UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2008, Número 13, páginas 121-125
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

*Se dispone de dos "máquinas" que transforman números: la máquina **A** multiplica por 2 y la máquina **B** suma 1. Partiendo del número 5, llegar al número 32 usando las máquinas el menor número posible de veces.*

Este problema ha sido propuesto a profesores y estudiantes de primaria, con las adecuaciones del caso. Su carácter lúdico facilita su uso con niños desde el grado en el que se introduzca la multiplicación de números naturales de dos dígitos por otro de un dígito y brinda oportunidades de practicar operaciones sencillas combinándolas creativamente. En su solución hay un manejo implícito del concepto de función, de función inversa y de composición de funciones, y la búsqueda explícita de una secuencia óptima de máquinas.

Una manera de presentarlo es la siguiente:

Situación:

Se tiene dos máquinas que transforman números: La máquina **A** multiplica por 2 y la máquina **B** suma 1.

Utilizando solamente las máquinas, se puede partir de un número y se puede llegar a otro número.

Por ejemplo, se puede partir del número 4 y llegar al número 36:

$$4 \xrightarrow[\text{x2}]{\text{A}} 8 \xrightarrow[\text{+1}]{\text{B}} 9 \xrightarrow[\text{x2}]{\text{A}} 18 \xrightarrow[\text{x2}]{\text{A}} 36$$

Actividades individuales

1. Haz un dibujo que indique cómo llegar a 32, partiendo del número 5, usando solamente las máquinas **A** y **B.** Tú decides el orden y el número de veces que uses las máquinas **A** y **B.**

5 32

2. ¿Cómo harías para llegar a 32, partiendo de 5, pero usando las máquinas **A** y **B** el <u>menor número de veces</u>?

5 32

Con las ideas que suscita este problema, se puede proponer actividades grupales con mayor grado de dificultad, en talleres con alumnos de los últimos grados de primaria, de secundaria, de institutos superiores pedagógicos, o en talleres de capacitación docente. Una manera de hacerlo es, luego de las actividades individuales, formar parejas denominadas **I** y **II**. A las parejas **I** se les asigna ciertas actividades y a las parejas **II** otras actividades, previamente escritas en correspondientes hojas de papel. La idea es que luego se formen grupos de cuatro, integrados por una pareja **I** y una pareja **II**, en los cuales complementen sus experiencias en las actividades por parejas, para resolver los nuevos problemas que se les asigne.

Actividades grupales

Parejas I

a. Comparar los resultados obtenidos en las actividades individuales.
b. ¿Cómo se llegaría a 34, partiendo de 5 y usando las máquinas **A** y **B** el <u>menor número de veces</u>?
c. ¿Cómo se llegaría a 60, partiendo de 5 y usando las máquinas **A** y **B** el <u>menor número de veces</u>?
d. ¿Cómo se llegaría a 80, partiendo de 5 y usando las máquinas **A** y **B** el <u>menor número de veces</u>?
e. Partiendo de 5, ¿se puede llegar a cualquier número par mayor que 5, usando las máquinas **A** y **B**? Explicar.

Actividades grupales

Parejas II

a. Comparar los resultados obtenidos en las actividades individuales.
b. ¿Cómo se llegaría a 35, partiendo de 5 y usando las máquinas **A** y **B** el menor número de veces?
c. ¿Cómo se llegaría a 75, partiendo de 5 y usando las máquinas **A** y **B** el menor número de veces?
d. ¿Cómo se llegaría a 79, partiendo de 5 y usando las máquinas **A** y **B** el menor número de veces?
e. Partiendo de 5 ¿es posible llegar a cualquier número impar mayor que 5, usando las máquinas **A** y **B**? Explicar.

Actividades grupales

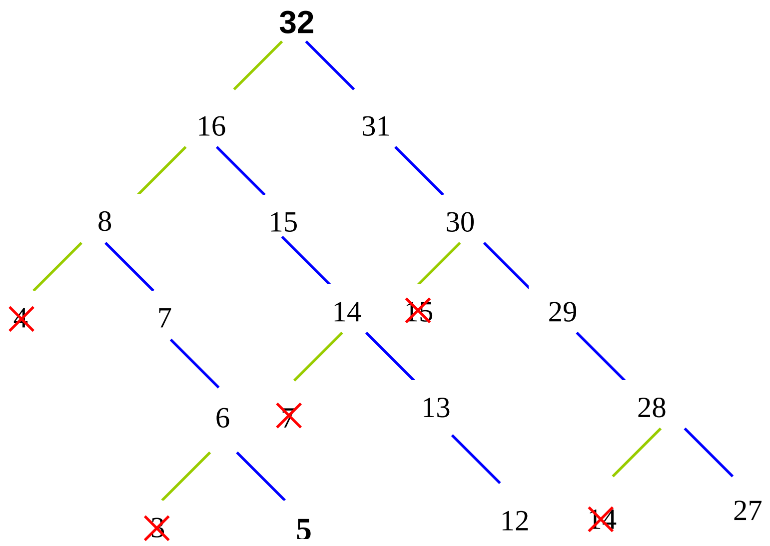
(Grupos de cuatro, integrados por una pareja I y una pareja II)

a. Partiendo de 5 ¿es posible llegar a cualquier número natural mayor que 5, usando las máquinas A y B? Explicar.
b. Partiendo de 5 ¿cuál es el mayor número al que se puede llegar usando 3 veces **A** y 3 veces **B**? Explicar.
c. Partiendo de 5, cuál es el mayor número al que se puede llegar usando **A** y **B** 4 veces en total?
d. Si se ha llegado al número 47 usando 2 veces **A** y 6 veces **B** ¿es posible saber de qué número se partió?
e. Crear un problema con las ideas suscitadas por la situación y las actividades propuestas.

Comentarios

El ensayo y error, el tanteo inteligente y la intuición jugarán papel importante en la solución de las diversas dificultades planteadas. Una vez más, destacamos la importancia de dar tiempo a los que resuelvan los problemas y dejar – u orientar – para que entre ellos encuentren las mejores soluciones.

Una manera ordenada de resolver el problema original, es comenzar por el final. Si se usa un diagrama de árbol, se podrá ver claramente por qué cinco es el menor número de veces que se use las máquinas **A** y **B** para llegar de 5 a 32. Comenzar por el final y usar "máquinas inversas" (la inversa de la máquina **A** divide entre 2 y la inversa de la máquina **B** resta 1), tiene la ventaja de que la inversa de **A** no puede aplicarse a los números impares y eso facilita el desarrollo del árbol, por tener menos ramas. A continuación mostramos esta solución y para simplificar la notación, los segmentos verdes corresponden a la máquina **A** y los segmentos azules corresponden a la máquina **B.**



Se han tachado los números que ya aparecieron antes (15, 7 y 14), pues no tiene sentido continuar, ya que sería repetir la rama que se inició en tal número; o porque de ese número es imposible llegar al 5 (4 y 3). Una vez que se ha obtenido el número 5, ya no se continúa con el desarrollo del árbol. Vemos así que, mirando de abajo hacia arriba, se llega a 32, partiendo de 5, siguiendo la secuencia **B B B A A**. Como se han examinado todas las posibilidades, tenemos una demostración de que esta secuencia es la que nos da el menor número de veces de aplicación de las máquinas **A** y **B**, para llegar de 5 a 32.

Es bueno conocer este método, pero no para imponerlo como "el" método de solución del problema.

En las actividades propuestas se enfatiza la búsqueda de una secuencia óptima de máquinas, como una manera de desafiar el uso creativo de operaciones sencillas y de estimular la "intuición optimizadora".

Generalizaciones y uso de cuantificadores

También se plantean situaciones relacionadas con el uso correcto de cuantificadores; así, las actividades *e* de las parejas I y II y la actividad *a* de los grupos para cuatro integrantes, podemos considerarlas como casos particulares de un problema más general de existencia. Para ello, definimos el conjunto S de todas las secuencias finitas de máquinas **A** y **B**; llamamos T a un conjunto de números naturales; y el resultado de aplicar a un número *n* una secuencia *s* de máquinas del conjunto S, lo denotamos s(*n*). El problema general de existencia, para las citadas actividades *e* y *a* lo enunciamos como sigue:

> Dado el conjunto de números T y el conjunto S de secuencias de máquinas **A** y **B** ¿para todo elemento t de T, existe un elemento s de S tal que $s(5) = t$?

Para la actividad *e* de las parejas I, el conjunto T es el de los números pares mayores que 5; para la actividad *e* de las parejas II es el conjunto de los números impares mayores que 5; y para la actividad *a* de los grupos de cuatro, es el conjunto de los números naturales mayores que 5.

Con la notación adoptada, la actividad *d* para grupos de cuatro integrantes, es un caso particular del siguiente problema de existencia y unicidad:

> Dado un elemento t_1 del conjunto de números T, ¿existe un único t_0 de T tal que $t_1 = s(t_0)$, donde s es un elemento de S con un número específico de veces de **A** y de **B**?

Las actividades específicas pedidas y los problemas generales planteados, nos muestran que como respuesta a la actividad *e* para los grupos de cuatro integrantes, pueden surgir muchos problemas interesantes a partir del problema originalmente planteado.

Preguntas abiertas

Con el diagrama de árbol no sólo hemos encontrado la secuencia más corta de máquinas **A** y **B** para llegar a 32, partiendo de 5, sino que ha quedado demostrado que no puede existir otra secuencia más corta que **BBBAA**; sin embargo, quedan interrogantes como

- ¿Cuál sería la demostración si en lugar de llegar a 32 se pidiera llegar a 4387?
- ¿Cuál sería la demostración si el problema fuera encontrar la secuencia más corta de máquinas **A** y **B** para llegar al número natural n, partiendo del número natural $m < n$?

El lector queda invitado a responder estas preguntas y a crear nuevos problemas.