UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2007, Número 11, páginas 147 - 155
ISSN: 1815-0640

Números poligonales como disparadores de un proceso de validación

Nora Ferreira, Estela Rechimont y Carlos Parodi

Resumen

En este trabajo analizamos la respuesta de estudiantes de Profesorado en Matemática (Universidad Nacional de La Pampa, Argentina) a un problema cuya resolución, implica la búsqueda de relaciones, la producción de conjeturas y la validación de algunos supuestos surgidos del gráfico.
Observamos que el trabajo con números poligonales permite un acercamiento a la historia de los números naturales y además facilita la manipulación y producción de fórmulas a través de la visualización de las mismas en el campo geométrico.

Introducción

En el transcurso de distintos períodos de nuestra actividad como docentes del Profesorado en Matemática y Profesorado de EGB (Educación General Básica) 1ro y 2do Ciclos, carreras de grado correspondientes a la Universidad Nacional de La Pampa, Argentina, observamos en los alumnos de los primeros años, dificultades en el aprendizaje de algunos temas de matemática y en particular en los procesos de argumentación, justificación o validación de conceptos y procedimientos presentes en la solución de alguna situación-problema.

A partir de esta problemática y considerando numerosas investigaciones que aportan elementos a la enseñanza y aprendizaje de la matemática en general y la demostración en particular, iniciamos un trabajo de búsqueda y discusión de situaciones que contribuyan a superar las dificultades de los alumnos en la comprensión y elaboración de validaciones.

Números Poligonales

Una de las clasificaciones menos conocida de los números naturales, heredada de los Pitagóricos, es la asociada a diversas configuraciones geométricas. Cada número natural está representado por una colección de objetos que pueden ser dispuestos en un polígono determinado. Comenzando, en general, todas las sucesiones con un único elemento.

Por ejemplo, los números triangulares 3, 6, 10 se ubican en las siguientes configuraciones (Figura 1):

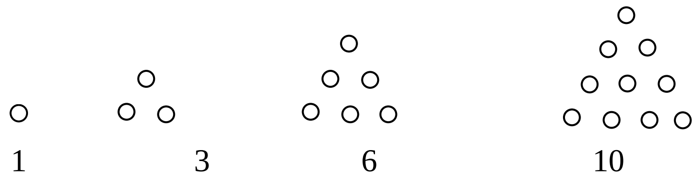

Figura 1

Los números cuadrados se disponen (Figura 2):

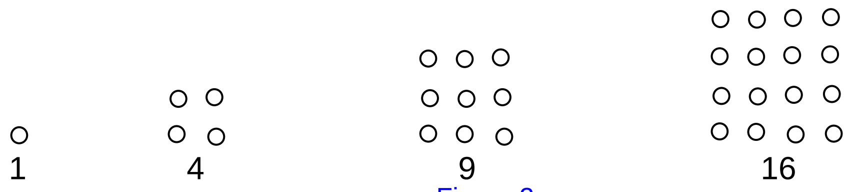

Figura 2

En general, el primer número poligonal es 1. El segundo número poligonal es *n*, considerando que el polígono en cuestión tiene *n* vértices, y cada lado tendrá 2 elementos. El tercer poligonal se obtiene agregando al conjunto los elementos necesarios para que cada lado del polígono tenga 3 elementos, y así sucesivamente.

Los primeros números pentagonales son 1, 5, 12, 22, 35,...(Figura 3)

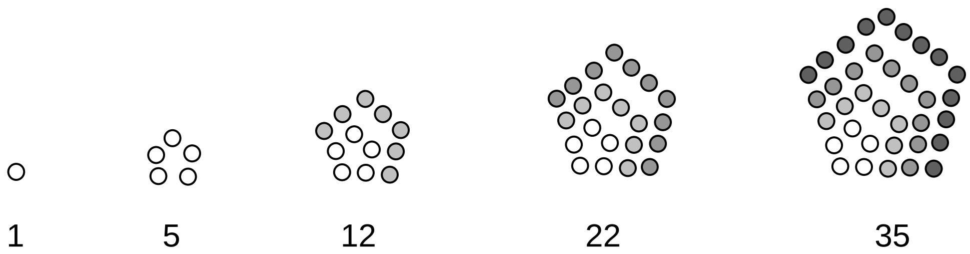

Figura 3

De forma análoga se definen los números hexagonales, cuyos primeros representantes son: 1, 6, 15, 28, 45,...

A partir de la consideración de casos particulares se puede obtener no sólo una descripción general de un determinado número poligonal sino también interesantes propiedades del mismo.

Así, es sencillo afirmar que el *n*-ésimo número triangular se obtiene como la suma de los primeros *n* números naturales. Y utilizando expresiones algebraicas podríamos indicarlo: $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$

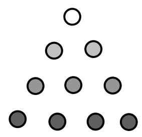

Figura 4

De forma análoga, podemos pensar el *n*-ésimo número cuadrado como n^2, y a cada uno de ellos como la suma de los sucesivos números impares, tal como surge de la configuración geométrica de los mismos.

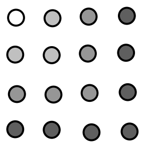

Figura 5

La expresión algebraica de dicha propiedad será:

$$C_n = n^2 = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = \sum_{i=1}^{n} 2i - 1$$

Es sencillo deducir otras propiedades de los números poligonales analizando las disposiciones de los mismos. Por ejemplo: "la suma de dos números triangulares es igual a un número rectangular con una unidad de diferencia entre sus lados".

Experiencia áulica

La resolución de un problema puede involucrar diversos contenidos y procedimientos muy variados. En este caso se planteó a los estudiantes un problema cuya resolución, en un análisis a priori, implica la búsqueda de relaciones, la producción de conjeturas como así también la validación de algunos supuestos surgidos del gráfico.

Sin embargo, el solo hecho de proponer un problema y disponer a los estudiantes a hallar una solución aceptable no es suficiente para garantizar que pongan en marcha un proceso de prueba. Las experiencias desarrolladas por Nicolás Balacheff (Balacheff, 2000) muestran que, aún en grupos habituados a resolver problemas, son pocos los estudiantes que ven la necesidad y se comprometen en la producción de una prueba de sus resultados.

Con la intención de analizar los procesos de validación utilizados por estudiantes de Profesorado en Matemática, presentamos, a un grupo de alumnos de segundo año de esta carrera, los números poligonales con una serie de preguntas e indicaciones.

Actividades:

a) Analiza los primeros números triangulares y escribe una fórmula general para obtener cualquiera de ellos (se mostró la disposición de dos triángulos simétricos formando un rectángulo).
b) Analiza operaciones entre pares de números triangulares consecutivos y plantea relaciones (Se prevé que obtengan: $T_n + T_{n+1} = (n+1)^2$ y $T_n - T_{n-1} = n$). ¿Puedes demostrarlas?
c) Visualiza y escribe los primeros 10 términos de las secuencias de números triangulares y de números cuadrados.
d) Compara ambas secuencias y sus configuraciones geométricas. Analiza la relación que hay entre los números triangulares y los cuadrados. Escribe tu conjetura. ¿Puedes demostrarla?
e) ¿Puedes visualizar y validar la siguiente aserción? "La suma de ocho números triangulares iguales, más una unidad, da un número cuadrado" (Sessa, 2005)
f) Construye los primeros números pentagonales. Intenta encontrar una fórmula para obtener el *n*-ésimo número pentagonal.
g) Busca una relación que permita calcular cualquier número pentagonal a partir de un número triangular.
h) Indaga en una relación entre números Pentagonales, Cuadrados y Triangulares. (Se prevé que hallen la relación $P_n = C_n + T_n$).
i) Intenta encontrar una fórmula para obtener cualquier número hexagonal.

En el transcurso de la actividad los estudiantes se mostraron sorprendidos y entusiasmados con las disposiciones geométricas analizadas. En algunos casos tenían algún conocimiento sólo de los números triangulares pero, en general, nunca habían escuchado hablar de esta clasificación de los números naturales a partir de configuraciones geométricas.

Propusieron el trabajo con material concreto (botones, gemas, etc.) para facilitar el desarrollo de los números pentagonales cuya representación gráfica resultó un poco más elaborada que en los casos anteriores.

Tímidamente en principio, luego con algo más de decisión comenzaron a plantear relaciones e igualdades. Las primeras validaciones algebraicas se produjeron como respuesta a los requerimientos de la actividad (apartados b), d) y e)), pero en los sucesivos problemas y en la discusión propiciada en la clase, esa demanda externa de una validación, se convirtió en una necesidad planteada por los propios resolutores.

Algunas de las conjeturas que se formularon y validaron en los trabajos presentados por los estudiantes son:

- La suma de dos números triangulares consecutivos puede calcularse como el cuadrado de la diferencia entre ambos: $T_{n+1} + T_n = (T_{n+1} - T_n)^2$.

- La suma de dos números triangulares consecutivos es igual a un número cuadrado: $T_{n+1} + T_n = C_{n+1}$.
- $C_n + C_{n+1} = 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) + (2n+1) + (2n-1) + ... + 5 + 3 + 1$, obtenida a partir de analizar la siguiente configuración geométrica (Figura 6).

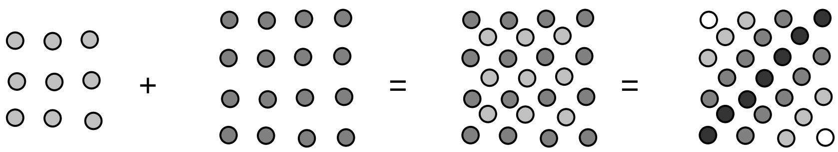

Figura 6

- $P_n = P_{n-1} + 4 + 3(n-2) \quad \forall n > 2$
- $P_n = P_1 + 4(n-1) + 3T_{n-2}$
- $P_n = T_n + n(n-1)$
- $P_n - C_n = T_{n-1}$
- $H_n = P_n + T_{n-1}$
- El n-ésimo número poligonal de k lados se obtiene mediante la fórmula $K_n = \frac{n(n+1)}{2} + (k-3)\frac{n(n-1)}{2}$.

Nos detendremos en la última propiedad mencionada, para estudiar en detalle el análisis realizado por los estudiantes para llegar a esta conjetura, el trabajo de validación, las dificultades encontradas y las utilidades reveladas en la presentación de esta tarea.

Conjetura y validación

Al trabajar en la fórmula para hallar los sucesivos números poligonales de orden *n*, para cada configuración geométrica en particular, los estudiantes fueron buscando generalizaciones, se plantearon relaciones de recurrencia entre números de distinto orden y también se encontraron fórmulas directas sin hacer referencia a términos anteriores de la sucesión.

Así, obtuvieron:

Nros. Triangulares: $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Nros. Cuadrados: $C_n = \frac{n(n+1)}{2} + (4-3)\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$

Nros. Pentagonales: $P_n = \frac{n(n+1)}{2} + (5-3)\frac{n(n-1)}{2}$

Nros. Hexagonales: $H_n = \frac{n(n+1)}{2} + (6-3)\frac{n(n-1)}{2}$

Para un polígono de *k* lados, el *n*-ésimo número poligonal será:

Nros. *K*-gonales: $K_n = \frac{n(n+1)}{2} + (k-3)\frac{n(n-1)}{2}$

Los estudiantes manifestaron gran disposición en la búsqueda de regularidades y trabajaron con interés en la validación, sin embargo, no lograron concluir la demostración por sí mismos.

La propuesta de una demostración por inducción surgió en la clase a raíz de haber utilizado este tipo de pruebas con anterioridad elogiando en muchos casos la sencillez de una resolución de esta naturaleza.

Los estudiantes pudieron, sin dificultades, hallar una fórmula para el *n*-ésimo número poligonal cuando el número de lados del polígono era constante, sin embargo, surgió como un obstáculo, al momento de demostrar, el trabajo con las dos variables, por un lado el número *n* de orden de cada poligonal y por otro el número *k* de lados del polígono. En este momento fue necesaria la intervención del docente a cargo de la actividad para organizar la discusión y tratar de precisar la idea de dependencia, de cada número poligonal, de ambas variables, es decir, basándose en los sucesivos ejemplos genéricos presentados, justificar la nueva generalización. Por otro lado, fue necesario definir claramente sobre cuál de las variables se aplicaba la inducción en el proceso de demostración.

En un trabajo conjunto, los estudiantes desarrollaron la construcción general de un polígono de *k* lados, a partir de la definición considerada y del número de lados, agregando elementos al conjunto a medida que aumenta el orden.

Demostración por inducción sobre el número de orden:

- Si el polígono tiene 2 elementos en cada lado, el número de elementos es k y es sencillo verificar que la fórmula es válida para $n = 2$
- Supongamos que la fórmula es válida para un cierto n y tratemos de probar su validez para un $(n+1)$
- Dado el número poligonal de orden n, construimos el siguiente agregando las unidades necesarias como para que cada lado cuente con $(n+1)$ elementos.

Al primer lado sólo le añadimos 1 elemento, ése será un nuevo vértice, al lado siguiente sólo debemos agregar *n* elementos, y al siguiente también puesto que los vértices se comparten, así hasta llegar al último vértice que completará los $(n+1)$ elementos del último lado (Ver desarrollo sobre el pentágono en Figura 7).

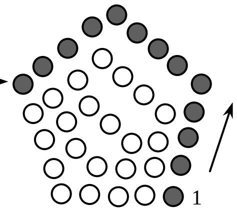

Figura 7

¿Cómo contar el número de elementos del poligonal de orden $(n+1)$?

Al poligonal de orden *n* le sumamos $1+n(k-2)$, esto es:

$K_{(n+1)} = K_n + 1 + n(k-2)$,

utilizando la hipótesis inductiva $K_n = \frac{n(n+1)}{2} + (k-3)\frac{n(n-1)}{2}$, tenemos:

$$K_{(n+1)} = \frac{n(n+1)}{2} + (k-3)\frac{n(n-1)}{2} + 1 + n(k-2) = k\frac{(n+1)n}{2} - (n^2-1)$$

que es igual a la obtenida al desarrollar la expresión $\frac{(n+1)(n+2)}{2} + (k-3)\frac{(n+1)n}{2}$,

con lo cual se concluye la validez de la fórmula para $(n+1)$ y con eso la demostración para todo *n*.

Demostración por inducción sobre el número de lados:

- Si el polígono tiene 3 lados, el número de elementos es $\frac{n(n+1)}{2}$ y es sencillo verificar que la fórmula es válida.
- Supongamos que la fórmula es válida para un cierto k y tratemos de probar su validez para un $(k+1)$
- Dado el número poligonal (k lados) de orden n, construimos el poligonal del mismo orden con $(k+1)$ lados agregando las unidades necesarias como para que en cada polígono anterior se cuente el correspondiente número de lados.

Al poligonal de orden dos se le debe agregar 1 elemento (puesto que se está agregando un lado), al de orden tres se le agregan 2, al de orden cuatro se le agregan 3 y así sucesivamente, con lo cual al de orden *n* se le agregarán $(n-1)$ elementos. (Ver desarrollo sobre el pentágono en Figura 8).

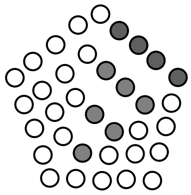

Figura 8

¿Cómo contar el número de elementos del $(k+1)$-poligonal de orden *n*?

Al *k*-poligonal de orden *n* le sumamos $1+2+\ldots+(n-1)$, esto es:

$(K+1)_n = K_n + 1 + 2 + \ldots + (n-1)$,

utilizando la hipótesis inductiva $K_n = \frac{n(n+1)}{2} + (k-3)\frac{n(n-1)}{2}$ y la suma de los primeros $(n-1)$ naturales tenemos:

$$(K+1)_n = \frac{n(n+1)}{2} + (k-2)\frac{n(n-1)}{2}$$

con lo cual se concluye la validez de la fórmula para $(k+1)$ y con eso la demostración para todo *k*.

Comentarios Finales

En el comienzo de la actividad, parecía remota la posibilidad de generar una fórmula semejante a la demostrada, no sólo por la renuencia manifestada por los alumnos a producir sus propias conjeturas sino también por los escasos intentos de validación puestos en juego en la clase.

La producción de fórmulas para cada uno de los polígonos considerados requirió una generalización a partir de los ejemplos presentados. Al desarrollar una fórmula para cualquier número de lados del polígono, los estudiantes tomaron como ejemplo particular esas sucesivas generalizaciones obtenidas anteriormente. A raíz de esta observación, nos parece interesante considerar que la actividad también funcionó sobre las actitudes de los alumnos puesto que mostraron seguridad en la defensa de las fórmulas producidas e interés en hallar una justificación de las mismas.

A esta altura de su carrera los estudiantes han cursado asignaturas básicas del plan de estudios, en las cuales se utilizan diferentes mecanismos de validación. No obstante, a través de un análisis de las propuestas de trabajo en el estudio de las demostraciones por inducción, notamos que los ejercicios consisten en fórmulas ya planteadas sobre las que se debe actuar algebraicamente, obviando la etapa de búsqueda de características comunes, construcción de la expresión y formulación de una conjetura.

La propuesta de trabajo a partir de los números poligonales no sólo permite un acercamiento a los estudios de la escuela pitagórica sino que facilita la manipulación y producción de fórmulas a través de la visualización de las mismas en el campo geométrico

Consideramos que las actividades planteadas pueden ser utilizadas para completar el estudio de las demostraciones por inducción, incentivar el trabajo algebraico y promover la búsqueda de generalizaciones y actividades de validación en matemática.

Bibliografía

- Balacheff, N. (2000): *Procesos de prueba en los alumnos de matemática*. Una empresa docente, Universidad de los Andes, Bogotá.
- Sessa, C. (2005): *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas*. Libros del Zorzal, Buenos Aires.

Nora Ferreira, nació en Ingeniero Luiggi, La Pampa, en 1966. Obtuvo los títulos de Profesor en Matemática y Física y Licenciada en Matemática. Ha participado en numerosos proyectos de investigación. Se desempeña como docente de la Universidad Nacional de La Pampa desde 1987. Ha presentado y publicado artículos en revistas, jornadas y congresos.
noraf@exactas.unlpam.edu.ar

Estela Rechimont, nació en Santa Rosa el 27 de agosto de 1947. Obtuvo los títulos de Profesor en Matemática y Física. Licenciada en Matemática y Magister en Didáctica de la Matemática. Ha dirigido numerosos proyectos de investigación. Se desempeña como docente de la Universidad Nacional de La Pampa desde 1973. Ha presentado y publicado artículos en revistas, jornadas y congresos.
rechimont@exactas.unlpam.edu.ar

Carlos Parodi, nació en 1962 en Carlos Tejedor, Provincia de Buenos Aires. Obtuvo los títulos de Ingeniero Electromecánico y Magister en Didáctica de la Matemática. Ha participado en numerosos proyectos de investigación. Se desempeña como docente de la Universidad Nacional de La Pampa desde 1992. Ha presentado y publicado artículos en revistas, jornadas y congresos.
Parodic@ing.unlpam.edu.ar