UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2007, Número 12, páginas 27 - 36
ISSN: 1815-0640

Resolución de problemas y contextos matemáticos

Juana Contreras Sepúlveda y Claudio del Pino Ormachea

Resumen

En la actividad de resolución de problemas, eje fundamental en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, en general, es poco vivenciado por alumnos y profesores, que la mayoría de los problemas, se dejan resolver en distintos contextos matemáticos, es decir, que en sus resoluciones se pueden usar, juntos o separados, resultados y procedimientos geométricos, o algebraicos, o numéricos. En este trabajo se entrega una reflexión sobre este importante aspecto y se presenta un problema resuelto en diferentes contextos matemáticos.

Abstract

One of the core topics in learning mathematics involves problem solving. Students as well as teachers tend to have a very narrow approach believing that there is just one way to solve a particular problem. In general, they lack a broader point of view. In problem solving one can use either separately or simultaneously techniques and results from Algebra, Geometry or Arithmetic. In this work we present some thoughts about this issue. We show an example that can be solved using different mathematical techniques.

Introducción

Como todos los estudios que dicen relación con estrategias para resolver problemas coinciden (de Guzmán, 1993; González, 1995; Polya, 1970), para empezar a resolver un problema, junto con la etapa de familiarización, es importante elegir un ambiente matemático donde éste se formula, o eventualmente se re-formula. Una vez puesto el problema en un contexto determinado, tal como lo propone Schoenfeld (Schoenfeld, 1992), pasan a tener una importancia decisiva los recursos atingentes al conocimiento y manejo de proposiciones y procedimientos, que la persona que intenta resolver el problema, tenga en el contexto matemático donde se ha puesto el problema. Esta importancia se refleja en el hecho que, en este momento el problema a resolver pasa a ser un problema de carácter numérico, algebraico o geométrico.

Problemas y contextos

Relacionado con la resolución de problemas y contextos, poco referido en la literatura sobre resolución de problemas, se pueden plantear las siguientes consideraciones:

- Un problema no pertenece, de por sí, a un determinado contexto matemático. El problema pasa a ser de un contexto matemático en el momento que el *resolvedor* lo formula o re-formula (proyecta) en él.
- Es importante que el alumno comprenda que la matemática es un conjunto integrado de resultados y procedimientos, los cuales se separan para su enseñanza solamente por razones metodológicas. Por lo tanto un problema que surge, por ejemplo, en geometría, puede perfectamente ser resuelto con herramientas del álgebra y viceversa.
- En la medida que el *resolvedor* se sienta más seguro y confiado en el manejo de resultados y procedimientos de un determinado ámbito de la matemática, lo hará formular o re-formular, cuando sea posible, sus problemas en dicho ámbito.
- El *resolvedor* debe tener, como es de suponer, la suficiente flexibilidad para que una vez puesto el problema en un determinado contexto, si la solución no se vislumbra, reformular el problema en otro contexto que le parezca razonable. Este ejercicio se podrá repetir las veces que sea necesario, es decir, hasta que una solución aparezca (de Guzmán, 1993; Schoenfeld, 1992).
- Como la práctica lo corrobora, es posible que, con el problema planteado en un contexto matemático, se obtengan avances parciales en la búsqueda de la solución y luego proyectando el problema en otro contexto matemático y usando los avances obtenidos, se pueda acceder a una solución del problema (Polya, 1970).
- Una vez resuelto un problema, también es de alto interés, preguntarse que habría pasado si el problema se hubiese planteado en otro contexto matemático (de Guzmán, 1993; González, 1995). Es posible que de esta manera surjan soluciones más simples o *elegantes*.

Es altamente recomendable que el profesor de matemática enfatice explícitamente este aspecto con sus estudiantes, pues de esta manera permitirá que ellos, por una parte incrementen sus habilidades para resolver problemas, y por otra aprecien y valoren la riqueza y variedad de recursos que ofrece la matemática para resolver problemas.

Un problema y diversas soluciones

A modo de ejemplo y para ilustrar las ideas anteriores, se presenta un problema, clásico y sencillo, y se exploran diversas soluciones por medio de *proyecciones* de él en diversos contextos matemáticos.

En cada solución expuesta, se presenta: *Ambiente matemático* (algebraico, numérico o geométrico) en el cual se busca la solución[1], *Contenidos Matemáticos* que se utilizan en la solución, *Pre-requisitos específicos de contenidos* y un breve *Bosquejo de solución*.

Problema: Determinar un número real positivo x de modo que la expresión $A = x^2(16 - x^2)$ alcance su mayor valor, y determinar este valor.

- **Solución 1**.
  1. *Ambiente Matemático*: Numérico.
  2. *Contenidos Matemáticos*: Evaluación de expresiones algebraicas.
  3. *Pre-requisitos específicos de contenidos*:
     a) Números racionales
     b) Construcción de tabla de valores
     c) Orden en los números racionales
  4. *Bosquejo de solución*:

Para empezar, se construye una tabla de valores de $x^2(16 - x^2)$ para, por ejemplo, valores de x entre 0 y 6, con incrementos de 1:

x	0	**1**	2	3	**4**	5	6
$x^2(16 - x^2)$	0	15	48	63	0	-225	-720

Por inspección de esta tabla, se puede concluir que el valor de x buscado, debería estar entre 1 y 4, pues el valor de la expresión en 0.999 es 14.972 (aproximadamente) y para valores mayores que 4 es, claramente, negativa. Con esta observación, es posible refinar la tabla. Construyendo una nueva tabla para valores de x entre 1 y 4, con incrementos de 0.2, se puede concluir que el valor buscado de x se debería encontrar entre 2 y 3. Construyamos entonces una tabla, para valores de x entre 2 y 3 con incrementos de 0.1:

x	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	**2.8**	2.9	3
$x^2(16 - x^2)$	48	51.11	54.01	56.65	58.98	60.94	62.46	63.49	**63.97**	63.83	63

De esta tabla de valores, se concluye que, aproximadamente, el máximo de $x^2(16 - x^2)$ se alcanza cuando $x \approx 2.8$ y que el valor de este máximo es 63.97 (aproximadamente). Como es de suponer, este proceso se puede iterar hasta obtener un valor aproximado de x con la cantidad de decimales exactos que se desee. Este trabajo con tablas de valores se puede apoyar eficientemente con el uso, por ejemplo, de una planilla Excel.

[1] Como es de suponer, algunas soluciones combinan estos métodos. En tales casos, el ambiente matemático elegido es el que, a nuestro parecer, tiene *mayor peso* en la solución entregada.

- **Solución 2.**
  1. *Ambiente Matemático*: Gráfico.
  2. *Contenidos Matemáticos*: Funciones.
  3. *Pre-requisitos específicos de contenidos*:
     a) Nociones básicas de funciones
     b) Gráfica de funciones. Interpretación de gráficos.
  4. *Bosquejo de solución*:

Con apoyo de un programa computacional que grafique funciones o una calculadora gráfica, se grafica la función $y = x^2(16 - x^2)$, y por inspección del gráfico obtenido (revisando los correspondientes valores de y, para valores de x entre 0 y 4), se estima una solución aproximada, del problema.

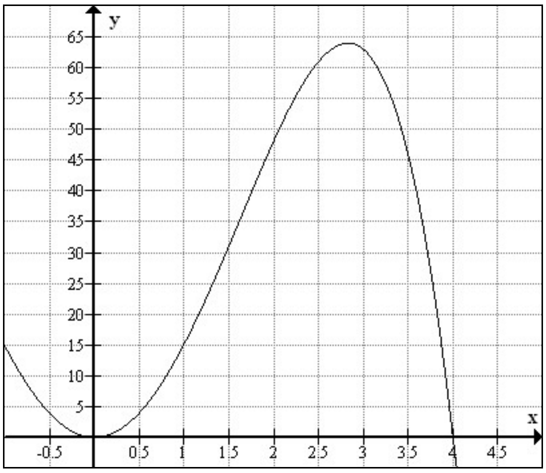


Gráfico de $y = x^2(16 - x^2)$

- **Solución 3**.
  1. *Ambiente Matemático*: Algebraico.
  2. *Contenidos Matemáticos*: *Manipulación* de expresiones algebraicas.
  3. *Pre-requisitos específicos de contenidos*:
     a) Completación de cuadrados
     b) Propiedad: Para cada real a, se cumple que $a^2 \geq 0$.
  4. *Bosquejo de solución*:

Completando cuadrado en x^2, se obtiene que la expresión propuesta es igual a

$$A = 64 - \left(x^2 - 8\right)^2$$

Analizando algebraicamente esta expresión, se concluye que A alcanza su mayor valor cuando $x^2 = 8$, es decir cuando $x = \sqrt{8} \approx 2.828427124$ y que este valor es igual a 64.

- **Solución 4**.
  1. *Ambiente Matemático*: Geométrico-algebraico.
  2. *Contenidos Matemáticos*: Función cuadrática.
  3. *Pre-requisitos específicos de contenidos*:
     a) Gráfica de la función cuadrática (parábola).
     b) Coordenadas del vértice de una parábola.
     c) Cambio de variable.
  4. *Bosquejo de solución*:

Es claro que $A = x^2(16 - x^2) = -x^4 + 16x^2$. Haciendo $u = x^2$, se tiene que $A = A(u) = -u^2 + 16u$ es una función cuadrática en u. Luego, en el plano $u\,A$ el gráfico de $A = A(u)$ es una parábola. Como el coeficiente principal de A es negativo, ella se *abre* hacia abajo, luego los valores de u y A que dan la solución del problema son las coordenadas del vértice de esta parábola: $(u, A) = (8{,}64)$. Luego A es máximo cuando $x = \sqrt{8}$ y su máximo valor es 64.

- **Solución 5**.
  1. *Ambiente Matemático*: Algebraico.
  2. *Contenidos Matemáticos*: Funciones.
  3. *Pre-requisitos específicos de contenidos*:
     a) Cálculo de pre-imágenes.
     b) Recorrido de una función.
     c) Ecuaciones cuadráticas.
  4. *Bosquejo de solución*:

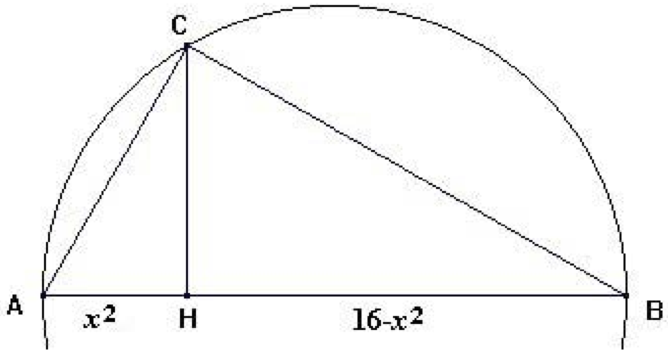
Para buscar el recorrido de la función $A = x^2(16 - x^2) = -x^4 + 16x^2$, se despeja la variable x (positiva) obteniendo dos valores de x: $\sqrt{8 \pm \sqrt{64 - A}}$. De donde se obtiene que el recorrido es igual a $\{A \in IR / A \leq 64\}$. Luego, el mayor valor que toma la expresión propuesta es 64. Buscando la pre-imagen (positiva) de este valor, se obtiene que el máximo de la expresión dada es alcanzado en $x = \sqrt{8}$.

- **Solución 6**.
  1. *Ambiente Matemático*: Algebraico.
  2. *Contenidos Matemáticos*: Desigualdades.
  3. *Pre-requisitos específicos de contenidos*:
     a) Resolución de ecuaciones cuadráticas.
     b) Propiedades de la relación $\leq$.
     c) Conocer el siguiente resultado: *Si a y b son números reales positivos, entonces la media geométrica entre a y b es menor o igual a su media aritmética, con igualdad solamente cuando $a = b$, es decir $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.*
  4. *Bosquejo de solución*:

Es claro que el valor de x buscado debe ser tal que $16-x^2$ es positivo. Usando la desigualdad mencionada con $a=x^2$ y $b=16-x^2$, se obtiene $x^2(16-x^2)\leq\left(\frac{x^2+(16-x^2)}{2}\right)^2=64,$ de donde el máximo valor que puede tomar la expresión propuesta es 64. El valor correspondiente de x que alcanza este máximo es la solución positiva de la ecuación $x^2=16-x^2$.

- **Solución 7**.
    1. *Ambiente Matemático*: Geométrico.
    2. *Contenidos Matemáticos*: Triángulos semejantes.
    3. *Pre-requisitos específicos de contenidos*:
        a) Triángulos rectángulos.
        b) Proyección de un segmento sobre otro.
        c) Segmentos proporcionales.
        d) Teorema de Euclides: *En todo triángulo rectángulo, la altura correspondiente al ángulo recto es media proporcional entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa*.
    4. *Bosquejo de solución*:

Se construye una semi-circunferencia de 16 unidades de diámetro. Sea AB un diámetro. Sea H un punto cualquiera del segmento AB. Si se denota por x^2 la longitud del segmento AH, entonces la longitud de HB será $16-x^2$. Se construye el triángulo ABC (rectángulo en C).



Por Teorema de Euclides, $CH^2=AH\cdot HB=x^2(16-x^2)$. De aquí, $x^2(16-x^2)$ alcanza su máximo valor cuando CH^2 es máximo. Claramente esto sucede cuando CH es un radio de la circunferencia, es decir cuando H es el punto medio de AB. Luego, $x^2(16-x^2)$, alcanza su mayor valor cuando $x^2=16-x^2$, es decir, cuando $x=\sqrt{8}$.

- **Solución 8**.
  1. *Ambiente Matemático*: Algebraico.
  2. *Contenidos Matemáticos*: Polinomios.
  3. *Pre-requisitos específicos de contenidos*:
     a) Polinomios: Raíces e igualdad de polinomios.
     b) Sistema de ecuaciones.
     c) Conocer el principio de Huygens[2]: *Si* $p(x)$ *es un polinomio y el valor de* $p(a)$ *es un máximo, entonces cuando* $z < p(a)$, *con* z *"cerca" de* $p(a)$, *la ecuación* $p(x) = z$ *tendrá dos soluciones distintas, que serán la misma (solución doble) cuando* $z = p(a)$.
  4. *Bosquejo de solución*:

Haciendo $p(x) = x^2(16 - x^2)$, el punto a buscado, de acuerdo al principio de Huygens debe cumplir

$$p(x) - p(a) = (x-a)^2(bx^2 + cx + d)$$

de donde

$$-x^4 + 16x^2 + a^4 - 16a^2 = bx^4 + (c - 2ab)x^3 + (a^2b - 2ac + d)x^2 + (a^2c - 2ad)x + a^2d$$

Como los polinomios precedentes son iguales, se obtiene que sus coeficientes satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rl|}
b = & -1 \\
c - 2ab = & 0 \\
a^2b - 2ac + d = & 16 \\
a^2c - 2ad = & 0 \\
a^2d = & a^4 - 16a^2 \\ \hline
\end{array}$$

Resolviendo este sistema se obtiene que $a = \sqrt{8}$.

- **Solución 9**.
  1. *Ambiente Matemático*: Algebraico.
  2. *Contenidos Matemáticos*: Polinomios.
  3. *Pre-requisitos específicos de contenidos*:
     a) Desigualdades: Conocer la propiedad: Si $a < b + h$, para todo h positivo, entonces $a \leq b$.
     b) Sistema de ecuaciones.

[2] **Christiaan Huygens (**1629 – 1695). Matemático Holandés.

c) Conocer el principio: *Si* $p(x)$ *es un polinomio y el valor de* $p(c)$ *es un máximo, entonces para todo* h *(positivo y pequeño) se cumple que* $p(c+h)<p(c)$ y $p(c-h)<p(c)$.

4. *Bosquejo de solución*:

Sea c un número real tal que el valor de $p(c)$ *es un máximo* y h un número real positivo y *pequeño*, aplicando el principio precedente se tienen las siguientes desigualdades:

$$16(c+h)^2-(c+h)^4<16c^2-c^4 \quad \text{y} \quad 16(c-h)^2-(c-h)^4<16c^2-c^4$$

Desarrollando y ordenando se tiene que estas desigualdades son equivalentes a:

$$32c+16h<4c^3+h(6c^2+4ch+h^2) \ \text{ y } \ 32c-16h>4c^3-h(6c^2-4ch+h^2).$$

De donde, como h es positivo:

$$32c<4c^3+h(6c^2+4ch+h^2) \quad \text{y} \quad 32c>4c^3-h(6c^2-4ch+h^2)$$

como

$$6c^2+4ch+h^2=2c^2+(2c+h)^2>0 \ \text{y} \ 6c^2-4ch+h^2=2c^2+(2c-h)^2>0$$

y estas relaciones son válidas para todo h (positivo y pequeño), se deduce que $32c=4c^3$, de donde $c=\sqrt{8}.$

- **Solución 10**.
  1. *Ambiente Matemático*: Algebraico.
  2. *Contenidos Matemáticos*: Aplicaciones de la derivada.
  3. *Pre-requisitos específicos de contenidos*:
     a) Método para calcular extremos de una función, usando derivadas.
     b) Resolución de ecuaciones.
     c) Evaluación de expresiones algebraicas.
  4. *Bosquejo de solución*:

En este caso, al igualar a 0, la derivada de $y=-x^4+16x^2$, se tiene que $x=\sqrt{8}$ es un candidato donde la función puede presentar un extremo (valor crítico). Evaluando la derivada, $4x\left(8-x^2\right)$, para una valor *un poco menor* y para un valor *un poco mayor* que $x=\sqrt{8}$, se observa que la derivada cambia de signo, pasando de positivo a negativo. Por lo tanto, y es máximo cuando $x=\sqrt{8}$.

- **Solución 11.**
  1. *Ambiente Matemático*: Algebraico.
  2. *Contenidos Matemáticos*: Aplicaciones de las derivadas parciales.
  3. *Pre-requisitos específicos de contenidos*:
     a) Método de los multiplicadores de Lagrange.
     b) Resolución de sistemas de ecuaciones.
  4. *Bosquejo de solución*:

Se plantea el problema de maximizar la función de dos variables $z = f(x, y) = x^2 y$ sujeto a la restricción $y = 16 - x^2$. Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange se obtiene el sistema de ecuaciones a resolver: $2xy = \lambda(2x)$, $x^2 = \lambda$, $y + x^2 = 16$, de donde para $x = \sqrt{8}$ el valor de z alcanza un valor máximo igual a 64.

Comentarios finales

En este trabajo, se ha presentado un problema elemental de optimización y expuesto diversas resoluciones, que varían de acuerdo al ambiente matemático y las correspondientes técnicas propias de éstos. La idea, como es de suponer, es trabajar este problema con nuestros estudiantes y a medida que avancen en sus cursos de matemática, ir retomando este problema y resolverlo con nuevas técnicas. Por ejemplo, se podría comentar la solución 1, al estudiar evaluación de expresiones algebraicas, la solución 3 en la temática de los números reales y expresiones algebraicas, la solución 4 en la temática de la función cuadrática, la solución 7 cuando se estudie en la unidad de geometría, el teorema de Euclides, etc. Al mismo tiempo que el estudiante va experimentando con nuevas técnicas para abordar la resolución del problema comentado, va incrementando sus *recursos* para enfrentar nuevos problemas. De esta manera el alumno, por una parte, aumenta su capacidad para resolver problemas, y por otra, incrementa su confianza en este importante ámbito de la matemática.

Desde el punto de vista de la enseñanza y enseñanza de la matemática, es altamente interesante reflexionar sobre diversas técnicas y diferentes ambientes donde resolver un problema determinado, ya que ello nos obliga a profundizar en aspectos que generalmente se descuidan, como son: ambiente donde *vive* el problema, ambiente donde *viven* los recursos matemáticos utilizados, etc. y al mismo tiempo a disfrutar de la riqueza, variedad y poder de la matemática en el desafío de resolver problemas.

Bibliografía

- De Guzmán, M. (1993): “Tendencias Innovadoras en educación matemática”. Ediciones OEA.
- De Guzmán, M. (1995): “Aventuras matemáticas: una aventura hacia el caos y otros episodios”. Ediciones Pirámide. Madrid.
- Contreras, L. y Carrillo, J. (1998): “Diversas concepciones sobre resolución de problemas en el aula”. Educación matemática. Vol. 10 Nº 1. 26-37.
- González, F. (1995): “El corazón de la matemática”. Copiher.
- Polya, G. (1970): “How to solve it”. Editorial Trillas.
- Schoenfeld, A. (1992): "Learning to think mathematically: Problem Solving, metacognition, and sense making in mathematics". En Grouws, D.A. (Ed): Handbook of research on Mathematics teaching and learning. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York Macmillan Publishing Company. 334-370.
- Selden, A. Et all. (1997): “What does it take to be an expert problem solver?” MAA Archivo html disponible en http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_4.html.
- Spare, J. (1865): “The differential calculus”. Boston: Bradley, Dayton and Company.

Juana Contreras Sepúlveda es profesora y magíster en matemática. Actualmente es académica del Instituto de Matemática y Física de la Universidad de Talca, Chile.
e-mail: jcontres@utalca.cl

Claudio del Pino Ormachea, profesor y magíster en matemática. Actualmente es académico del Instituto de Matemática y Física de la Universidad de Talca, Chile.
e-mail: cdelpino@utalca.cl