

Un rectángulo casi de oro

Inés Márquez Rodríguez

Resumen

En este trabajo se han utilizado distintas secciones del rectángulo del tangram de los tres triángulos de Brügner para calcular proporciones entre los segmentos y áreas que se producen. Iterando las secciones del rectángulo hasta el infinito surgen varias sucesiones de elementos que resultan ser sucesiones de Fibonacci. Se hace una reflexión sobre la definición matemática de los cánones de belleza, basada en la proporcionalidad, tanto entre segmentos como entre áreas. Por último, adosando infinitos rectángulos semejantes al original, se construyen espirales de tipo circular, ovoidal y elíptico.

Abstract

Different sections in the rectangle of the Brügner's three-triangle-tangram are used to derive proportions between the resulting lines and areas. Following with successive sections up to infinity lead to sequences of elements that can be identified as Fibonacci's successions. Some reflections on the meaning and validity of the mathematical definition of *beauty standard* based on the proportionality between either segments or areas are made. Finally, the assembling of rectangles proportional to the original one, give rise to circular, ovoid and elliptic spirals.

1. Introducción

Definir la belleza parece una tarea imposible. Sin embargo, a través de los siglos ha habido un gran empeño en establecer cánones de belleza para el arte, inspirados en buena medida en la observación de la naturaleza. Las figuras geométricas con medidas en cierta proporción, o con algún tipo de simetría, han sido consideradas generalmente como estéticamente bellas. Los polígonos y poliedros regulares, la circunferencia y esfera, las espirales, son figuras largamente estudiadas en matemáticas y también utilizadas como ornamento por su perfección. Pero además de las figuras regulares existen otras que también se perciben agradables a los sentidos. Esta percepción está basada en la proporción de sus medidas.

Los egipcios usaron en la construcción de sus pirámides ciertas proporciones entre sus lados, seguramente por razones estéticas. Posteriormente, los griegos estudiaron matemáticamente las proporciones entre los segmentos de distintos polígonos regulares, utilizando algunos de ellos como adornos o como anagramas de sus asociaciones, como es el caso del pentágono regular estrellado, o *pentagrama*, que fue usado por los pitagóricos como emblema de su escuela. Y aunque tanto la arquitectura como la escultura en la antigua Grecia están plagadas de unas determinadas proporciones, tampoco existen pruebas de que hayan sido utilizadas conscientemente en la estética griega.

¿Cuál es la proporción perfecta entre dos segmentos de distinta longitud? Entramos de lleno en un intento de definición matemática de la belleza basada en la proporcionalidad. Surge de esta manera la *divina proporción*. Este término fue acuñado por Fray Luca Paccioli di Borgo en su *De Divina Proportione* (1509), libro ilustrado por su amigo y artista Leonardo Da Vinci. La divina proporción, o proporción áurea, se obtiene de la división de un segmento en dos partes, de tal manera que la longitud de la parte mayor sea medio proporcional entre la longitud de la menor y la total. Esto conduce a la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$. La solución positiva de esta ecuación es $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1.618034\dots$. Este número irracional es el valor de la *razón áurea*, también llamado el *Número de Oro*, y se representa por ϕ , en honor de Fidias porque se supone que hizo uso de este valor en las proporciones de sus esculturas.

La proporción áurea aparece en la naturaleza, e intencionadamente o no, en las artes, no sólo en Egipto y Grecia sino en el resto de países del mundo. El *Hombre de Vitrubio* es un ejemplo de la existencia de esta proporción en el cuerpo humano. Y en general, la obra de Leonardo Da Vinci parece estar canonizada estéticamente por el número de oro. Las catedrales góticas, al igual que las pirámides egipcias y el Partenón griego, muestran secciones repetidas de rectángulos áureos de distintas dimensiones, es decir, rectángulos con sus lados en proporción áurea. Más modernamente el rectángulo áureo ha impuesto un estilo y se ha usado como formato de edición de libros, fotografías, ventanas, cajas de

cigarrillos o tarjetas de crédito, desbancando en su belleza al propio cuadrado. También en otra de las bellas artes como es la Música, se han utilizado la divina proporción y las secuencias de Fibonacci, tanto en las melodías y armonizaciones como en los ritmos. Como ejemplos de músicos que las utilizaron, probablemente de una manera inconsciente, cabe citar a Mozart, Beethoven, Schubert y Debussý, y ya en el siglo XX, al húngaro Béla Bártok, al francés Olivier Messiaen, y al alemán Karlheinz Stockhausen, en un paso más allá del dodecafonismo.

La raíz del número de oro, $\sqrt{\phi} \cong 1.272020\dots$, no es tan nombrada, ni en el arte ni en las matemáticas, puesto que es subsidiaria de la importancia del propio número de oro. Por esta razón aparece también en las proporciones de esculturas y monumentos arquitectónicos. Por ejemplo, si los egipcios construyeron la pirámide de Keops con las proporciones mencionadas por el historiador Herodoto, entonces la pirámide, de altura 146m y de lado de la base 230m, sería semejante a otra pirámide que tuviera una medida de 2m como lado de la base y ϕ m como altura de una de las caras laterales. Así, la altura de tal pirámide sería $\sqrt{\phi}$ m. Pero también pudiera ser, puesto que usaban ruedas para medir, que utilizaran otro número mágico pero igualmente desconocido para ellos, π , para llegar a este valor, ya que $\frac{4}{\pi} \cong \sqrt{\phi}$. Y como simple coincidencia, el diámetro de la Tierra es $10000\sqrt{\phi}$ km; y si multiplicamos la raíz del Número de Oro por 2 nos da la medida de la pulgada en centímetros. Sin embargo, no nos podemos dejar seducir por la numerología, buscando proporciones en figuras complejas para ofrecer luego visiones esotéricas de la naturaleza o del arte, porque con total seguridad encontraríamos cualquier razón numérica que se nos propusiera.

Por otro lado, en la naturaleza también existen variadas muestras de sucesiones de Fibonacci, introducidas por el matemático Leonardo de Pisa (Fibonacci) en el siglo XIII en su estudio de la reproducción de conejos a partir de una pareja inicial. Las sucesiones de Fibonacci se definen como aquellas en las que, conocidos los dos primeros términos, el término general se obtiene como suma de los dos inmediatamente anteriores, es decir, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. En estas sucesiones se

cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \phi$, por lo que existe una íntima relación entre las sucesiones de Fibonacci y el Número de Oro.

El número de oro cumple $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$, $\phi^2 = \phi + 1$ y en general, $\phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}$, con lo cual se concluye que ϕ se puede expresar como una fracción continua, y además que la sucesión $1, \phi, \phi^2, \phi^3, \dots, \phi^n, \dots$ es de Fibonacci.

2. Un rectángulo casi de oro

Una amiga me propuso el siguiente problema en la servilleta de papel de una tasca: *¿Cuál es la relación entre las dimensiones de un rectángulo ABCD de lados a y b, si al trazar la perpendicular desde el vértice C a la diagonal BD, secciona a ésta en dos segmentos b y d?* Este rectángulo, mostrado en la Fig. 1, seccionado por la diagonal BD y su perpendicular desde el vértice C, determina tres triángulos rectángulos, ABD, BEC y CED, semejantes, y es conocido como el *tangram mínimo de Brügner* (G. Brügner, 1984), un puzzle de sólo tres piezas cuyas dimensiones se han calculado de tal manera que el número de polígonos convexos que se pueden construir con él es máximo.

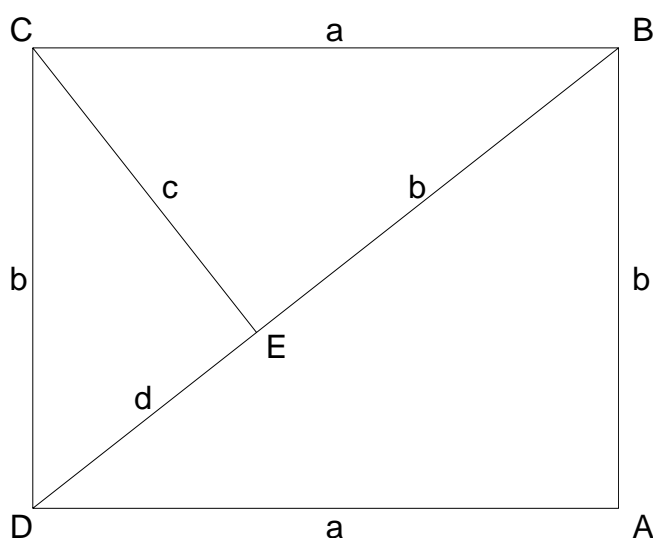


Fig.1. Tangram mínimo de Brügner

2.1. Proporción entre los lados a y b

En el triángulo BCD de la Fig.1, el cateto a es medio proporcional entre la hipotenusa y la proyección de a sobre la hipotenusa (Teorema del cateto), esto es, $a^2 = (b+d)b$. Por el Teorema de Pitágoras en el mismo triángulo BCD: $\sqrt{a^2 + b^2} = b + d$, y combinando ambas ecuaciones obtenemos $a^4 - b^2 a^2 - b^4 = 0$.

Esta última relación es una ecuación bicuadrada en a , con lo que fácilmente llegamos a:

$\frac{a^2}{b^2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$. Por tanto la proporción buscada entre los lados de este rectángulo es la raíz cuadrada del número de oro, es decir;

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\phi} \cong 1.272020\dots$$

Los ángulos agudos de cada uno de los tres triángulos valen $\arctan \sqrt{\phi} \cong 51.8273^\circ$ y $\arctan \frac{1}{\sqrt{\phi}} \cong 38.1727^\circ$

2.2. Proporción entre los segmentos b y d de la diagonal

En el triángulo BCD la altura c es medio proporcional entre los segmentos b y d que determina sobre la hipotenusa, y utilizando el teorema de Pitágoras en el triángulo CED:

$$c^2 = bd = b^2 - d^2 \Rightarrow b^2 - db - d^2 = 0$$

Si despejamos b en esta ecuación de 2º grado se obtiene: $b = d \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, o sea

$$\frac{b}{d} = \phi$$

Luego, el punto E divide a la diagonal en la proporción áurea, o sea, b y d están en *divina proporción*.

2.3. El punto E y las secciones áureas del rectángulo

Sobre el punto E se puede decir todavía más. Debido a la semejanza de los triángulos EMB y DPE de la Fig. 2, divide a las paralelas a los lados del rectángulo que pasan por E en la razón áurea: $\frac{m}{n} = \frac{h}{p} = \frac{b}{d} = \phi$.

$$\frac{m}{n} = \frac{h}{p} = \frac{b}{d} = \phi.$$

E divide en la misma proporción a cualquier otro segmento que pase por E y tenga sus extremos, V y W, en lados opuestos del rectángulo, debido a la semejanza de los triángulos EHV y EPW.

Si trazamos la perpendicular a la diagonal BD desde el punto A se obtiene un punto E' que tiene las mismas propiedades que E. Las rectas verticales y horizontales por E y E' se llaman *secciones áureas* del rectángulo porque lo dividen en áreas cuya razón es ϕ .

Las secciones áureas definen un rectángulo central, EE'E''E''' semejante al ABCD. Los puntos E'' y E''' obtenidos al cortarse las secciones áureas coinciden con los construidos sobre la otra diagonal AC del rectángulo de una manera similar a E y E'.

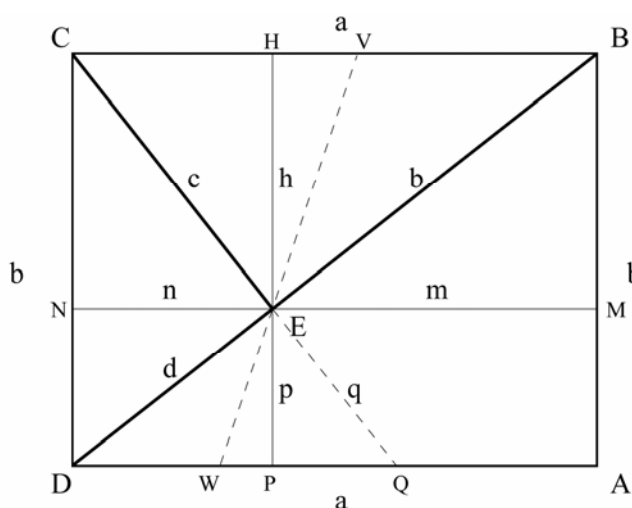


Fig.2

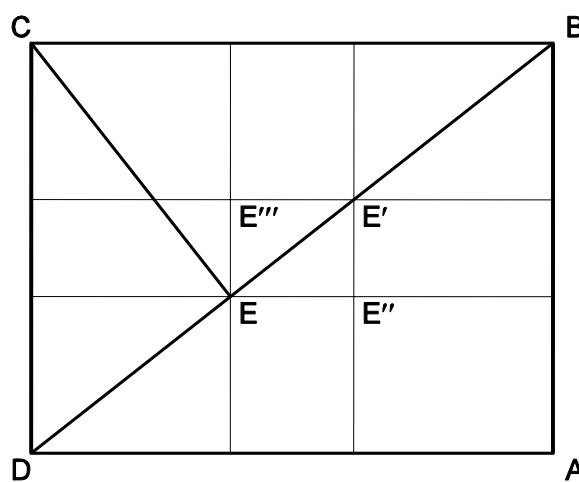


Fig.3

2.4. Rectángulos semejantes al tangram

Las secciones áureas del rectángulo que pasan por E determinan puntos áureos sobre los segmentos a y b , respectivamente, y por tanto se tiene: $a = m\phi$, $b = h\phi$, $a = n\phi^2$ y $b = p\phi^2$.

Esto significa que los rectángulos MBHE y PEND de la Fig.2 son semejantes al original ABCD, y las razones de semejanza son ϕ y ϕ^2 , respectivamente. Y utilizando las semejanzas de varias figuras es fácil encontrar la secuencia de rectángulos semejantes EE'E''E'''', EPQE'', DPEN, NEHC, EMBH, PABH y ABCD. La razón de semejanza, de mayor a menor, es $\sqrt{\phi}$, y la de áreas ϕ . Así, las secciones áureas que pasan por el punto E determinan cuatro rectángulos semejantes al tangram inicial (DPEN, NEHC, EMBH y PABH)

Se cumple además la igualdad entre los siguientes segmentos $h = d, n = q, m = c$.

2.5. La clase de los triángulos semejantes a los tres del tangram

Los antiguos egipcios usaban para dibujar dos líneas perpendiculares un triángulo rectángulo de dimensiones 3, 4 y 5. Cualquier otro triángulo rectángulo hubiese servido para esa tarea, pero posiblemente no conocían otro con dimensiones diferentes y no proporcionales a aquellas.

De una manera similar a como se define la divina proporción en un segmento, podríamos definir la proporción ideal entre los tres lados de un triángulo rectángulo como aquella en que el cateto mayor a , sea medio proporcional entre el cateto menor, b , y la hipotenusa f , esto es: $\frac{f}{a} = \frac{a}{b}$

Usando el teorema de Pitágoras tendríamos $a^2 = b\sqrt{a^2 + b^2}$, y resolviendo la ecuación bicuadrada que se obtiene al elevar al cuadrado, se deduce que $\frac{a}{b} = \sqrt{\phi}$. Es decir, entre todas las clases de triángulos rectángulos, la clase mejor proporcionada es la que tiene sus tres lados, de mayor a menor, en proporción $\sqrt{\phi}$,

como ocurre con los tres triángulos del tangram. Por ejemplo, 1 , $\sqrt{\phi}$ y ϕ sería una terna representativa de este tipo de triángulos rectángulos.

La razón de áreas de los triángulos BCD y BEC en la Fig.4 es $\frac{ab}{bc} = \phi$ y la de los triángulos BEC y CED es $\frac{bc}{dc} = \phi$. Por tanto, la altura del triángulo BCD produce una sección *áurea* del triángulo, en el sentido de que las relaciones de áreas del triángulo total frente a la del mayor es igual a la del mayor frente a la del menor, es decir:

$$\frac{\text{Area}(\text{total})}{\text{Area}(\text{mayor})} = \frac{\text{Area}(\text{mayor})}{\text{Area}(\text{menor})} = \phi$$

Así, podríamos concluir que esta clase de triángulos rectángulos son los más bellos, o mejor proporcionados, puesto que las dos áreas determinadas por su altura están en la proporción divina. Esta podría ser una definición de canon de belleza para las áreas de dos figuras, similar a la dada para longitudes.

Lo mismo sucede entre los triángulos más pequeños CNE y END, entre ELN y NLD, entre NRL y LRD, etc.

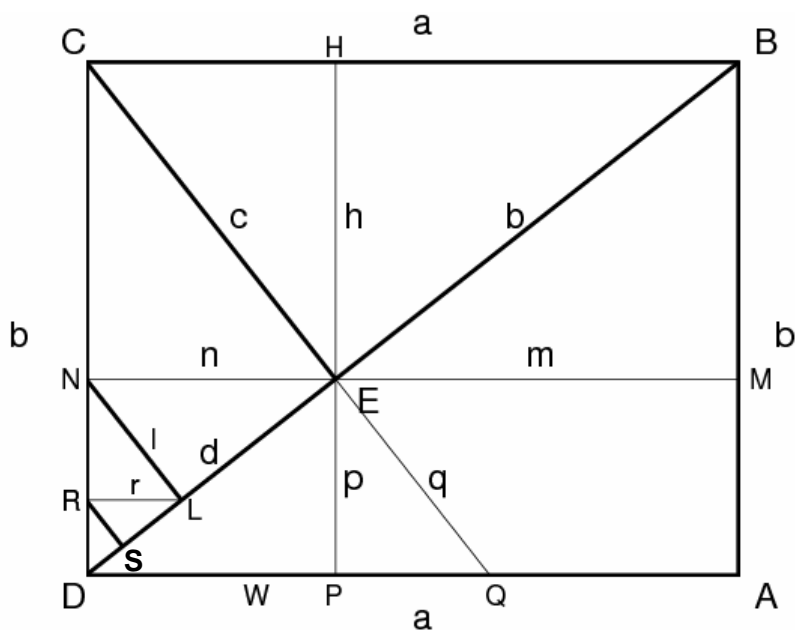


Fig. 4

Así pues, si formamos la sucesión de semiáreas de los triángulos LRD, NRL, NLD, ELN, END, CNE, CED, BEC, BCD,..., (Fig. 4) se tiene:

$$\frac{ab}{\phi^8}, \frac{ab}{\phi^7}, \frac{ab}{\phi^6}, \frac{ab}{\phi^5}, \frac{ab}{\phi^4}, \frac{ab}{\phi^3}, \frac{ab}{\phi^2}, \frac{ab}{\phi}, ab, \dots$$

que es una progresión geométrica de razón ϕ , y una sucesión de Fibonacci, pues la suma de dos términos consecutivos da el siguiente.

También es una sucesión de Fibonacci la sucesión de longitudes de los segmentos de la línea quebrada SRLNECB (Fig. 4) $\frac{a}{\phi^5}, \frac{a}{\phi^4}, \frac{a}{\phi^3}, \frac{a}{\phi^2}, \frac{a}{\phi^1}, a, \dots$

Prolongando ahora hacia el exterior los lados y la diagonal del tangram, construimos otro rectángulo semejante A'B'C'D trazando una paralela a la altura c por el vértice B. La razón de semejanza es ϕ^2 . En efecto, pues el punto C divide al lado vertical DC' en la proporción áurea, y el punto A hace lo mismo sobre el lado horizontal DA'. Prolongando a su vez este rectángulo obtendríamos uno semejante, A''B''C''D, otra vez de razón de semejanza ϕ^2 frente al anterior. Repitiendo indefinidamente este proceso tendríamos una sucesión de rectángulos tangrams homotéticos en progresión geométrica de razón ϕ^2 . En la Tabla 1 figuran las sucesiones de los parámetros del tangram expresados todos en función del lado b. Se observa en las columnas que todos los segmentos crecen en un factor ϕ^2 .

Triángulo	Cateto menor	Cateto mayor	Hipotenusa	Área	Proyección menor (d)	Proyección mayor (b)	Altura (c)
END	$\frac{b}{\phi^2}$	$\frac{b\sqrt{\phi}}{\phi^2}$	$\frac{b}{\phi}$	$\frac{1}{2} \frac{b^2 \sqrt{\phi}}{\phi^4}$	$\frac{b}{\phi^3}$	$\frac{b}{\phi^2}$	$\frac{b}{\sqrt{\phi \phi^2}}$
BCD	b	$b\sqrt{\phi}$	$b\phi$	$\frac{1}{2} b^2 \sqrt{\phi}$	$\frac{b}{\phi}$	b	$\frac{b}{\sqrt{\phi}}$
B'C'D	$b\phi^2$	$b\sqrt{\phi \phi^2}$	$b\phi^3$	$\frac{1}{2} b^2 \sqrt{\phi \phi^4}$	$b\phi$	$b\phi^2$	$\frac{b}{\sqrt{\phi}} \phi^2$
B''C''D	$b\phi^4$	$b\sqrt{\phi \phi^4}$	$b\phi^5$	$\frac{1}{2} b^2 \sqrt{\phi \phi^8}$	$b\phi^3$	$b\phi^4$	$\frac{b}{\sqrt{\phi}} \phi^4$

Tabla 1. Valores de los segmentos del tangram

Además, hay varias *sucesiones de puntos de oro*, por ejemplo: sobre la diagonal, cada punto L, E, B B'..., es de oro entre el origen D y su siguiente. Sus distancias al origen son $\frac{b}{\phi^3}, \frac{b}{\phi}, b\phi, b\phi^3, \dots$ y las distancias entre dos consecutivos son $\frac{b}{\phi^2}, b, b\phi^2, \dots$

Análogamente sobre los lados horizontal, a , y vertical, b , las proyecciones de L, E, B,... son puntos de oro entre el origen D y su siguiente.

3. Espirales

Las espirales son abundantes en la naturaleza y se usan frecuentemente como elementos decorativos. Son conocidas matemáticamente, entre otras, la espiral de Arquímedes, de ecuación $\rho = a + b\theta$ en coordenadas polares, cuya distancia entre sus brazos es constante; la espiral logarítmica o equiangular de ecuación $\rho = ab^\theta$; la espiral doble de Fermat, o parabólica, de ecuación $\rho = \theta^{1/2}$; y algunas pseudo-espirales como la espiral de Durero o de Oro, muy parecida a la logarítmica y construida a partir de los rectángulos de oro, y la espiral de Fibonacci, basada en cuartos de círculos inscritos en cuadrados cuyos lados son los términos de la sucesión de Fibonacci cuyos dos primeros valores son 1 y 1.

Inspirada en la espiral de oro (cuya proporción entre los lados es ϕ), se puede construir una espiral basada en un primer cuadrado correspondiente al lado menor, b , del rectángulo del tangram de Brügner (cuya proporción entre los lados es $\sqrt{\phi}$), un segundo cuadrado adosado al anterior y de lado $b\sqrt{\phi}$, un tercer cuadrado adosado al anterior y de lado la suma de los lados de los dos cuadrados anteriores, y así sucesivamente. En la Fig.7 hemos construido una espiral con $b = 1$.

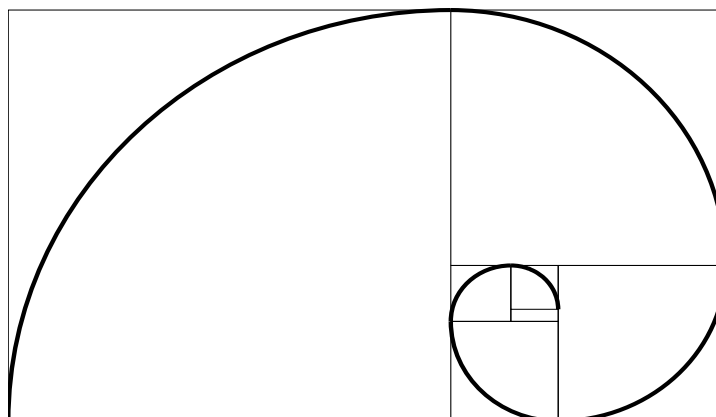


Fig. 7.

Los lados de los cuadrados forman la sucesión:

$$1, \sqrt{\phi}, \sqrt{\phi}+1, 2\sqrt{\phi}+1, 3\sqrt{\phi}+2, 5\sqrt{\phi}+3, 8\sqrt{\phi}+5, 13\sqrt{\phi}+8, \dots$$

Esta es una sucesión de Fibonacci, pues se cumple: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, y por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \phi.$$

Como conclusión, la sucesión de los rectángulos en los que se haya inscrita la espiral, tienden al rectángulo de oro, y por tanto las áreas de los cuadrados de las ramas de la espiral están en proporción de ϕ^2 . Sin embargo, esto no es un resultado inesperado pues se cumpliría para cualquier cuadrado de lado x adosado al primero de lado 1.

La siguiente *espiral ovoidal*, Fig.8, está construida a base de cuartas partes de elipses verticales u horizontales de centro E e inscritas en los rectángulos semejantes DPEN, NEHC, EMBH, PABH, ABCD,... de la Fig.2, de tal manera que el semieje mayor de cada una de las elipses es el semieje menor de la siguiente cuyos lados están en proporción $\sqrt{\phi}$, y por tanto la proporción de áreas de los rectángulos es ϕ .

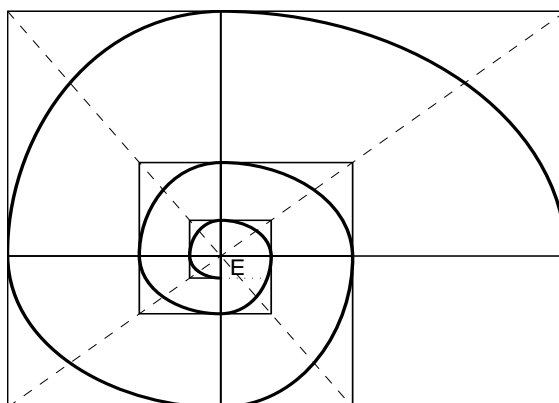


Fig. 8. Espiral ovoidal

El punto E es un punto de oro entre los vértices de las sucesivas diagonales de los rectángulos que se van formando en la espiral, todos ellos semejantes al original del tangram. Esta espiral es parecida a las usadas frecuentemente como elemento decorativo, como anagrama de empresas, en algunas páginas webs (ver por ejemplo <http://www.splorp.com/critique/>), etc.



La siguiente *espiral elíptica* está construida a base de cuartas partes de elipses cuyos diámetros son los rectángulos DPEN, EMBH, ABCD,... de la Fig.2, y cuyos lados son $(1, \sqrt{\phi}), (\phi, \phi\sqrt{\phi}), (\phi^2, \phi^2\sqrt{\phi}), (\phi^3, \phi^3\sqrt{\phi}), \dots$, que están en proporción ϕ . Por tanto, la proporción de áreas de los sucesivos rectángulos es ϕ^2 .

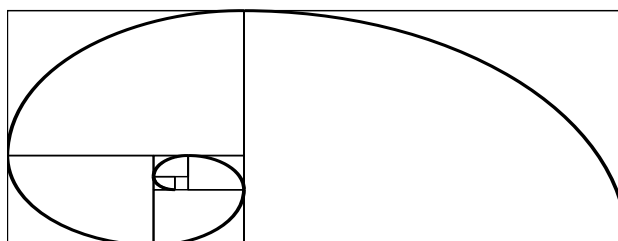


Fig. 9. Espiral elíptica

4. Conclusiones

Una vez calculada la proporción $\sqrt{\phi}$ entre los lados del tangram, el problema propuesto inicialmente queda resuelto. Pero el tangram da mucho más de sí, pues sus tres triángulos tienen sus lados en proporción $\sqrt{\phi}$, y sus alturas constituyen secciones de oro de cada uno de ellos, con lo que se ha podido definir una clase de triángulos rectángulos “bien proporcionados”. También se han podido construir diferentes sucesiones de Fibonacci con segmentos específicos dentro del tangram, con sus subdivisiones y sus prolongaciones, o con áreas de triángulos semejantes a los tres del tangram. Además, se han ideado y dibujado distintas espirales basadas en el rectángulo del tangram, una de tipo circular, otra ovoidal y otra elíptica.

Empezamos hablando de la definición matemática de la belleza de las proporciones. El rectángulo de oro tiene sus lados en proporción $\phi \approx 1.62$, y el tangram en $\sqrt{\phi} \approx 1.27$, y si suponemos que el lado menor en ambos rectángulos es la unidad, las áreas respectivas son ϕ y $\sqrt{\phi}$, y las diagonales $\sqrt{1+\phi^2}$ y ϕ , respectivamente. Es difícil decir cuál de los dos rectángulos es más bonito, porque en ambos las proporciones están relacionadas con el número áureo. Si dividiéramos cada uno de ellos en dos triángulos, en un caso los lados están en divina proporción, y en el otro los triángulos resultan ser rectángulos de la clase definida en el apartado 2.5 como armoniosa. Es decir, lo que uno tiene bien proporcionado no lo tiene el otro, y recíprocamente. En cualquier caso, el deseo de definir la belleza mediante números o fórmulas matemáticas no deja de ser un intento de generalizar el sentido de la estética de cada uno en particular, y eso resulta sumamente difícil porque este sentido es muy dispar y subjetivo, como bien reconoce el refranero popular español.

Bibliografía

- COMAP, 1992, *Las Matemáticas de la vida cotidiana*. Ed. Addison-Wesley / Universidad Autónoma de Madrid
- Georg Brügner, 1984, *Three-triangle-tangram*, *BIT Numerical Mathematics*, Volume 24, Number 3, Ed. Springer Netherlands.

- Ghyka, Matila C., 1992, *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. Ed. Poseidón. Barcelona.
- Ghyka, Matila C., 1992, *El número de oro, I Los ritmos, II Los ritos*. Ed. Poseidón. Barcelona.
- Paccioli di Borgo, Fray Luca, 1509, *De Divina Proportione*. Venecia.

<http://es.wikipedia.org/>

<http://www.piramides.org/>

Inés Márquez Rodríguez, es Profesora Titular del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna, en Tenerife (España). Es Colaboradora de Investigación del *Instituto de Astrofísica de Canarias*, y desarrolla sus líneas de investigación en *Alta Resolución en Física Solar*. Ha presentado varios trabajos en congresos y publicado numerosos artículos en revistas nacionales e internacionales. Tiene gran interés en la *Docencia Universitaria* y en la *Divulgación Científica*. Además de su dedicación a las labores de docencia e investigación, es muy aficionada a la *Música*, al *Dibujo* y a la *Pintura*.

e-mail: imarquez@ull.es