UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2008, Número 14, páginas 25 - 35
ISSN: 1815-0640

La proporción áurea en el arte,

para alumnos de Educación Media

Alejandra Cañibano

Resumen

Un número irracional, el Número de Oro, puesto en relación con distintos conceptos de la geometría resulta en un entramado propio de la matemática y de otras ciencias también presentes en la educación secundaria. Actividades de este tipo favorecen a la formación del estudiante, contribuyen en el proceso de enseñanza y aprendizaje y aportan a la formación cultural de los educandos para este nivel educativo.

Abstract

An irrational number, the "Gold Number", related with different concepts of the geometry results in a lattice characteristic of mathematics and another sciences, also present in the secondary education. Activities of this type favor the student's formation, contribute in the teaching-learning process and contribute to the cultural formation of the students for this educational level.

Introducción

En la Educación Media, generalmente, las disciplinas curriculares se imparten en forma independiente sin relación unas con otras. Una interrelación entre dichos contenidos contribuiría a la formación del estudiante, lo estimularían en el proceso de enseñanza y aprendizaje y les otorgaría una formación cultural generalista.

Los conocimientos geométricos se imparten desde una temprana edad escolar; la geometría aparece en distintas épocas históricas acompañada de los conceptos de armonía, belleza, proporción. Los números irracionales es otro de los temas que se incluyen obligatoriamente a la hora de clasificar los conjuntos numéricos. Sucede que al tratar esta temática el trabajo se reduce únicamente a clasificarlos como tales.

Definiendo el número de oro

El número de oro, Φ (FI), también conocido como la proporción áurea se obtiene cuando se busca definir una proporción dividiendo un segmento en dos partes. Es un número que comparte el grupo de los números metálicos y esta relacionado al denominado rectángulo de oro.

El valor numérico de Φ es de 1,618... , Φ es un número irracional.

Su definición es la siguiente: "Dos números A y B están en la proporción de oro si (A + B) es a A lo mismo que A es a B".

En símbolos: $\frac{(A+B)}{A}=\frac{A}{B}$

$$B\cdot(A+B)=A^2 \quad ; \quad BA+B^2=A^2 ; \quad A^2-AB-B^2=0$$

Resolviendo para A: $A=\frac{B\pm\sqrt{B^2+4B^2}}{2}=\frac{B\pm\sqrt{5B^2}}{2}=\frac{B(1\pm\sqrt{5})}{2}$

Luego la solución positiva de la ecuación resulta en la proporción $\frac{A}{B}=\frac{(1+\sqrt{5})}{2}=1{,}618033989$ dando por resultado el número Φ.

Una propiedad que posee este número es la siguiente: $\Phi - 1=\frac{1}{\Phi}=0{,}618033989$

El rectángulo áureo es un rectángulo cuyos lados están en una proporción igual a la razón o proporción de oro. Esto significa que dado un rectángulo de dimensiones L el lado mayor y W el lado menor, el cociente $\frac{L}{W}=\Phi$.

Una mirada hacia la historia y el arte

En las matemáticas pitagóricas y después medievales y renacentistas, determinadas constantes entre números y formas supieron erigirse en modelos de armonía y en cánones de belleza. En diversas épocas de la historia y revisando la bibliografía se encuentra que muchos edificios fueron construidos teniendo en cuenta la proporción áurea. Desde la época de los egipcios a la época de los romanos son las tres construcciones que se tratarán en este trabajo: la Pirámide de Keops, el Partenón Griego y la Tumba Rupestre de Mira.

Pirámide de Keops

La historia cuenta que desde su llegada al trono, hace más de 4500 años (año 2580 a. C.), *el faraón* Keops ordenó la construcción de una gigantesca pirámide que sería su tumba y que duraría para toda la eternidad. El lugar elegido fue la meseta de Gizeh, un sitio cercano al río Nilo, para que los bloques de piedra pudieran ser transportados en balsas.

El faraón llamó a su pirámide Aket Keops que significa el “Horizonte de Keops”, ya que esperaba ascender todos los días, como el Sol, desde su horizonte propio que era la Gran Pirámide.

Según las teorías arqueológicas, para construir esta obra maestra de la arquitectura egipcia, se tardaron unos 20 años y trabajaron más de cien mil hombres que no eran esclavos, sino obreros remunerados. En la construcción de la vía para transportar los enormes bloques de piedra calcárea desde la cantera, se tardaron más de diez años.

Se esculpen en las tumbas de los faraones un conjunto de fórmulas denominadas los Textos de las Pirámides destinadas a facilitar al difunto la ascensión.

Matemáticamente el cociente entre la altura de alguno de los triángulos que forman la pirámide y el lado es 2Φ. Por su altura cercana a los 150 metros, y su base de más de cinco hectáreas, no es comparable a ningún edificio levantado por manos humanas.

Entre los datos que se detallan puede obtenerse el resultado indicado

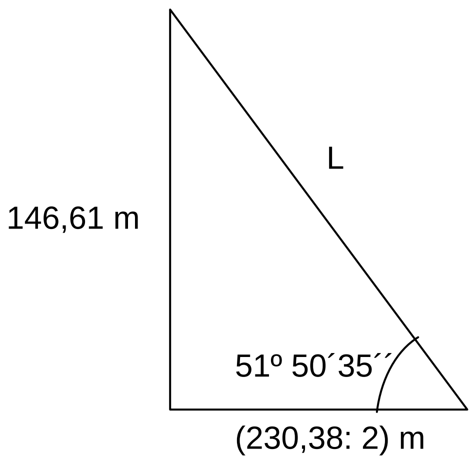
Altura total inicial = 146,61 m

Altura presente real = 136,86 m

Base 230,38 m × 230,38 m = 53.074,94 m^2

Ángulo: 51º 50' 35".

Haciendo los cálculos correspondientes se tiene:



$$\mathrm{L} = \sqrt{(146{,}61)^2 + (230{,}38 \div 2)^2} = 186{,}45\mathrm{m}$$

$$\frac{186{,}45}{146{,}61} = 1{,}2717414$$

$$\frac{1{,}2717414}{2} = 0{,}6358706$$

Este resulta en un valor aproximado a 0,618033989, valor que surge de la propiedad de la que goza el número de oro respecto a su valor inverso.

El Partenón griego

El edificio más emblemático es El Partenón, construido entre el 447-438, y cuya obra escultórica se prolongó hasta el 432. En esta obra se contemplan las ideas estéticas del momento: los polos del pensamiento artístico, lo absoluto y lo relativo, en pos de lograr un extraordinario equilibrio.

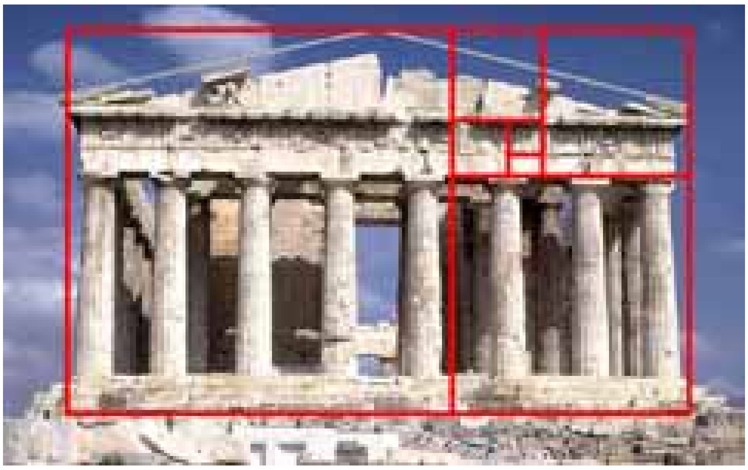
Su nombre en griego procede de párthenos que significa virgen, y hace referencia a Atenea Partenos, la diosa protectora de Atenas. Creado bajo la dirección de Fidias en 447-438 a.C. en el periodo de Pericles, su principal arquitecto fue Menesicles. Los griegos buscaban la belleza y la forma perfecta para expresarla y esto lo encontraban dando un realismo perfecto a sus esculturas.

El Partenón es un templo dórico períptero octóstilo lo que quiere decir que tiene ocho columnas en las dos fachadas más cortas y 17 columnas en las laterales.

Pitágoras afincado en el sur de la península itálica, estableció un sistema de proporciones que unía la arquitectura con las matemáticas, fijando los principios que debía tener un templo, basándose en valores numéricos, para determinar su simetría. En la práctica, estableció las dimensiones de los templos de acuerdo con el principio del "doble más uno"; es decir, que si una fachada tenía 4 columnas de ancho, debía tener 9 de largo. Esa norma caracterizó las dimensiones del Partenón de Atenas con 8 columnas de ancho por 17 columnas laterales.

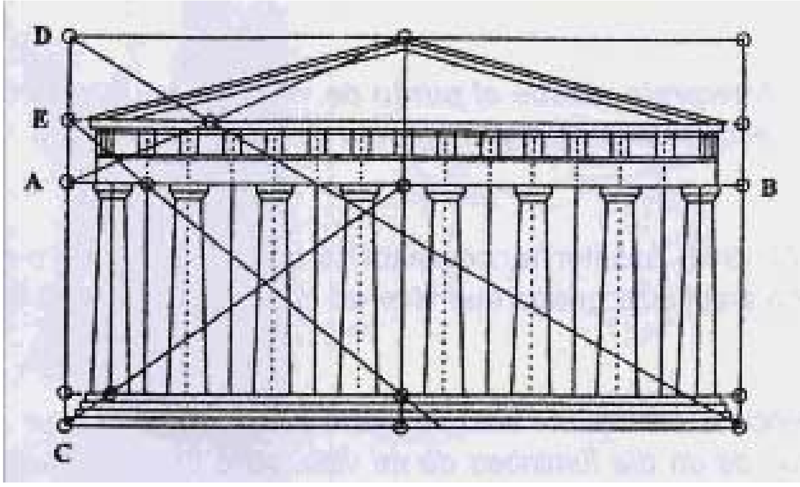
Su base mide 70 metros de largo por 31 metros de ancho y todo él está construido de mármol del monte Pentélico. No hay ninguna columna de igual altura, no hay líneas rectas, se hizo así para corregir la perfecta visión de la fachada.

La aplicabilidad de este rectángulo áureo fue utilizada antiguamente en arquitectura en el Partenón griego.



Partenón griego

http://www.elhistoriador.es/imagenes/numero%20partenon.jpg



En la figura se puede comprobar que $AB/CD = \Phi$. Hay más cocientes entre sus medidas que dan el número áureo, por ejemplo: $AC/AD = \Phi$ y $CD/CA = \Phi$.

Entonces teniendo en cuenta las siguientes dimensiones:

Largo: 69 metros

Ancho: 30 metros (AB)

Altura: 18 metros (CD)

Por cálculos auxiliares se determina que las longitudes AC y AD son respectivamente 11metros y 6 metros aproximadamente.

$$AC + AD = 18\,m = CD$$

$$\frac{AC}{AD} = \Phi = 1{,}6180339... \quad \therefore \quad \frac{18 - AD}{AD} = 1{,}6180339 \quad \Rightarrow 18 = (1{,}6180339 + 1)AD$$

$AD \cong 6{,}87\,m$ y por lo tanto $AC \cong 11{,}13m$

Ahora para probar las proporciones:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{30}{18} = 1{,}6666667... \qquad \frac{AC}{AD} = \frac{11{,}13}{6{,}87} = 1{,}6200873... \qquad \frac{CD}{CA} = \frac{18}{11{,}13} = 1{,}6172507...$$

resultando aproximaciones muy buenas al número áureo.

Tumba rupestre de Mira

Este monumento está citado en la mayoría de los trabajos matemáticos que tratan sobre la proporción áurea pero normalmente no se brindan detalles acerca de la época histórica, arquitectónica, social en la que fue construido.

Aunque algunos eruditos comparan a Myra (o Mira) con una ciudad Mira en Arzawa pero no hay prueba para eso.

Se sabe que actualmente es la ciudad de Demre, ahora una pequeña ciudad en Licia, Turquía. Está situada entre el río Myros, en el llano aluvial fértil entre el Alaca Dag, la gama de Massikytos y el Mar Egeo.

La actual ciudad turca de Demre se levanta sobre el emplazamiento de la antigua Myra, una de las poblaciones con más peso en la confederación licia, que existía al menos desde el siglo V a C.

Alcanzó gran fama, en la época bizantina, gracias a San Nicolás, nacido en la vecina ciudad de Patara que tras viajar por Palestina, regresó a Licia para ocupar la sede del obispado de Myra a principios del IV d. C. convirtiéndose a su muerte en una ciudad meta de peregrinación para toda gente de Europa y en el centro económico-político de Licia. Hoy se puede visitar en Demre la iglesia paleocristiana de San Nicolás, fundada en el IV, donde fue enterrado el obispo cuya legendaria vida inspiró en la imaginación popular el personaje de San Nicolás, (Papa Noel, Santa Claus de las navidades).

Graderío del teatro romano, con necrópolis rupestre licia en el monte del fondo.

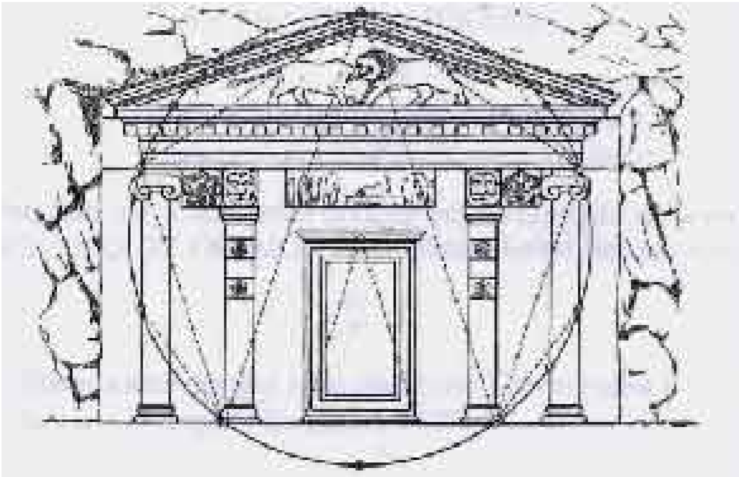
http://www.fotoaleph.com/Colecciones/TurquiaRupestre/TurquiaRupestre-foto32.html

La necrópolis rupestre licia, que normalmente es citada como la Tumba Rupestre de Mira, trepa por el escarpado monte que sirve de telón de fondo al teatro, y data del siglo V a. C. Una vez más, las tumbas esculpidas en la roca retoman en piedra una tipología arquitectónica que en su origen era de madera. Reproducen frontispicios de templos y viviendas. Alguna de las sepulturas, sin dejar de ser monolíticas y formar una unidad con la roca de la montaña, se asemejan a un sarcófago licio exento, es decir como monolitos independientes. Muchas de ellas están además decoradas con relieves de hombres o animales. Despunta una tumba sobre cuya arruinada cámara corre un friso con relieves de escenas protagonizadas por figuras humanas esculpidas con un extraordinario refinamiento y sentido de la proporción. Muestran episodios de la vida de un guerrero, que sería el difunto, a quien se le representa recostado asistiendo a un banquete funerario.

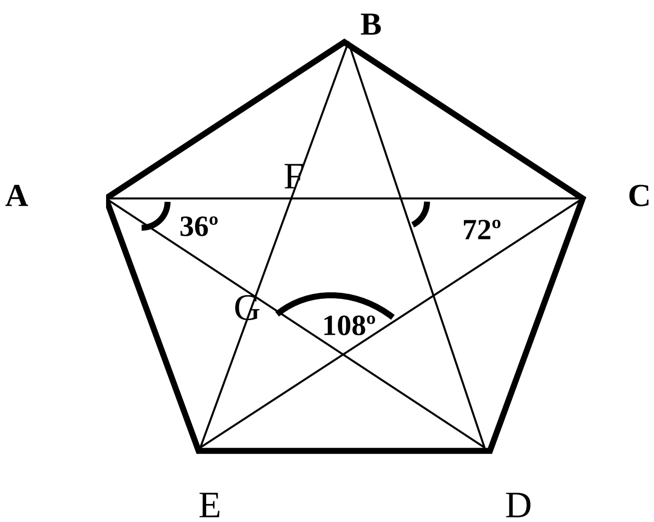
Tumba Rupestre de Mira.

http://www.fotoaleph.com/Colecciones/TurquiaRupestre/TurquiaRupestre-index3.html

El cociente entre la diagonal de un pentágono regular y el lado de dicho pentágono es el número de oro y en un pentágono regular está basada la construcción de la Tumba Rupestre de Mira en Asia Menor. Dicho de otra manera basa su construcción en un pentágono áureo, en el que el cociente de la diagonal y el lado de dicho pentágono es el número áureo.

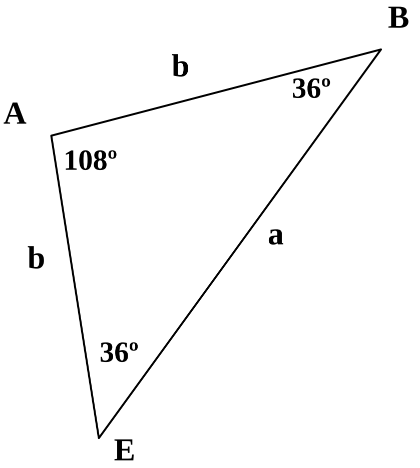


Como en la investigación no se han conseguido las dimensiones de este edificio bien vale la demostración matemática como fundamento de su construcción. Para ello se considera un pentágono regular en el cual se han dibujado las diagonales. En esta figura sólo aparecen tres ángulos diferentes. Miden 36º, 72º y 108º. La relación entre estos ángulos es la siguiente: 72 es el doble de 36 y 108 es el triple de 36.



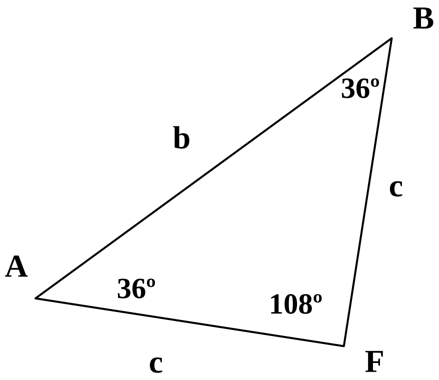
Hay varios tipos diferentes de triángulos isósceles, de los cuales se seleccionan tres: los triángulos $A\hat{B}E$, $A\hat{B}F$ y $A\hat{F}G$. El resto de triángulos son semejantes a alguno de estos y no aportan información adicional. Finalmente, hay cuatro segmentos diferentes en estos triángulos, denominados: BE = a, AB = AE = b, AF = BF = AG = c y GF = d. Las longitudes de estos segmentos cumplen: a>b>c>d.

Considerando cada uno de estos triángulos por separado y aplicando el Teorema del Seno.



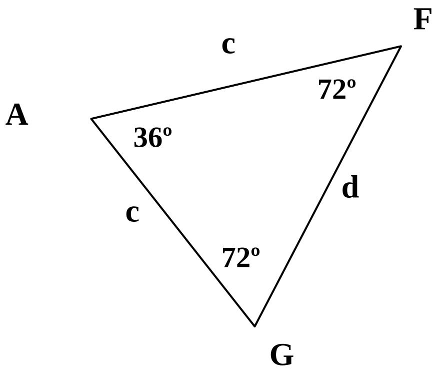
Triángulo $A\hat{B}E$

$$\frac{a}{\text{sen }108°}=\frac{b}{\text{sen }36°}\rightarrow\frac{a}{b}=\frac{\text{sen }108°}{\text{sen }36°}$$



Triángulo $A\hat{B}F$

$$\frac{b}{\text{sen }108°}=\frac{c}{\text{sen }36°}\rightarrow\frac{b}{c}=\frac{\text{sen }108°}{\text{sen }36°}$$



Triángulo $A\hat{F}G$

$$\frac{c}{\text{sen }72°}=\frac{d}{\text{sen }36°}\rightarrow\frac{c}{d}=\frac{\text{sen }72°}{\text{sen }36°}=\frac{\text{sen }108°}{\text{sen }36°}$$

Como 72º =180º-108º, se verifica que sen72º = sen108º.

En consecuencia se pueden establecer las siguientes proporciones:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{\text{sen }108°}{\text{sen }36°}=1{,}618033988....$$

Es decir, una vez ordenadas las longitudes de los cuatro segmentos de mayor a menor, la razón entre cada una de ellas y la siguiente es constante e igual a nuestro número de oro.

Tomando la primera de las proporciones, teniendo en cuenta que $c=a-b$ y haciendo b = 1:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\rightarrow\frac{a}{b}=\frac{b}{a-b}\rightarrow\frac{a}{1}=\frac{1}{a-1}\rightarrow a^2-a-1=0\rightarrow a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$$

Es decir, dos de estos segmentos consecutivos cumplen la proporción áurea.

Como consecuencia, se verifica $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{\text{sen }108°}{\text{sen }36°}$.

Conclusiones

Aprender investigando, Compiano y Giarrizo (1995) sostienen que la investigación enfrenta al alumno con nuevas situaciones, aumentando su acción y comprensión, al mismo tiempo que estimula el desarrollo de personalidades más creativas y con mayor dosis de autoconfianza. Esto entusiasma a los alumnos y los motiva, apasionándolos por justificar su verdad científica.

Si se parte de que la realidad es una sola y se la segmenta para poder comprenderla y abarcarla mejor, se debe pensar que el alumno deberá reorganizar sus conocimientos, no en función de las áreas en que las instituciones lo clasifican, generalmente vinculadas directamente con la currícula y la formación personal, para poder utilizarlos incidiendo sobre una realidad única. A la vez, la fragmentación de los conocimientos obstaculiza la capacidad de comprender fenómenos complejos (Anderè et al., 2003). La síntesis de conocimientos es probablemente una de las carencias más importante en la actual formación escolar, tanto a nivel de las actividades de enseñanza-aprendizaje como en las evaluaciones y ésta es probablemente una de las causas de fracaso más común entre alumnos con potencialidades destacadas. En el nivel medio se enseña matemática pretendiendo que el alumno domine las operaciones abstractas, poco se hace por enseñar matemática aplicada a la vida diaria y al conocimiento.

Bibliografía

- C. Anderè, A.E. Felipe, T. Domínguez (2003): La investigación dirigida por los alumnos como estrategia para el trabajo interdisciplinar en Ciencias Veterinarias. Revista Iberoamericana de Educación (Organización de Estados Iberoamericanos). Experiencias e Innovaciones
- B. Compiano, A. Giarrizzo (1995): Investiguemos para aprender. Una estrategia no convencional en matemática. Serie Temas y Problemas, Cuaderno Nº 2. A-Z Editora, Buenos Aires, Argentina.
- J. Glancey (2001): Historia de la Arquitectura. Editorial La Isla
- G. Davis, J. Fortey, C. Kondeatis (2000): Historia Mundial Ilustrada. Editorial Konemann.
- B. Lugan B (2003): Los Egipcios. De los Orígenes hasta Nuestros Días. Editorial Ariel. Colección Pueblos
- J. Rey Pastor, J. Babini (2000): Historia de la Matemática 1. Editorial Gedisa S.A.
- J. Sellier (2002): Atlas de los Pueblos del Asia Meridional y Oriental. Editorial Paidos. Colección Orígenes.
- H. Stierlin (2001): Grecia de Micenas al Partenón. Editorial Taschen.
- H. Stierlin (1999): Turquía. Editorial Taschen.
- D. Ware, B. Beatty (1998): Diccionario Manual Ilustrado de Arquitectura. Editorial Riverside Agency.
- D. Wildung (2001): Egipto. De la Prehistoria a los Romanos. Editorial Taschen.

Alejandra Cañibano, nació en Azul (Argentina) el 13 de julio de 1963. Es Agrimensora y posee una maestría en Metodología de la Investigación Biológica Aplicada a las Ciencias Agropecuarias. Es docente de matemática en distintos niveles educativos. Ha escrito diversos trabajos con la finalidad de mostrar las bondades de la matemática aplicada. acanibano@speedy.com.ar