new Aspect of Mathematical Method* (2nd ed.). Princeton: Princeton University Press (1st ed. in 1945).

Schlimm, D. (2008). Two ways of analogy: Extending the study of analogies to mathematical domains. *Philosophy of Science, 75*(2), 178-200.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19-28.

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). Analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 521-539.

Slepkan, Z. I. (1983). *Fundamentos Psicológicos y Pedagógicos de la Enseñanza de las Matemáticas: Un Manual Metodológico* (en ruso). Kiev: Radianska Shkola.

Sternberg, R. J., & Sternberg, K. (2012). *Cognitive Psychology* (6th ed.). Belmont: Wadsworth Cengage Learning.

Stoyanova, E. (2003). Extending students' understanding of mathematics via problem-posing. *Australian Mathematics Teacher, 59*(2), 32-40.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing. In P. Clarkson (Ed.), *Technology in Mathematics Education* (pp. 518-525). Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Ulam, S. M. (1976). *Adventures of a Mathematician*. New York: Charles Scribner's Sons.

Vosniadou, S. (1995). Analogical reasoning in cognitive development. *Metaphor and Symbolic Activity, 10*(4), 297-308.

Wang, X., & Liu, D. (2008). Problem posing based on what-if-not strategy. *Journal of Mathematics Education, 17*(4), 26-29.

Weil, A. (1960). De la métaphysique aux mathématiques. *Œuvres* (pp. 408-412), vol. II, Springer-Verlag.

Wilbers, J., & Duit, R. (2006). Post-festum and heuristic analogies. In P. J. Aubuston *et al.* (Eds.), *Metaphor and Analogy in Science Education, 30* (pp. 37-49). Dordrecht: Springer.

Autores:

Cruz Ramírez, Miguel: Profesor titular de la Universidad de Holguín (UHo, Cuba), doctor en Ciencias Pedagógicas y máster en Didáctica de la Matemática. Su línea principal de investigación es el planteo y resolución de problemas matemáticos. E-mail: mcruzr@uho.edu.cu

Rojas Velázquez, Osvaldo Jesús: Coordinador de programas de maestría y doctorado de la Universidad Antonio Nariño (UAN, Colombia), doctor en Ciencias Pedagógicas. Su principal línea de investigación es la visualización en Educación Matemática. E-mail: orojasv69@uan.edu.co

Villarraga Baquero, Beatriz Avelina: Docente de la Universidad de los Llanos (UNILLANOS, Colombia), doctora en Educación Matemática. Sus principales líneas de investigación comprenden la Educación Matemática y la Investigación de Operaciones. E-mail: bvillarraga@unillanos.edu.co