UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2008, Número 14, páginas 37 - 48
ISSN: 1815-0640

Resolução de desigualdades com uma incógnita: uma análise de erros

Tânia M. M. Campos y Vera Helena Giusti de Souza

Resumen

Pedimos, a um grupo de ingressantes de um curso de Matemática-Licenciatura, que resolvessem algumas desigualdades algébricas, deixando registrados os passos da resolução. Analisamos as respostas, buscando identificar se dominavam aspectos formais, algorítmicos e intuitivos, conforme Fischbein (1993). Nenhum deles mostrou conhecer os aspectos formais; mais de 50% não dominava os aspectos algorítmicos e usava apenas os intuitivos. Entendemos que uma abordagem funcional gráfica, portanto não estritamente algébrica, pode auxiliar a aprendizagem da resolução algébrica de desigualdades.

Abstract

We asked a group of sophomore students, from a course for future Mathematics teachers, to solve some algebraic inequalities with one real unknown, leaving behind the steps of their resolutions. In their answers we tried identifying formal, intuitive and algorithmic aspects as recommends Fischbein (1993). None seems knowing formal aspects; more than 50% don't master algorithmic aspects as well and uses just intuitive ones. We understand that a functional graphic approach, then not strictly algebraic, can help inequalities algebraic resolution learning process.

Introdução

Muitas pesquisas e experiências mostram que estudantes em geral não sabem resolver desigualdades com uma incógnita real. Usam técnicas algébricas próprias para resolver equações (TSAMIR; BAZZINI, 2003; KIERAN, 2004) ou usam regras sem significado (LINCHEVSKI; SFARD, 1991). De qualquer forma, a literatura indica dificuldade nessa aprendizagem (BAZZINI; TSAMIR, 2003; DE SOUZA; CAMPOS, 2005).

Ao trabalhar com uma turma de 21 alunos do primeiro ano de um Curso de Matemática para futuros professores, percebemos que os mesmos tinham dificuldades em resolver desigualdades. Assim, elaboramos e aplicamos um instrumento diagnóstico com seis desigualdades, solicitando que ao resolverem as inequações deixassem os passos da resolução.

Para análise dos protocolos, inspiramo-nos nas argumentações de Fischbein (1993) de que numa atividade matemática estão presentes aspectos formais, algorítmicos e intuitivos e que é preciso interagir e inter-relacionar estes aspectos para que a aprendizagem ocorra. Assim, tentamos identificar tais aspectos nas resoluções constantes nos protocolos.

Vale a pena destacar que nossa principal motivação era ter um diagnóstico dos conhecimentos prévios destes alunos, visando uma posterior elaboração e aplicação de uma seqüência didática para discutir uma abordagem funcional gráfica para o ensino de desigualdades com uma incógnita, como uma alternativa para a abordagem estritamente algébrica.

Os aspectos de Fischbein

Concordamos com Fischbein (1993) que precisamos apresentar a Matemática, aos alunos, como uma atividade inventada por seres humanos, como um processo criativo, que tem momentos de iluminação, de hesitação, de aceitação e de refutação. No nosso entender, a Matemática precisa ser mostrada, não só como um encadeamento lógico de definições, axiomas, proposições e teoremas, mas principalmente como um processo de tentativas, erros, correções, refinamentos, com espaço para produzir conjecturas, elaborar justificativas e avaliar formalmente e intuitivamente uma afirmação.

A partir dessa premissa, Fischbein faz uma argumentação, com exemplos históricos e de aplicação, para expor a teoria de que na análise de uma atividade matemática, devemos considerar três aspectos básicos: o formal, o algorítmico e o intuitivo.

O *aspecto formal* diz respeito a axiomas, definições, teoremas e demonstrações. As componentes formais precisam estar bem entendidas e ativas, para que seja desenvolvido um processo de raciocínio. Elas precisam ser inventadas ou aprendidas, organizadas, confrontadas e ativamente usadas pelo sujeito: entender o significado do rigor; desenvolver o sentimento de coerência e consistência; caprichar no pensamento encadeado, na presença ou não de restrições. Acreditamos que as componentes formais fazem parte natural das potencialidades de todo ser humano, mas precisam ser lapidadas, por meio de um processo educacional adequado.

O *aspecto algorítmico* é o que está ligado às técnicas de resolução e às estratégias do tipo padrão.

É ilusório pensar que o conhecimento dos aspectos formais é suficiente para que um sujeito saiba aplicá-los à resolução de um problema. A recíproca também é verdadeira, pois um sujeito que só conhece os aspectos algorítmicos será, após algum tempo ou até mesmo imediatamente, incapaz de aplicar o algoritmo em uma situação não usual. Precisamos desenvolver tanto as habilidades como o entendimento dos porquês e isto só é possível se aplicarmos intensivamente os algoritmos aprendidos, sempre baseados nos aspectos formais.

Citamos um exemplo, ligado às equações, vivenciado por nós. Para resolver $(x-1)^2 = -1$, vários alunos não conseguem ver, de início, que não existe solução em IR. Desenvolvem o binômio, de forma “decorada”, erram e conseguem alguma solução. E não voltam à equação original, para ver que esta não pode ser verdadeira.

Podemos citar ainda Tsamir e Bazzini (2001) que mostram que 46% dos alunos pesquisados (15-16 anos) não aceitam que x=0 seja solução da inequação $5x^4 \leq 0$, evidenciando uma não inter-relação entre os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos. Bastaria uma análise da estrutura da inequação para determinar as soluções.

O *aspecto intuitivo* pode ser caracterizado por uma cognição intuitiva, um entendimento intuitivo ou uma solução intuitiva. Diz respeito à aceitação direta de uma noção, de um teorema ou de uma solução, sem necessidade de qualquer demonstração. No caso das inequações, quando os alunos “multiplicam em cruz” para deixar a incógnita no numerador, por exemplo, estão deixando que o aspecto intuitivo se sobreponha aos aspectos formais e algorítmicos: é preciso “isolar” a incógnita, para chegar à solução.

Às vezes, as componentes formais, intuitivas e algorítmicas interagem, mas usualmente, no processo de aprendizagem ou no entendimento e na resolução de um problema, interações conflitantes podem aparecer: um esquema de solução é aplicado inadequadamente, em detrimento de restrições formais; um esquema de resolução é aplicado erroneamente, apesar de um entendimento intuitivo e potencialmente correto. Mas usualmente, segundo Fischbein, é a interpretação intuitiva, baseada numa experiência individual primitiva e limitada, porém fortemente enraizada, que anula o controle formal ou os pressupostos da resolução algorítmica e assim distorce ou mesmo bloqueia a reação matemática correta. Conseqüentemente, as intuições podem trazer dificuldades para a aprendizagem.

O pesquisador conclui a argumentação, afirmando que as interações e os conflitos entre as componentes formais, algorítmicas e intuitivas de uma atividade matemática são muito complexos e precisam ser identificados e entendidos.

O grupo de estudantes

Os sujeitos eram alunos de licenciatura em Matemática e não estavam ainda envolvidos com salas de aula e com livros didáticos.

O perfil dos sujeitos: (1) a média de idade é 25 anos, com dois alunos de 45 anos. Não contando estes dois, a média cai para 22,8 anos. Estamos, portanto, trabalhando com um grupo de alunos mais velhos do que o esperado no primeiro ano do Ensino Superior (18-19 anos); (2) pelo menos 17 deles cursaram o Ensino Básico (11-18 anos) na cidade de São Paulo; (3) 17 fizeram Ensino Fundamental

(11-14 anos) em escola pública; dois, em escola particular; e um passou da escola pública para a particular na 5a série (11 anos); (4) 17 alunos fizeram Ensino Médio (15-18 anos) em escola pública e 3, em particular. (5) 8 alunos não utilizaram livro didático; 6, só de 5a a 8a séries; e 6, sempre utilizaram. Como 14 dos 20 alunos não utilizou livro didático no Ensino Médio (15-18 anos), onde a abordagem funcional das inequações deveria ocorrer, consideramos que o conhecimento que tinham deste assunto não estava influenciado pelo uso de um livro didático; (6) 17 alunos fizeram cursinho pré-vestibular (18-20 anos) e 3 não. Particularmente, acreditamos que as abordagens adotadas nestes cursinhos não são as mais indicadas para uma aprendizagem efetiva, porque são, em geral, calcadas nos procedimentos algébricos.

A questão aplicada

Resolva as inequações abaixo, explicitando qual é a incógnita. Deixe os passos de sua resolução.

(a) $-3x < 6$ (b) $\frac{t}{-2} > 4$ (c) $|v| < 3$

(d) $y^2 \leq 25$ (e) $\frac{5}{u} < \frac{5}{2}$ (f) $10 > 5x$

Objetivo da questão

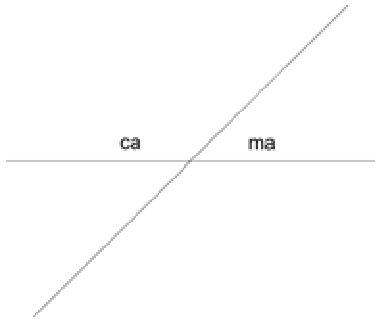
Identificar os aspectos formais, intuitivos e algorítmicos, segundo Fischbein (1993), presentes na resolução de desigualdades algébricas com uma incógnita real.

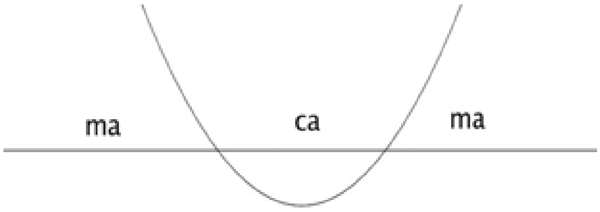
Análise didática

Este trabalho foi realizado depois que os alunos já haviam estudado funções e gráficos na disciplina Cálculo 1, usualmente do primeiro ano de cursos da área de Ciências Exatas. Esperávamos que já houvessem trabalhado tanto o tratamento dos registros gráfico e algébrico como as conversões entre esses registros, pelo menos do registro algébrico para o gráfico (Duval, 2000), no caso do objeto função. Apesar disto, percebemos que os alunos demonstravam dificuldades para entender uma abordagem funcional gráfica para a resolução de desigualdades com uma incógnita.

Professores de Matemática do Ensino Básico (11-18 anos), com os quais temos tido contato e livros didáticos de Matemática que já analisamos trabalham o assunto inequação com ênfase em procedimentos e ainda em casos separados, associando-os ao "Estudo do sinal da função": primeiro esgotando o assunto para as desigualdades polinomiais de primeira ordem, depois para as polinomiais de segunda ordem e finalmente trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

Os procedimentos, nos dois primeiros casos, são enfatizados por esquemas do tipo





onde *ca* significa "sinal contrário de *a*", *ma*, "mesmo sinal de *a*" e *a* é o coeficiente do termo de maior grau. Para as desigualdades envolvendo produto ou quociente, o esquema utilizado é o conhecido como "varal".

De qualquer forma, apesar de aparecerem as palavras função, gráfico de função e, em alguns livros, resolução funcional, parece-nos que a abordagem usualmente adotada causa dificuldades para o entendimento até do que seja uma resolução algébrica de desigualdades.

A questão foi resolvida individualmente pelos alunos, sem a interferência do professor. Não havia pressão de tempo, de nota e nem mesmo de "certo ou errado". Os estudantes sabiam que queríamos saber o conhecimento prévio deles, para desenvolver, posteriormente, situações de ensino e de aprendizagem sobre a resolução funcional gráfica de desigualdades com uma incógnita.

A questão foi constituída de seis desigualdades com uma incógnita real e pedido que deixassem, nos protocolos, os passos da resolução. Queríamos identificar aspectos formais, intuitivos e algorítmicos presentes em cada resolução dada.

Com os itens (a) e (b), pretendíamos verificar se os estudantes realmente multiplicam uma desigualdade por um valor negativo sem inverter o sinal de desigualdade: aspecto intuitivo, provavelmente ligado aos procedimentos para resolução de equações.

Com o item (e), se os alunos praticam o que muitos deles chamam de "multiplicar em cruz", quando a incógnita está no denominador e querem colocá-la no numerador: sabem o aspecto formal, mas não sabem aplicá-lo (aspecto algorítmico) ou aplicam as técnicas de resolução de equações (aspecto intuitivo).

Com o item (d), se os estudantes simplesmente “extraem a raiz quadrada” dos dois membros da desigualdade e não sabem que $\sqrt{x^2} = |x|$ ou que $\sqrt{25} = 5$ ou não sabem lidar com isto: aspecto intuitivo, provavelmente também ligado à resolução de equações e falta do aspecto formal na resolução do módulo ou da raiz quadrada.

Com o item (c), se os alunos mostram conhecimento da função módulo, quando esta aparece explicitamente (aspecto formal).

Com o item (f), se os estudantes dominam essencialmente os aspectos algorítmicos e não se atrapalham com o fato da incógnita estar à direita.

Esperávamos algumas categorias de erros, a saber: assumir que os valores da incógnita são positivos; multiplicar a sentença por um número negativo sem inverter o sinal de desigualdade; cometer algum erro aritmético.

Na primeira, está caracterizado o erro quando é necessário multiplicar a inequação pela incógnita e o sinal desta não é analisado.

Na segunda categoria, encontram-se os erros relativos à multiplicação da sentença por um número negativo. Quando uma inequação é multiplicada por um escalar negativo, o sinal da mesma deveria ser invertido, entretanto isso não aparece.

A terceira é formada por todos os erros relativos às operações aritméticas: divisão, multiplicação e operação inversa.

Análise dos protocolos

Foram analisados os protocolos dos 21 alunos e procurou-se identificar os aspectos envolvidos nas resoluções.

Como já justificamos na análise didática, classificamos diversas categorias de erros: assumir que os valores da incógnita são positivos; multiplicar a sentença por número negativo sem inversão do sinal de desigualdade; cometer erro aritmético.

Na inequação (a) $-3x < 6$ apenas 2 alunos não souberam responder, sendo que um deles não respondeu nenhum item. Os erros mais comuns foram: multiplicar a inequação por (-1) em apenas um membro, mas alterando o sinal da desigualdade (19%); multiplicar a inequação por um fator negativo sem alterar o sinal de desigualdade (42,9%). Para exemplificar, transcrevemos duas resoluções.

(1) $-3x < 6$

$x > \frac{6}{3}$ → a multiplicação por (-1) não é explicitada.

x>2

(2) $-3x < 6$

$x < \frac{6}{-3}$ → Não inverteu o sinal de desigualdade.

x<-2

O erro foi não inverter o sinal de desigualdade quando esta foi multiplicada por (-1). Apenas 38,1% dos alunos acertaram esta questão.

Um item semelhante a este foi o item (f), cuja inequação é $10 > 5x$.

O índice de acertos nesta questão é praticamente o dobro do do item (a), alcançando 71,4% dos alunos. Os erros que ocorreram foram os devidos ao posicionamento da letra x e erros aritméticos. Uma solução que vale a pena transcrever é

$10 > 5x$

$-x > 5 - 10$

$-x > -5$

Nesta solução, fica evidente que as passagens referentes às operações inversas não estão claras para o aluno.

A única solução cujo erro está na posição da incógnita é:

$10 > 5x$

$\frac{10}{5} > x$

$x > 2$

Ao ler a resposta, o aluno parece ter confundido o símbolo de desigualdade. Talvez a prática corrente em trabalhar com a incógnita somente do lado esquerdo do símbolo de comparação e os processos mecânicos de resolução contribuam para este tipo de erro.

Apenas três alunos não responderam e um deles parece ter esquecido, pois é o único item sem resposta.

O item em que os alunos cometeram mais erros foi o (b), da inequação $\frac{t}{-2} > 4$, em que o número negativo está no denominador. 66,7% dos alunos não trocou o sinal de desigualdade quando realizaram a multiplicação, mas todos apresentaram uma solução.

$$\frac{t}{-2} > 4$$

$$t > 4(-2)$$

$$t > -8$$

Apenas 19% dos alunos acertou este item.

A análise da inequação (e) pode ser exemplificada pela seguinte solução.

$$\frac{5}{u} < \frac{5}{2}$$

$$\frac{10}{2u} < \frac{5u}{2u}$$

$$5u > 10$$

$$\frac{5u}{5} > \frac{10}{5}$$

$$u > 2$$

Os alunos não se preocuparam em avaliar o sinal de u e parte da solução fica perdida, neste caso u<0.

Muitos alunos deixaram de responder o item (c). Dos 9 que responderam, 7 apresentaram solução correta. As soluções incorretas que apareceram foram:

$$|v| < 3 \rightarrow v < -3$$

e

$$|x| < 3$$

v<3

v>3

Nestes erros, percebemos que o maior problema está no entendimento de módulo.

No item (d) apenas 3 alunos resolveram corretamente e 12 (57,1%) apresentaram as soluções:

$y^2 \leq 25$

$y \leq 25^{\frac{1}{2}}$

$y \leq 5$

ou

$y^2 \leq 25$

$\left(y^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 25^{\frac{1}{2}}$

$y \leq \pm 5$

$y \leq 5$ ou $y \leq -5$

A distinção entre as duas soluções parece estar ligada à notação. Muitos alunos parecem confundir as soluções de $x^2 = 25$ com as notações $\sqrt{25}$ e $25^{\frac{1}{2}}$ e respondem que estas representam ± 5, quando na verdade não, pois significam só o +5. Outra interpretação envolve o significado de ± 5. Esta notação parece confundir os alunos que decoram os procedimentos e faz com que não percebam que $y \leq \pm 5$ não faz sentido em Matemática, embora o faça em $y = \pm 5$.

Da análise das resoluções, podemos identificar alguns tipos de conflitos entre as componentes intuitivas, formais e algorítmicas: (1) para a inequação $y^2 \leq 25$, mais de 50% dos alunos "extrai a raiz" dos dois lados e chega a $y \leq \pm 5$ (aspecto intuitivo, procedimento próprio para equações e falta do aspecto formal, porque não sabem que $\sqrt{y^2} = |y|$ ou que $\sqrt{25} = 5$ ou ainda que $y \leq \pm 5$ não tem significado matemático); (2) para a inequação $-3x < 6$, alguns alunos "passam o -3 para o outro lado trocando o sinal", obtendo x<2 (ausência do aspecto formal); (3) para a resolução da inequação $\frac{5}{u} < \frac{5}{2}$, ou os alunos simplesmente multiplicam a inequação "em cruz" (aspectos intuitivos e algorítmicos) ou conhecem os aspectos formais (sabem que quando multiplicamos uma desigualdade por uma quantia negativa é preciso inverter o sinal), mas não sabem como aplicar isto (ausência do aspecto algorítmico) e utilizam os aspectos intuitivos que mandam que a incógnita tem que ir para o numerador; (4) na resolução da inequação $\frac{t}{-2} > 4$, a maioria dos alunos mostrou conhecer os aspectos algorítmicos (é preciso multiplicar a desigualdade por -2 ou "multiplicar em cruz"), mas não o aspecto formal (ao multiplicar a desigualdade por uma quantia negativa, é preciso inverter o sinal de desigualdade); (5) na resolução da inequação $|v| < 3$, a maioria dos alunos aplica um algoritmo do tipo $|v| = \pm v$ ou $|v| = v$, em conflito com os aspectos formais (no caso, principalmente a definição de módulo).

Conclusões

Dos conflitos que destacamos, podemos tirar algumas conclusões.

Uma delas, talvez a mais marcante, é que nenhum desses alunos mostrou conhecer os aspectos formais ligados à resolução algébrica de desigualdades com uma incógnita.

Outra conclusão é que mais de 50% deles não domina nem mesmo os aspectos algorítmicos e usou apenas os aspectos intuitivos para resolver, algebricamente, as desigualdades dadas, principalmente baseando-se nos procedimentos de resolução de equações. Esta conclusão nos preocupa ainda mais que a anterior pois, como já observamos, o ensino deste assunto, no Ensino Básico, tem se apoiado nos procedimentos algébricos e nem mesmo estes estão permanecendo.

Com isto, podemos afirmar que nenhum dos alunos consegue interagir e inter-relacionar os três aspectos, conforme seria desejável para garantir a aprendizagem.

Pudemos observar ainda que nenhum dos alunos tentou qualquer outro tipo de resolução, como por exemplo a gráfica, a funcional ou ainda a aritmética, que seria determinar as soluções pela análise aritmética da expressão dada. Esta última constatação, de certa forma, confirma que a idéia da resolução algébrica está fortemente enraizada nestes alunos, eliminando muito do que poderíamos chamar de solução intuitiva.

Nossa análise das resoluções apresentadas, para esta amostra, parece indicar que não estamos conseguindo apresentar a Matemática, aos alunos, pelo menos como a entendem Courant; Robbins (1996), com quem concordamos.

> "A Matemática, como uma expressão da mente humana, reflete uma vontade ativa, uma razão contemplativa e uma ânsia pela perfeição estética. Seus elementos básicos são lógica e intuição, análise e construção, generalidade e individualidade. Embora tradições diferentes possam enfatizar aspectos diferentes, é somente a inter-relação dessas forças antagônicas e a luta pelas

> suas sínteses que constitui a vida e a plena utilização e valor supremo da ciência matemática."[1] (COURANT; ROBBINS, 1996, introdução, tradução nossa).

E como gostaríamos que os estudantes a entendessem.

A continuidade deste trabalho foi a elaboração e a aplicação de uma seqüência didática para discutir uma abordagem funcional gráfica para a resolução de desigualdades com uma incógnita, explorando fortemente os registros algébrico, gráfico e da língua natural (Duval, 2000). Com isto esperamos ajudar estes futuros professores de Matemática a auxiliarem seus futuros alunos a inter-relacionarem os aspectos formais, intuitivos e algorítmicos presentes na resolução algébrica de uma desigualdade com uma incógnita visando uma aprendizagem efetiva dos tópicos matemáticos a serem ensinados.

Bibliografía

- F. Capra (1994): "A teia da vida". 9. ed. Cultrix, São Paulo.
- R. Courant, H. Robbins, I. Stewart (revisor) (1996): "What is Mathematics?: An elementary approach to ideas and methods". 2. ed. Oxford University Press, Oxford.
- V. H. G. De Souza, T. M. M. Campos (2005): "Sobre a resolução da inequação $x^2 \leq 25$". In: Caderno de Resumos: IX EBRAPEM, 1.40. Faculdade de Educação da USP, São Paulo.
- R. Duval (2000): "Basic issues for research in Mathematics Education". In: PME: Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 55-69. Hiroshima University, Hiroshima.
- E. Fischbein (1994): "The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity". In: R. Biehler et al. (Org.) Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, 231-245. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- C. Kieran (2004): "The equation/inequality connection in constructing meaning for inequality situations". In: PME, 28: Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v. 1, 143-147. PME, Bergen.
- L. Linchevski, A. Sfard (1991): "Rules without reasons as processes without objects–The case of equations and inequalities. In: PME, 15: Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v.2, 317-324. PME, Assisi.
- P. Tsamir, L. Bazzini (2001): "Can x=3 be the solution of an inequality? A study of Italian and Israeli students". In: PME, 25: Proceedings of the 25th Conference of

[1] "Mathematics as an expression of the human mind reflects the active will, the contemplative reason, and the desire for aesthetic perfection. Its basic elements are logic and intuition, analysis and construction, generality and individuality. Though different traditions may emphasize different aspects, it is only the interplay of these antithetic forces and the struggle for their synthesis that constitute the life, the usefulness and supreme value of mathematical science." (COURANT; ROBBINS, 1978, introdução).

the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v. 4, 303-310. PME, Utrecht.
- P. Tsamir, L. Bazzini (2002): "Student's algorithmic, formal and intuitive knowledge: the case of inequalities". In: ICTM, 2: Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics. ICTM 2: Crete.

Tânia M. M. Campos: nascida em Salvador, Bahia, Brasil, Bacharel e Doutor em Matemática pela PUC/SP, atualmente como bolsista de estágio pós-doutoral da CAPES, na Universidade de Oxford, processo BEX 3458/06-7. Trabalhou na PUC/SP e agora está vinculada à Pós-graduação da UNIBAN/SP como coordenadora do grupo de Pós-graduação em Educação Matemática. Tem vários trabalhos publicados, principalmente relacionados às estruturas multiplicativas de Gerard Vergnaud. taniammcampos@hotmail.com,

Vera Helena Giusti de Souza: nascida em São Paulo, SP, Brasil, licenciada e mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo, atualmente terminando tese de Doutorado em Educação Matemática pela PUC/SP. Trabalhou no IMEUSP e na PUC/SP e agora está vinculada à Pós-graduação da UNIBAN/SP. Tem vários trabalhos publicados, principalmente relacionados aos assuntos função e resolução de desigualdades. verahgs@hotmail.com