UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2008, Número 14, páginas 113-121
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

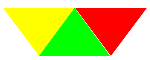
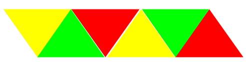
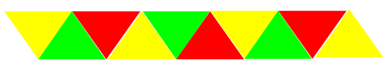
Problema

Proponer una actividad lúdica que ilustre que si la sucesión {f(n)}, es una progresión aritmética de segundo orden; es decir, una sucesión tal que las diferencias sucesivas

d1= f(2) – f(1), d2= f(3) – f(2), d3= f(4) – f(3), … , dn = f(n+1) - f(n), …

forman una progresión aritmética, entonces f es una función cuadrática.

Idea inicial[1]:

Figura 1			**Perímetro: 3**
Figura 2		Dos triángulos pegados entre sí, se pegan a la figura anterior	**Perímetro: 5**
Figura 3		Tres triángulos pegados entre sí, se pegan a la figura anterior	**Perímetro: 8**
Figura 4		Cuatro triángulos pegados entre sí, se pegan a la figura anterior	**Perímetro: 12**
Figura 5	**(Se omite por la extensión)**	Cinco triángulos pegados entre sí, se pegan a la figura anterior	**Perímetro: 17**

Se construye así una sucesión de figuras con los bloques triangulares de Cuisenaire, cuyos perímetros forman una progresión aritmética de segundo orden, pues la sucesión de las diferencias {2, 3, 4…} es una progresión aritmética de razón 1.

[1] El problema se lo propuso Guillermo Liu, profesor de matemáticas de secundaria, pensando en actividades para sus clases sobre progresiones aritméticas y funciones cuadráticas. La presente sistematización es fruto de la consulta que me hizo, llevando a mi oficina esta interesante idea de formar secuencias de figuras uniendo las piezas triangulares de los bloques de Cuisenaire, de modo que sus perímetros constituyen una progresión aritmética de segundo orden.

Sistematización

Para evitar confusiones o interpretaciones erradas, hacemos algunas precisiones previas:

1. Asumimos que en los bloques triangulares de Cuisenaire, los triángulos son equiláteros de lado 1.
2. "Pegar figuras" significa unirlas por alguno de sus lados, formando trapecios o paralelogramos, en una fila de bloques triangulares de Cuisenaire. (Una de sus alturas es igual a cualquiera de las alturas de los bloques triangulares de Cuisenaire que los conforman.)

La actividad que se propondrá tendrá como base construir una sucesión de figuras, usando solo los bloques triangulares de Cuisenaire (a los que –para simplificar– llamaremos triángulos) y siguiendo la siguiente definición:

Definición de la sucesión de figuras {Figura *n*}:

Figura 1:  (triángulo equilátero de lado 1)

Figura *n*: Paralelogramo o trapecio que resulta de pegar a la figura $n - 1$ el trapecio o paralelogramo formado pegando n triángulos, para todo número natural $n \geq 2$.

Observemos que la definición es inductiva y puede entenderse aplicándola para obtener las figuras 2, 3 y 4, del cuadro inicial y algunas siguientes.

Por ejemplo:

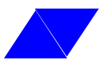
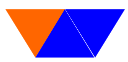
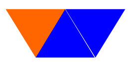
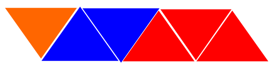
Figura 2: Se obtiene al pegar a la figura 1 () el paralelogramo formado por 2 triángulos (). Así resulta el trapecio: 

Figura 3: Se obtiene al pegar a la figura 2 () el trapecio formado por 3 triángulos (). Así resulta el paralelogramo: 

Perímetros

La secuencia de figuras y perímetros correspondientes se visualiza en la siguiente tabla:

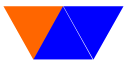
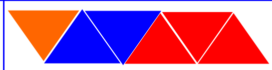
Término(*n*)	1	2	3	4
Figura *n*				
Perímetro P(*n*)	3	5	8	12

Tabla 1. Primeras figuras y perímetros de la sucesión {Figura *n*}

Podemos observar que la sucesión de perímetros de las figuras es tal que la sucesión de diferencias sucesivas $\{ d_n \}$ es una progresión aritmética:

P(n) 3 5 8 12 17 . . .

Diferencias (dn) 2 3 4 5 . . .

Para asegurar que esta propiedad se cumple siempre en la sucesión {P(n)} de perímetros, una primera tarea es caracterizar bien esta sucesión; es decir, encontrar la expresión general del término P(n), que es el perímetro de la Figura n.

Teniendo en cuenta la definición inductiva de la sucesión de figuras, podemos obtener una definición inductiva de la sucesión de perímetros, con razonamientos geométrico-algebraicos; es decir, expresar P(*n*) en función de P(*n*-1). Veamos:

Perímetro de la figura *n*:	P(*n*)
Perímetro de la figura anterior a la *n*; es decir, perímetro de la figura *n* -1, para $n \geq 2$:	P(*n*-1)
Al pegarse a la figura *n* - 1 el trapecio o paralelogramo formado pegando *n* triángulos, se considera inicialmente un perímetro adicional de *n* veces 3 (3 unidades por cada triángulo)	3*n*
En el perímetro del trapecio o paralelogramo formado pegando *n* triángulos, no debe considerarse los lados de las *n* -1 uniones. En cada unión se "pierden" dos lados.	- 2(*n*-1)
En el perímetro del paralelogramo o trapecio que se forma en la figura *n*, debe descontarse también los dos lados que se usan al pegar a la figura *n*-1 el trapecio o paralelogramo formado pegando *n* triángulos	- 2

En consecuencia: $P(n) = P(n\text{-}1) + 3n - 2(n\text{-}1) – 2$;

y así tenemos: $P(n) = P(n\text{-}1) + n$ para todo número natural $n \geq 2$.

En resumen:

$$\boxed{\begin{array}{l} P(1) = 3 \\ P(n) = P(n-1) + n \quad \text{para todo número natural } n \geq 2. \end{array}}$$

Con esta definición inductiva de P(*n*), es claro que

$$P(n + 1) = P(n) + (n + 1) \quad \text{para todo número natural } n \geq 1;$$

O sea: $P(n + 1) - P(n) = (n + 1)$ para todo número natural $n \geq 1$; **(*)**

Por otra parte, recordemos que las diferencias sucesivas d_n de la sucesión {P(*n*)} son:

$$d_1 = P(2) - P(1)\ ,\ \ d_2 = P(3) - P(2),\ d_3 = P(4) - P(3),\ \ldots,\ d_n = P(n+1) - P(n),\ \ldots$$

y en consecuencia, teniendo en cuenta **(*)**, la sucesión de diferencias sucesivas de los términos de la sucesión {P(*n*)} es

$$\{d_n\} = \{\ P(n+1) - P(n)\} = \{n +1\} = \{2, 3, \ldots\ n, \ldots\ \},$$

que evidentemente es una progresión aritmética de razón 1 y confirmamos que la sucesión de perímetros {P(*n*)} es una progresión aritmética de segundo orden.

Podemos verificar que con la definición inductiva de P(*n*), se obtienen los valores que figuran en la Tabla 1; por ejemplo:

$$\begin{aligned} P(4) &= P(3) + 4 \\ &= P(2) + 3 + 4 \\ &= P(1) + 2 + 3 + 4 \\ &= 3 + 2 + 3 + 4 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Ciertamente, no resultaría cómodo obtener por este método, por ejemplo P(20). Necesitamos obtener una expresión general para P(*n*), que no dependa de P(*n*-1). Formalmente, en la definición inductiva de P(*n*) tenemos una ecuación en diferencias de primer orden, no homogénea, con coeficientes constantes y con condición inicial conocida. Hay métodos específicos para obtener la solución general de este tipo de ecuaciones, pero podemos recurrir a una forma “constructiva” de obtener la expresión general, explícita, de P(n). Veamos:

P(1) = 3
P(2) = P(1) + 2 = 3 + 2
P(3) = P(2) + 3 = 3 + 2 + 3
P(4) = P(3) + 4 = 3 + 2 + 3 + 4
…….

P(n) = 3 + 2 + 3 + 4 + ….. + n
= 3 + $\frac{(2+n)(n-1)}{2}$ (Observando que a partir del número 2 tenemos los términos de una progresión aritmética, cuyo primer término es 2 y el último es n, y aplicando la conocida fórmula de la suma de estos $n - 1$ términos).

Así, efectuando las operaciones indicadas y simplificando, obtenemos

$$\boxed{P(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 2 \quad \forall n \in Z^+}$$

Vemos, pues, que la función perímetro P, en este contexto, es la restricción de una función cuadrática al conjunto de los números enteros positivos.

Otra manera de obtener esta función, es asumir que con los términos encontrados de los perímetros de las figuras ya se tiene una progresión aritmética de segundo orden; asumir también conocida la proposición que en toda progresión aritmética de segundo orden su término general está dado por la restricción de una función cuadrática a los números enteros positivos[2] y encontrar los coeficientes correspondientes de esta función. Así:

La función cuadrática P, será de la forma

P(x) = a x2 + b x + c , con $a \neq 0$.

Como P(1)=3, P(2)=5 y P(3)=8, haciendo los reemplazos correspondientes tenemos un sistema de tres ecuaciones lineales con las incógnitas a, b y c:

[2] Una buena referencia para estudiar la vinculación entre progresiones aritméticas de segundo orden y funciones cuadráticas, es: Lages Lima, E. et al (2000). *La Matemática de la Enseñanza Media*, Vol 1, pp. 137 - 141. Perú: IMCA

$$\begin{aligned} a + \ \ b + c &= 3 \\ 4a + 2b + c &= 5 \\ 9a + 3b + c &= 8 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $a = \frac{1}{2},\quad b = \frac{1}{2},\quad c = 2$, con lo cual tenemos que

$$\boxed{P(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 2}$$

Es claro que este resultado es coherente con el obtenido anteriormente.

Comentarios y sugerencias

1. Al sistematizar las ideas ante el problema inicialmente planteado, encontramos una manera – y en un contexto lúdico – de usar definiciones inductivas, que son de gran importancia en la matemática.
2. Puede ser útil que antes de proponer el uso de la definición inductiva para construir la sucesión de figuras, se proponga una actividad con una definición inductiva en un contexto aritmético, como la siguiente:

El "marco" de un número natural *n* es también un número natural que se representa por el número *n* dentro de un pequeño rectángulo y se define de la siguiente manera:

$$\boxed{0} = 1$$

$$\boxed{n} = n \times \boxed{n-1} \qquad \text{para todo número natural } n \geq 1$$

Así, se establece que el marco de 0 es 1.

Según la definición dada, $\boxed{1} = 1\text{x} \boxed{0} = 1 \text{ x } 1 = 1$;

luego, el marco de 1 es también 1.

Según la definición dada, $\boxed{2} = 2\text{x} \boxed{1} = 2 \text{ x } 1 = 2$;

luego, el marco de 2 es 2.

Según la definición dada, $\boxed{3} = 3x\ \boxed{2} = 3 \times 2 = 6$;

luego, el marco de 3 es 6.

Se puede verificar de esta manera, que el marco de 4 es 24, que el marco de 5 es 120, etc.

Ciertamente, estamos definiendo inductivamente el factorial de un número natural, pero deliberadamente no usamos la notación habitual, ni consideramos necesario mencionar la palabra “factorial”, pues el objetivo es usar una definición inductiva.

3. Una pregunta natural en el contexto de la sucesión de figuras formadas con triángulos, es *¿cuántos triángulos tiene la* Figura *n*?

Llamemos T(*n*) a tal número y explicitemos sus valores para los primeros términos de la sucesión, haciendo una tabla a partir de la Tabla 1:

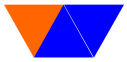
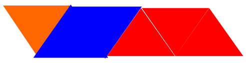
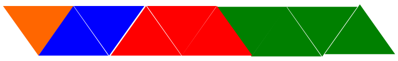
Término(*n*)	1	2	3	4
Figura *n*				
Número de triángulos: T(*n*)	1	3	6	10

Tabla 2. Primeros términos de las sucesiones {Figura *n*} y {T(*n*)}

Observando esta tabla 2 y teniendo en cuenta la definición de Figura *n* para construir la secuencia de figuras, concluimos que la función T(*n*) la podemos definir inductivamente:

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = T(n-1) + n \text{ , para todo número natural } n \geq 2.$$

Ahora podemos obtener explícitamente la función T(*n*):

$$T(1) = 1$$
$$T(2) = T(1) + 2 = 1 + 2$$
$$T(3) = T(2) + 3 = 1 + 2 + 3$$
$$T(4) = T(3) + 4 = 1 + 2 + 3 + 4$$
$$\ldots\ldots$$
$$T(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n$$
$$T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

En consecuencia:

$$\boxed{\mathrm{T}(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \quad \forall n \geq 1, n \in Z^+}$$

Siendo T la restricción a Z+ de una función cuadrática, la sucesión {T(n)} es una progresión aritmética de segundo orden, como es fácil verificar.

Puede ser más sencillo para los estudiantes trabajar con la sucesión {T(n)}, antes de trabajar con la sucesión {P(n)}.

4. A continuación sugerimos una posible secuencia de actividades que se proponga a los estudiantes o a profesores en cursos de capacitación docente. En verdad, deben tomarse como un conjunto de ideas para ser convertidas en actividades individuales, actividades en grupo, para ser modificadas, puestas en otra secuencia, etc. , según el nivel y las experiencias previas del grupo con el que se trabaje:

   a. Dada la definición y la notación de "marco" de un número natural, escribir los seis primeros términos de la sucesión de números naturales:

   $\boxed{0}\ ,\ \boxed{1}\ ,\ \boxed{2}\ ,\ \boxed{3}\ , \ldots.. ,\ \boxed{n}\ \ , \ldots.$

   b. Dada la definición de la sucesión {Figura *n*}, (con las precisiones previas, anotadas al inicio de esta sistematización), construir una tabla como la Tabla 1, pero sólo con la primera y segunda filas.

   c. Examinar si las figuras 7, 10 y 20 son trapecios o paralelogramos. (Esto puede ser motivador para determinar el número de triángulos que tiene cada figura de la sucesión {Figura *n*}, pues seguramente descubrirán – o se inducirá a que lo descubran – que si la Figura *n* tiene un número par de triángulos es un paralelogramo y si tiene un número impar es un trapecio, salvo cuando *n* = 1).

   d. Llamar T(*n*) al número de triángulos que tiene la Figura *n* y construir una tabla como la Tabla 2.

   e. Examinar si las diferencias sucesivas de la sucesión {T(*n*)} son una progresión aritmética.

   f. Definir inductivamente T(*n*).

   Sugerencia: Observar la tabla construida en la actividad ***d*** y tener en cuenta la definición inductiva de Figura *n*.

   g. Hallar una expresión explícita de T(*n*) (que no dependa de T(*n*-1)). *Sugerencia*: Usar la definición inductiva de T(*n*) para encontrar las sumas que determinan los primeros términos de la sucesión {T(*n*)} y observar tales sumas.

h. Encontrar explícitamente T(*n*) asumiendo que T es una función cuadrática $T(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, con $a \neq 0$. Verificar que el resultado es coherente con el obtenido en la actividad ***g***.

Sugerencia: Resolver el sistema lineal de tres ecuaciones, cuyas incógnitas son *a, b* y *c*, obtenidas de tres valores conocidos de T(*n*) (Es cómodo trabajar con T(1), T(2) y T(3).)

i. Llamar P(*n*) al perímetro de la Figura *n* y completar una tabla similar a la Tabla 1, en la que se ha dejado algunos lugares vacíos en la segunda y tercera filas.

j. Examinar si las diferencias sucesivas de la sucesión {P(*n*)} son una progresión aritmética.

k. Definir inductivamente P(*n*).

Sugerencia: Observar la tabla similar a la Tabla 1, construida en la actividad ***i***, y recordar la definición inductiva de Figura *n*.

l. Definir explícitamente P(*n*).

Sugerencia: Usar la definición inductiva de P(*n*) y proceder como en la actividad ***g***.

m. Encontrar explícitamente P(*n*) asumiendo que P es una función cuadrática, de manera similar a cómo se obtuvo T(*n*) en la actividad ***h***.

n. Encontrar razones geométricas que justifiquen una relación algebraica entre P(*n*) y T(*n*), que simplificada lleve a P(*n*) = T(*n*) + 2.