

## Experimento de enseñanza para el tratamiento del mínimo común múltiplo

Elisabeth Ramos-Rodríguez, Claudia Graciela Martínez Espíndola

Fecha de recepción: 10/03/2020  
Fecha de aceptación: 28/08/2020

<p><b>Resumen</b></p>	<p>El presente trabajo muestra los resultados de un experimento de enseñanza que aborda el tratamiento del mínimo común múltiplo (mcm) desde un punto de vista conceptual por sobre la mecanización que existe actualmente. Considerando antecedentes que sustentan la problemática, entre ellos la forma de presentar del mcm en textos escolares y pruebas estandarizadas, se lleva a cabo bajo el enfoque de Investigación de Diseño, un estudio cualitativo de tipo experimental puro con grupo único y aplicación de pre y post test, en estudiantes de primer año de secundaria (14 a 15 años de edad). Al analizar los datos se evidencia que la propuesta de enseñanza para el mínimo común múltiplo favorece la comprensión y aplicación de este concepto por sobre su mecanización. <b>Palabras clave:</b> Mínimo común múltiplo, experimento de enseñanza, mecanización.</p>
<p><b>Abstract</b></p>	<p>The present work show the results of an teaching experiment that aboard the treatment of the least common multiple from a conceptual point of view about the mechanization that exist at present considering antecedents that sustain the problematic, between them the form of presenting the least common multiple in scholar texts and standardized tests, it carry out under the focus of Investigation of Design, an qualitative study of pure experimental kind with unic group and application of pre and post test, in first grade students of secondary (14 to 15 years old). When analyzing the datas it evidence that the purpose of teaching for the least common multiple favors the comprehension and application of this concept about its mechanization <b>Keyword:</b> Least Common multiple, experiment of teaching, mechanization.</p>
<p><b>Resumo</b></p>	<p>Este trabalho apresenta os resultados de um experimento de ensino que aborda o tratamento do mínmo múltiplo comum (mmc) do ponto de vista conceitual sobre a mecanização existente. Considerando os antecedentes que apóiam o problema, incluindo a maneira de apresentar o lcm Nos textos escolares e nos testes padronizados, é realizado sob a abordagem Design Research, um estudo qualitativo de tipo experimental puro com um único grupo e aplicação de pré e pós teste, em alunos do primeiro ano do ensino médio (14 a 15 anos de idade).. Ao analisar os dados, fica evidente que a proposta de ensino para do mínimo múltiplo comum favorece a compreensão e aplicação desse conceito sobre sua mecanização. <b>Palavras chaves:</b> Mínimo múltiplo comum, experiência de ensino, mecanização.</p>

### 1. Introducción

El concepto de mínimo común múltiplo (mcm) se observa por primera vez en 1600 a.C. en el Papiro de Ahmes como parte del procedimiento de resolución de la

suma de fracciones. Posteriormente, Euclides alrededor del año 300 lo formaliza en cuanto a definición y enuncia algunos teoremas al respecto, donde destaca el concepto de divisibilidad, el algoritmo de la división y el teorema fundamental de la aritmética, los cuales son la base para nuestro objeto matemático. La definición clásica actual de m.c.m. se puede encontrar en diversos textos, una de ellas la presenta Lewin (2011, p.29):

Definición 1: El *mínimo común múltiplo* de dos enteros **no nulos**  $a$  y  $b$  es el menor entero positivo que es múltiplo de  $a$  y de  $b$ . Se le denotará  $[a, b]$ , o bien,  $mcm(a, b)$ .

Dada la relevancia de este concepto, a pesar de los años, sigue empleándose esta definición en las aulas, por ejemplo, para resolver operaciones con fracciones, en la suma de fracciones algebraicas y en la reducción de radicales a índice común.

Sin embargo, autores como Egodawatte (2011) y González-Calero, Martínez y Sotos (2016) evidencian que este objeto matemático no es comprendido por los estudiantes en cuanto a su definición. En este contexto nos planteamos diseñar una propuesta de enseñanza con el objetivo de tratar el cálculo de mcm desde un punto de vista conceptual por sobre el procedimental, permitiendo que los alumnos evidencien por sí mismos qué representa el proceso que ellos realizan.

## 2. Problemática y antecedentes

La mecanización en clases de matemáticas se basa en la repetición y absorción de contenidos sin un mayor análisis de estos. Si bien esta forma de enseñanza funciona para el objetivo que tienen las pruebas estandarizadas, dificulta la comprensión de los conceptos matemáticos, dejándolos como herramientas de cálculo y no profundiza en las preguntas principales: ¿qué?, ¿para qué?, ¿por qué?, como lo confirma Calvo (2008) al evidenciar que “los niños son capaces de resolver mecánicamente las operaciones fundamentales básicas, pero no saben cómo aplicarlas para la solución de un problema, ya que sólo se les ha enseñado a actuar de manera mecánica y repetitiva” (p.123). Dicha mecanización es observable en el mcm con la descomposición de factores primos, estrategia de cálculo que no tiene mucha relación con la definición específica del mcm y genera que este objeto matemático sea comprendido por los estudiantes como una herramienta útil para otros objetos matemáticos o para resolver problemas.

En las aulas se pueden presenciar problemas al momento calcular el mcm por parte de los estudiantes y también cuando se debe entender y describir el concepto. En efecto, Egodawatte (2011) identificó que el principal problema al hacer operaciones con fracciones era trabajar con el mcm, donde se observaron errores en las operaciones de cálculo, elección del menor denominador como mcm, errores al sumar los denominadores y elegirlo como denominador común asumiendo que correspondía al mcm.

El concepto de mcm también se necesita para fracciones algebraicas, un contenido que, en Chile, comienza a verse en primer año de secundaria (estudiantes

de 14 a 15 años) En cuanto a los contenidos previos a trabajar con este tipo de fracciones, Herrera (2010) determinó dificultades asociadas a la elección o cálculo del mínimo común múltiplo. La primera es que los estudiantes realizan la descomposición factorial de un número hasta encontrar un número primo, no llegan al uno como factor mínimo. La segunda es que consideran que dos términos son semejantes si tienen la misma variable y no le prestan atención al exponente de la variable.

Con estos antecedentes, se debe prestar aún más atención a cómo entienden los estudiantes este objeto matemático ya que, si se quedan sólo en la idea del cálculo mediante descomposición de factores primos, no verán la relación al calcular el mcm en fracciones algebraicas, lo cual dificulta su entendimiento. Se hace necesario comprender qué es el mcm más allá de una herramienta de cálculo. Lo mismo es confirmado por Juárez y López (2016), quienes identificaron que uno de los errores al sumar fracciones algebraicas tiene que ver con el relacionado con en el mcm, donde los alumnos intentan obtener el mcm de una forma errónea o en donde lo confunden con el máximo común divisor.

### 2.1. El mcm presente en un texto escolar

Normalmente las escuelas muestran por primera vez a los estudiantes el mcm a los 10 u 11 años y, en general, se trabaja antes de iniciar el tema de las fracciones. Posteriormente comenzarán a manipular las fracciones algebraicas, o bien, el mcm de manera algebraica alrededor de los 14 años de edad.

Ahora, lo expuesto en la problemática nace justamente al momento de enseñar el mcm como una herramienta técnica, dejando de lado lo conceptual. La manera habitual de enseñar mcm es a través de la tabla de descomposición de factores primos, estrategia que no está muy ligada a la definición del objeto matemático. Sin embargo, también hay una enseñanza conceptual al inicio, con una definición clara y otras estrategias que sí son coherentes con esta definición. Esto queda en evidencia, por ejemplo, en un texto escolar para alumnos de Chile de sexto año de primaria (figura 1 y 2).

**Ejemplo 1**

Calcula el mínimo común múltiplo entre 6, 8 y 16.

**¿Cómo lo hago?**

1 Escribe una lista con los múltiplos de cada número e identifica el primero que tengan en común.

$M(6) = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, \dots\}$

$M(8) = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, \dots\}$

$M(16) = \{16, 32, 48, 64, 80, 96, 112, 128, \dots\}$

2 Como el menor de los múltiplos comunes entre 6, 8 y 16 es 48, entonces  $mcm(6, 8, 16) = 48$ .

Figura 1. Cálculo del Mínimo Común Múltiplo (Maldonado y Castro, 2020).

**Ejemplo 2**

Calcula el mínimo común múltiplo entre 6, 8 y 16 usando otra estrategia.

**¿Cómo lo hago?**

1 Escribe los números en una tabla, elige un divisor común y realiza las divisiones correspondientes. Considera que los divisores deben ser números primos.

6	8	16	: 2
3	4	8	

2 Continúa dividiendo cada número por sus divisores hasta que el resultado sea 1.

6	8	16	: 2
3	4	8	: 2
3	2	4	: 2
3	1	2	: 2
3	1	1	: 3
1	1	1	

Como el 3 no es divisible por 2, se vuelve a anotar abajo.

3 Multiplica los divisores. El producto corresponderá al mcm.

$mcm(6, 8, 16) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 48$ .

Figura 2. Cálculo del Mínimo Común Múltiplo (Maldonado y Castro, 2020).

En este texto escolar, se presentan dos formas para calcular el mcm, ambas a través de ejemplos numéricos. La primera forma es haciendo una lista de los múltiplos de cada número y buscando los números en común, donde el menor de ellos será el mínimo común múltiplo.

La otra forma es por descomposición en factores primos, también mediante una tabla. Entonces, a los alumnos se le presentan ambas formas, pero en algún momento se pierde el concepto o definición, así como también el método que se basa en lo conceptual.

## 2.2. Mínimo común múltiplo en pruebas estandarizadas

Al analizar distintas pruebas estandarizadas<sup>1</sup> a nivel internacional hemos podido constatar la presencia del concepto de mcm en algunas de ellas, lo que hace notar su relevancia en el sistema escolar. En la tabla 1 se muestran algunos ejemplos.

Prueba	Ejemplo de pregunta	Observación
<b>TIMSS</b>  (han participado más de 50 países, entre ellos Chile y España)	Tomás comió $\frac{1}{2}$ de un pastel, y Juana comió $\frac{1}{4}$ del pastel. ¿Qué parte del pastel comieron entre los dos?  Fuente: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (sf).	Este ítem requiere aplicar suma de fracciones, pero se puede resolver sin la necesidad del mcm, ya que no es la única estrategia para trabajar las operaciones con fracciones. Cabe destacar que no se encontraron preguntas donde directamente se pregunte por el mcm, entiéndase, pedir calcular el mcm de ciertos números. En efecto, si revisamos los marcos de evaluación de TIMSS, no se presenta de manera explícita el mcm como contenido a evaluar, sino marcos más generales dentro de la aritmética y las operaciones básicas (Mullis & Martin, 2015).
<b>PISA</b>  (países de la OCDE, como Canadá, Chile, Finlandia o Francia)	El mínimo común múltiplo de dos números es $2^5 3^4 7^8$ y su máximo común divisor es $2^2 3^2 7^2$ . Uno de los números es 1764. ¿Cuál es el otro?  A) $2^2 3^2 7^2$ B) $2^2 3^4 7^8$ C) $2^4 3^4 7^4$ D) $2^3 3^2 7^6$ E) $2^5 3^4 7^8$  Fuente: Quispe (2012).	El estudiante que resuelva esta pregunta sí necesita saber el concepto de mcm y máximo común divisor más allá de su nombre. Es más, no necesita calcularlos. Simplemente entender el concepto y resolver la pregunta acorde a las definiciones.

<sup>1</sup> Popham (1999) define una prueba estandarizada como un examen que se administra y califica siguiendo un procedimiento estándar predeterminado. Predicen cuán bien es probable que los estudiantes se desempeñen en algún espacio o nivel educativo subsiguiente. Al evaluar la eficacia de una escuela se considera los puntajes obtenidos por los alumnos en pruebas estandarizadas de logros.

<p><b>SIMCE</b></p> <p><b>(Chile)</b></p>	<p>Tres equipos entrenan en el estadio. El equipo A lo ocupa cada 3 días. El equipo B lo ocupa cada 4 días. Y el equipo C, cada 6 días. El día en que coinciden los tres equipos realizan un mini campeonato. ¿Después de cuántos días realizan el primer mini campeonato entre los tres equipos?</p> <p>A. 12 días.                  B. 13 días.                  C. 24 días.                  D. 72 días.</p> <p>Fuente: Agencia de Calidad de la Educación (2019)</p>	<p>Este problema requiere del cálculo del mcm, es más, es necesario entender el concepto de este objeto matemático, y lograr ver que el mcm puede ser utilizado en contextos más allá de las fracciones. En efecto, la Agencia de la Calidad de la Educación (2019) confirma que en esta pregunta “se espera que los estudiantes sean capaces de determinar el mínimo común múltiplo en el contexto de la resolución de problemas rutinarios” (p. 59).</p>
---	--	--

**Tabla 1: Ejemplo de ítem de pruebas estandarizadas donde está presente el mcm**

Podemos ver que las pruebas estandarizadas estudiadas que contienen preguntas ligadas directamente al mcm se enfocan en su definición, o bien, es necesario el conocimiento de esta para desarrollar los problemas, aunque otras solamente requieren calcularlo. Es importante analizar cómo las pruebas estandarizadas abordan ciertos contenidos, ya que muchas veces estos pueden influir en cómo estos se enseñan en los colegios.

### 3. Experimento de enseñanza

Este estudio se enmarca en el paradigma cualitativo, con un enfoque de investigación de diseño (Plomp, 2010), enmarcado en un experimento de enseñanza, con aplicación de pre y post test. La figura 3 ilustra el esquema metodológico que guio el estudio.



**Figura 3. Esquema metodológico del estudio.**

El pre test consistió en seis ítems de cálculo de mcm entre dos o tres números, las que presentan distintas dificultades, siendo algunos conjuntos de números primos relativos, o bien, uno múltiplo del otro, teniendo divisores comunes, siendo números

más cercanos o más lejanos entre ellos o siendo números altos o números bajos. Algunos ítems del pre test se ilustran en la figura 4.

Calcula al mcm entre los números dados:
2, 4 y 6
12 y 36
60 y 72

Figura 4. Ejemplos de preguntas del pre test.

Además, el pre test cuenta con la pregunta final *¿Qué es el mínimo común múltiplo?* El post test consistió en seis ítems de mcm, similares a las del pre test y con el mismo nivel de dificultad.

Se realizó el experimento de enseñanza a dos grupos de alumnos chilenos, el primero, que será designado como Grupo A, del año 2016 (34 alumnos) y el segundo, designado como grupo B, del año 2018 (33 alumnos). La clase fue implementada, en el caso del Grupo A por la profesora de matemáticas de ese curso y colegio. En cambio, en el grupo B fue implementada por un profesor externo al colegio.

Los sujetos informantes son de primer año de enseñanza secundaria (14 a 15 años aproximadamente), es decir, han pasado 3 años (desde sexto de primaria) en los que no se ha trabajado mcm explícitamente, según currículum escolar chileno.

El experimento consistió en una clase centrada en lo conceptual, donde se trabajó con la “tabla de múltiplos” (figura 5), estrategia de cálculo del mcm que pretende ayudar a los alumnos a visualizar qué significa este concepto.

Múltiplos de 12	12	24	36	48	60	72	...
Múltiplos de 15	15	30	45	60	75	90	...

Figura 5. Tabla de múltiplos de 12 y 15, donde se destaca en amarillo el mcm entre ambos.

En esta tabla se escriben los múltiplos de cada uno de los números entre los cuales se desea encontrar el mcm (en el ejemplo, 12 y 15) y luego se ubica el menor de ellos que todos los enteros en cuestión tengan en común. De esta forma los alumnos visualizarán qué es realmente el mcm, observando que es el menor (mínimo) múltiplo en común que tienen los enteros con los que se está trabajando.

En la clase, se promueve usar la tabla de múltiplos en distintos ejercicios, como el que se ilustra en la figura 6.

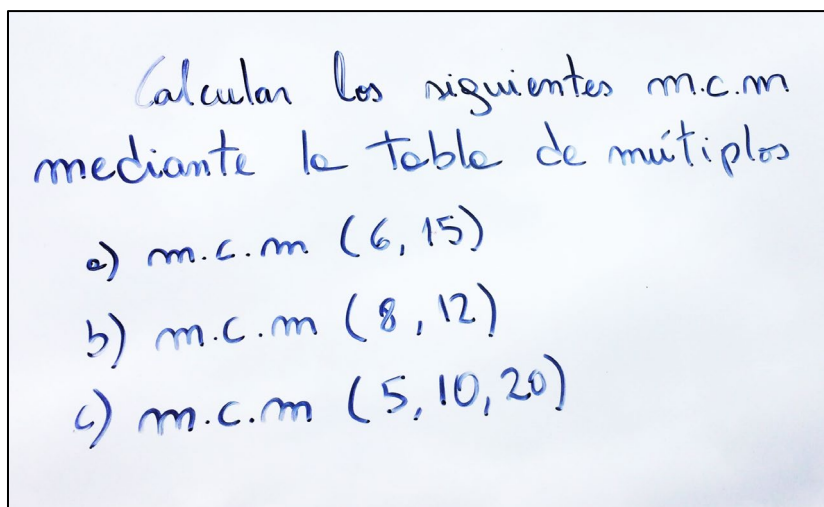


Figura 6. Ejercicios que fueron presentados a los estudiantes en la pizarra durante el experimento.

## 4. Resultados

El análisis se realiza para cada grupo de alumnos, tanto para el pre test como para el post test.

### 4.1. Grupo A

#### 4.1.1. Pre Test

De los 34 estudiantes que respondieron el test, 26 utilizaron la descomposición de factores primos para calcular el mcm, como se muestra en la figura 7. Parece ser que la tabla presente en los textos escolares, como el Maldonado y Castro (2020) tiene fuerte presencia en la enseñanza y aprendizaje de este concepto.

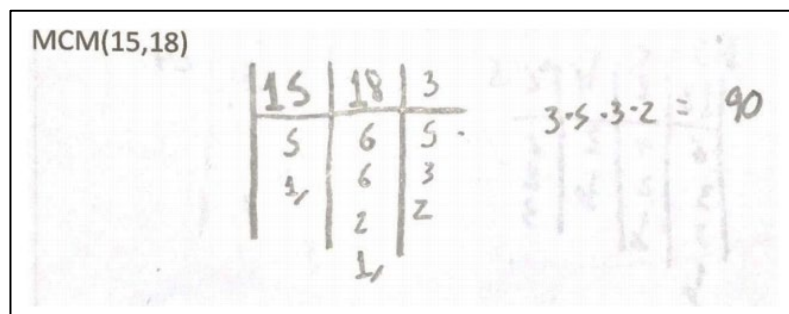


Figura 7. Respuesta de alumno para el cálculo de mcm por descomposición de factores primos.

Aquellos que utilizaron otra estrategia, llegaron a resultados incorrectos. Algunos buscaron el máximo común divisor, otros multiplicaron los términos entre los



que se debía calcular el mcm, buscaron el primo más pequeño en común, entre otros, como el que se ilustra en la figura 8, donde parece ser que el alumno tiene en mente el uso de los factores primos.

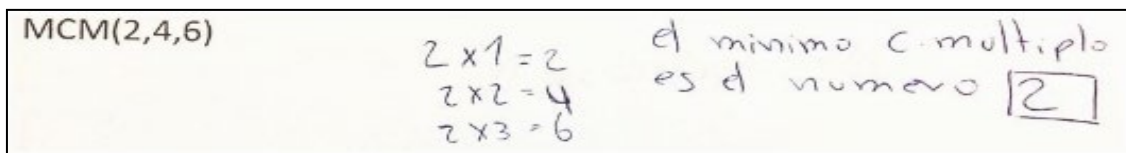


Figura 8. Respuesta de alumno con error de cálculo del mcm.

Además, al entregar los alumnos la definición de mcm, sólo 5 de los 34 dieron una definición correcta, 19 dieron una incorrecta y el resto dejó la pregunta en blanco. Parece ser que tuvieron presente definir otros conceptos matemáticos, como divisor, múltiplo o divisible, por ejemplo (figura 9).

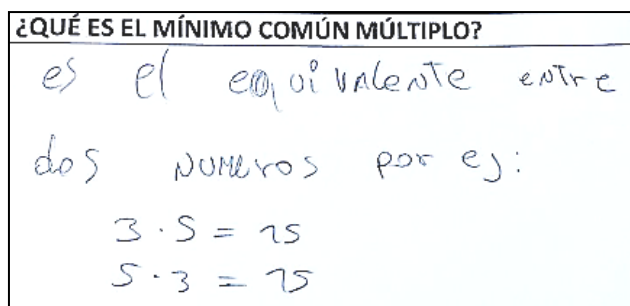


Figura 9. Ejemplo de respuesta para la definición de mcm.

Podemos evidenciar entonces que, aunque a los estudiantes, hace algunos años, se les presentaron por lo menos dos estrategias para calcular el mcm, ellos prefieren utilizar la descomposición en factores primos, mas parece ser que no logran comprender el objeto matemático con el que trabajan.

Luego de observar los resultados entregados en el pre test, es posible confirmar que todas las evidencias de errores concuerdan con lo descrito por Egodawatte (2011), vale decir, los errores de cálculo, la no comprensión del concepto y la mecanización de un proceso que no es entendido.

#### 4.1.2. Post Test

Los 34 alumnos utilizaron la “tabla de múltiplos”, y en promedio, en cada ítem respondido, 4 alumnos erraron en algunas de sus respuestas. El error frecuente fue escoger un múltiplo en común, pero no el menor de ellos (figura 10). Cabe destacar que a los alumnos se les dijo que podían utilizar cualquier método o estrategia para calcular el mcm en el post test.

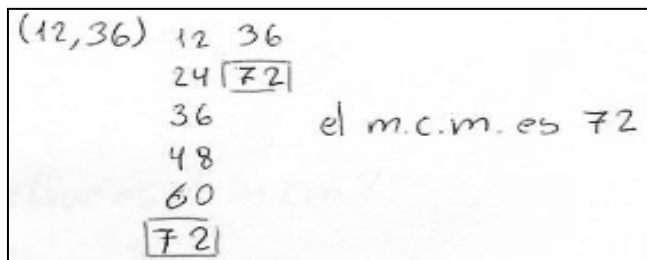


Figura 10. Error al escoger un múltiplo común, pero no el menor.

Podemos observar que, si bien enumeró correctamente los primeros múltiplos de cada número, no se consideró que un múltiplo también es múltiplo de sí mismo, por lo tanto, aún se evidencia un error de concepto, específicamente en el de múltiplo, pero de todas formas parece ser que el objeto en sí que se está trabajando ha sido comprendido.

De los 34 estudiantes que debieron definir el mcm de forma individual, 29 lo hicieron de forma correcta y 5 de forma incorrecta. La figura 11 ilustra algunas definiciones entregadas por los alumnos.

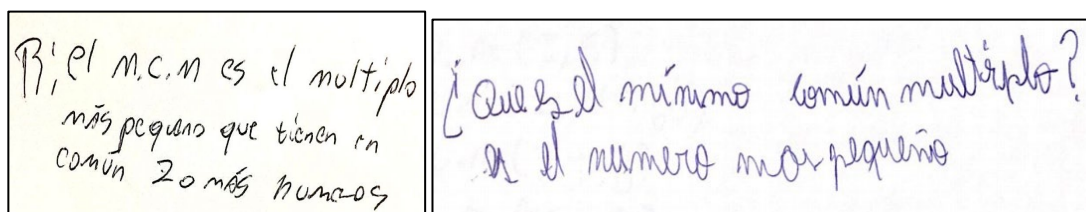


Figura 11: Una de las respuestas correctas (izquierda) e incorrectas (derecha) para definir mcm.

Si bien se tiene presente que para definir el mcm se debe tener en cuenta el papel del cero (ver definición 1, página 2), hemos considerado respuestas correctas a aquellas que no hacen alusión al cero en su definición, pues nos interesa que tengan claridad en el hecho de que el mcm es el menor entero positivo que es múltiplo de dos o más números, idea que no era entendida inicialmente por los estudiantes al trabajar con un procedimiento que se enfoca en lo procedimental más allá de lo conceptual.

Realizando una comparación entre el pre y pos test tenemos la tabla 2.

	Definición correcta	Definición Incorrecta	Respuesta en blanco
Pre Test	5	19	10
Post Test	29	5	0

Tabla 2. Comparación de resultados de pre y post test del grupo A.

Es clara la mejora en los resultados de los estudiantes, donde parece ser que la enseñanza basada en la tabla de múltiplos (que apunta a lo conceptual del mcm) favoreció el desempeño de los estudiantes en el pos test. Además cabe considerar que los errores de cálculo fueron mucho menores, o que también nos indica que el método de la tabla de números no sólo favorece la comprensión del objeto matemático utilizado, sino también facilita el usarlo como herramienta de cálculo.

## 4.2. Grupo B

### 4.2.1. Pre Test

De los 33 estudiantes que respondieron el test, 22 utilizaron la descomposición de factores primos para calcular el mcm (figura 12).

• mcm(12,6)

$$\begin{array}{r|l} 12-6 & 2 \\ \hline 6-3 & 3 \\ 2-1 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad 2 \cdot 3 = 6 \cdot 2 = 12$$

Figura 12. Cálculo de mcm mediante descomposición de factores primos.

Entre los que no usaron la descomposición de factores primos, hubo algunos que entregaron completamente en blanco y 2 alumnos trataron de usar la descomposición de factores primos fallidamente (figura 13).

Left example:

$$\begin{array}{r|l} 12-6 & 3 \\ \hline 6 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 3 \cdot 3 = 9$$

Right example:

$$\begin{array}{r|l} 12-6 & 6 \\ \hline 6 & 6 \\ 3 & 6 \\ 1 & \end{array} \quad 6 \cdot 6 = 36$$

Figura 13. Ejemplos de cálculo de mcm. mediante descomposición de factores primos con errores.

Nuevamente queda en evidencia lo sucedido en el grupo A, donde los estudiantes optan en su mayoría por la descomposición de factores primos por sobre otra estrategia de cálculo de mcm.

Al entregar la definición de mcm sólo 4 de los 33 alumnos escribieron una definición correcta (figura 14), 9 de los 33 la presentan de manera incorrecta y el resto dejó el ítem en blanco, a pesar de que varios de esos alumnos sí fueron capaces de realizar los ejercicios de cálculo. Con esto último se reafirma la idea central de este estudio, donde se demuestra que el uso de la descomposición de factores primos como método de cálculo del mcm de aleja de la definición en sí de este objeto matemático.

**¿QUÉ ES EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO?**

Es el menor múltiplo que tienen en común 2 o más n<sup>o</sup>

Figura 14. Definición de mcm considerada correcta.

Nuevamente se puede evidenciar que, aunque no se considera la relevancia de los términos no nulos la respuesta es considerada correcta al destacar la idea central del concepto. Luego, en la figura 15 se muestran algunas definiciones incorrectas entregadas por los niños. En ellas podemos observar definiciones que están ligadas, en la primera, al procedimiento del cálculo de mcm y, en la segunda, a la utilidad del mcm en los problemas matemáticos que ellos desarrollan, siendo el más usual las fracciones.

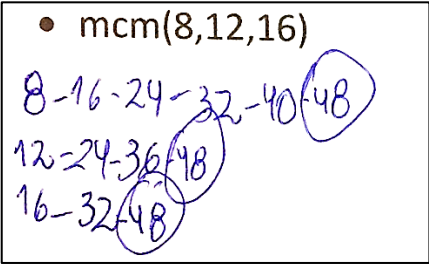
B// Es para sacar el múltiplo de X números.  
B// es la multiplicación de los resultados de cada número que se contrasta por medio de números primos.

El mínimo común múltiplo funciona para igual el denominador en las fracciones  
Por ejemplo en sumas y en restas.

Figura 15. Definiciones de mcm consideradas incorrectas.

## 4.2.2. Post Test

De los 33 alumnos, 21 utilizaron la descomposición prima, 8 utilizaron la tabla de múltiplos y 4 dejaron el test en blanco. En general, la cantidad de respuestas correctas fue 4 de los 6 ítems (o una razón superior). La figura 16 muestra una respuesta donde emplea correctamente la tabla de múltiplos para el cálculo del mcm.



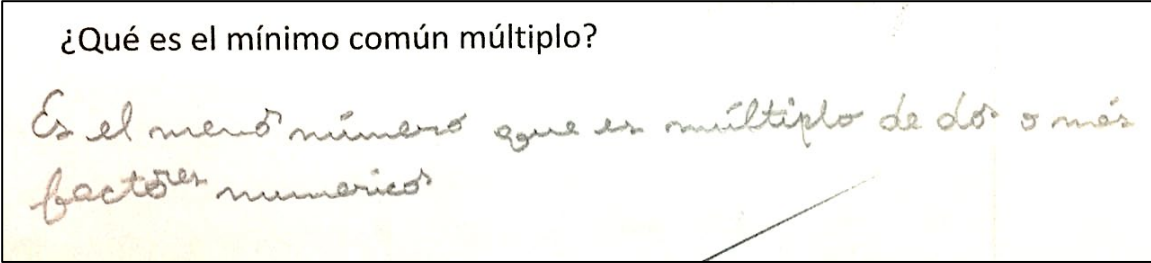
•  $mcm(8,12,16)$

8	-16	-24	-32	-40	-48
12	-24	-36	-48		
16	-32	-48			

The number 48 is circled in the original image, indicating it is the correct LCM.

Figura 16. Utilización de la tabla de múltiplos.

De los 33 alumnos, 11 de ellos definieron el mcm de forma correcta (figura 17), 6 de forma incorrecta y 16 dejaron la respuesta en blanco. Con esto encontramos resultados un poco diferentes a los del grupo A, ya que el grupo B continuó utilizando la descomposición de factores primos como método de cálculo del mcm. Sin embargo, la cantidad de estudiantes que dio una definición correcta para el mcm aumentó con respecto al pre test, aunque aún hubo estudiantes que inicialmente no tenían claro el concepto.



¿Qué es el mínimo común múltiplo?

Es el menor número que es múltiplo de dos o más factores numéricos

Figura 17. Definición de mcm considerada correcta.

Se presentan definiciones centradas en el cálculo, como la que se ilustra en la figura 18, donde se evidencia una explicación procedimental en torno a la tabla de múltiplos como definición del mcm. Por lo tanto, así como pasaba con la descomposición de factores primos, se sigue viendo el mcm como una herramienta de cálculo, por lo cual se asocia su definición a un procedimiento y no a una definición per se de un objeto matemático.

¿Qué es el mínimo común múltiplo?

Cuando nos piden buscar el mínimo común múltiplo entre 2 o más números (Ej: 6 - 12), debemos empezar buscando por los menores los 12 primeros múltiplos de cada número (Ej: 6=6-12-18-24-30-36-42-48-... , 12=12-24-36-48-60-72-84-96-...). luego de eso resaltan los múltiplos en común (12=24=36=48) y de todos esos múltiplos buscamos el menor (12) y listo, ese es el mínimo común múltiplo entre 6 y 12. Y se usa el mismo procedimiento con cualquier otro número.

Figura 18. Respuesta de un alumno que describe el procedimiento detrás del cálculo del mcm.

Realizando una comparación entre el pre y pos test tenemos la tabla 3.

	Definición correcta	Definición Incorrecta	Respuesta en blanco
Pre Test	4	9	20
Post Test	11	6	16

Tabla 3. Comparación de resultados de pre y post test.

Nuevamente se evidencia una mejora en los resultados de los alumnos, donde parece ser que la enseñanza basada en la tabla de múltiplos favoreció el desempeño de los estudiantes en el post test, aunque aún se ven déficits respecto al concepto en sí. Los estudiantes continuaron usando la descomposición de factores primos como estrategia de cálculo, pero, esta vez algunos lograron dar una definición más adecuada del mcm. Es claro que, aunque se les presenta una nueva estrategia de cálculo, los años en que repetitivamente estuvieron calculando de forma mecánica el mcm mediante una de las sugerencias presentes en textos escolares fueron más fuertes.

Dicho esto, al comparar los resultados del Grupo A y el Grupo B, este último presentó menores mejorías, lo cual pudo verse influenciado por quien tomó el rol de enseñante en el momento de la implementación, ya que la profesora que implementó la clase en el grupo B, a diferencia de la docente del grupo A, no conocía previamente a los estudiantes y, por lo tanto, tampoco conocía su ritmo y método de trabajo.

## 5. Conclusiones

El objetivo principal de la actividad era proponer una actividad que permitiera eliminar la mecanización que producía en los estudiantes el cálculo del mínimo común múltiplo a través de descomposición en factores primos.

Resaltar una estrategia conceptual por sobre una meramente procedimental favoreció, en general, la comprensión del mcm. Esto podría explicarse bajo las afirmaciones de Douady (1995), quien señala que:

Saber matemáticas implica dos aspectos. Por un lado, se refiere a la disponibilidad funcional de algunas nociones y teoremas matemáticos para resolver problemas e interpretar nuevas situaciones. En un funcionamiento científico como éste, las nociones y teoremas matemáticos involucrados tienen un status de herramientas, [...] Saber matemáticas también significa identificar las nociones y los teoremas como elementos de un corpus reconocido social y científicamente. Al mismo tiempo es formular definiciones, enunciar los teoremas de ese corpus y demostrarlos. Por esto, las nociones y los teoremas matemáticos en cuestión tienen un status de objeto (p. 63).

Sostenemos que no basta con conocer y memorizar una estrategia de cálculo, sino que es necesario ver más allá, de dónde nacen estas estrategias, por qué se generan ciertas fórmulas y qué representan los procedimientos que realizamos junto con el significado de los elementos que utilizamos. Esto ayudará a salir del procedimiento meramente mecánico, dándole un significado a las acciones realizadas, un porqué.

En este contexto, nos propusimos llevar a cabo un experimento de enseñanza, donde se puede observar que se logró avanzar hacia una conceptualización del objeto mcm en los alumnos intervenidos, ya que estos fueron capaces de encontrar una definición por sí solos a partir del método de la “tabla de múltiplos.

A través de esta investigación, apoyándonos en un pre test y con base en otras investigaciones, se pudo evidenciar que existe un problema en torno al mcm que se relaciona con la mecanización del proceso de cálculo, lo que produce una ausencia de definición en el objeto matemático, que a su vez provoca errores al calcular o escoger el mcm correcto. Esta situación quedó en evidencia en la problemática a partir de otras investigaciones realizadas, como las de González-Calero, Martínez y Sotos (2016) y Egodawatte (2011) y en el pre test donde quedó de manifiesto que los estudiantes no entregan, en su mayoría, una definición correcta de mcm confundiéndolo con otros conceptos matemáticos, como divisor, múltiplo o divisible, por ejemplo.

Frente a esto, surge la necesidad de desarrollar procesos de enseñanza que faciliten al estudiante enfrentarse a problemas del mcm y, a su vez, entender el porqué del proceso y tener una definición clara del objeto matemático con el que está trabajando, siguiendo lo que propone Calvo (2008) quien afirma que “en matemática se debe aplicar una metodología que ayude al estudiante a hallar la solución correcta de una manera comprensiva” (p.125). Para ello se implementó un experimento de aprendizaje que ayudara a comprender este concepto que era utilizado sólo como una herramienta de cálculo y llevarlo a completarse como un objeto matemático con una definición propia, la cual los mismos estudiantes pudiesen interpretar a través del proceso de cálculo que ellos desarrollaban.

De la implementación de la propuesta de enseñanza y su posterior análisis, se puede concluir que la mayoría de los estudiantes fueron capaces de responder correctamente qué es el mcm y que esta propuesta genera resultados positivos para el aprendizaje. Por lo tanto, no basta con saber calcular, cuestión que los estudiantes de ambos grupos en su mayoría sí sabían hacer, pero no eran capaces de ampliarlo a un contexto o entregar una definición. Aquí nace una nueva modificación en la proyección de esta investigación, donde se debe ampliar el pre test para poder evaluar y contrastar todos los aspectos posibles y, a la vez, poder ampliar los resultados obtenidos.

Hay que destacar que esta propuesta es complementaria a la manera de enseñar basada en la descomposición de factores primos, ya que al tener números muy grandes o en un conjunto con una cantidad de números mayor a tres, el procedimiento se vuelve extenso, pudiendo generar que los estudiantes cometan incluso más errores que los que se realizaban previo a la propuesta. Es en este caso, donde los factores primos cobran relevancia, pero después de un proceso de interiorización conceptual del mcm. En este sentido esperamos avanzar hacia la búsqueda de estrategias que permitan apoyar al profesor a enfrentar la enseñanza del mcm sin quedarse en la mecanización.

En la experimentación del 2016, la mayoría de los estudiantes fueron capaces de responder correctamente qué es el mcm empleando la naturaleza matemática del concepto asociado. En el experimento de enseñanza realizado el 2018 (donde el docente fue externo al curso) la cantidad de estudiantes fue menor, aunque grupalmente sí pudieron llegar a una definición correcta. Esto nos puede llevar a una última proyección en donde se puede realizar un análisis en torno a cómo un docente externo podría afectar el clima de aula, ya que es importante reconocer los aspectos referentes al papel del docente y del alumno en la actividad y estudiar la influencia de ambos actores (Calvo, 2008) y con base en ello reformular el experimento de tal forma que siempre sea el propio docente quien pueda realizarlo para enfocarse únicamente en los resultados en torno a la estructura didáctica del experimento de enseñanza.

## Bibliografía

- Agencia de Calidad de la Educación (2019). Ejemplos de Preguntas Educación Básica 2018. Recuperado el 19 de febrero 2020 de [http://archivos.agenciaeducacion.cl/EJEMPLOS\\_DE\\_PREGUNTAS\\_BASICAS\\_2018.pdf](http://archivos.agenciaeducacion.cl/EJEMPLOS_DE_PREGUNTAS_BASICAS_2018.pdf)
- Calvo, M. (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. *Revista Educación*, 32(1), 123.
- Douady, R. (1995). La Ingeniería Didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 61-96). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Egodawatte, G (2011). *Secondary School Student's' misconceptions in Algebra* (Tesis doctoral). Universidad de Toronto, Canadá.
- González-Calero, J. A., Martínez, S. y Sotos, M. A. (2016). La tendencia a restar en la resolución de problemas de m.c.d. en alumnos de primaria. En J. A. Macías, A.



- Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 295-304). Málaga: SEIEM.
- Herrera, M. L. (2010). Obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de los números irracionales. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 247-255). México, DF: CLAME.
- Juárez, E. C., & López, J. A. J. (2016). Análisis y clasificación de errores en la adición de fracciones algebraicas con estudiantes que ingresan a la universidad. *Números*, 91, 33-56.
- Lewin, R. (2011). *Introducción al Álgebra*. JC Sáez Editor.
- Maldonado, L. y Castro, C. (2020). Texto del estudiante. Matemática. 6° Básico. Ministerio de Educación. Editorial Santillana.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España (s.f.). *Preguntas liberadas de matemáticas*. EducaLab. Recuperado el 20 de Agosto de 2018, de <http://evaluacion.educalab.es/timsspirls/matematicas>.
- Mullis, Ina V.S y Martin, M.O (2015). TIMSS 2015. Marcos de la evaluación. Ministerio de educación, cultura y deporte. Gobierno de España. TIMMS & PIRLS Centro de Estudios Internacionales, Lynch School of Education, Boston College y Agencia Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA). Secretaría General Técnica, Subdirección General de Documentación y Publicaciones.
- Muñoz, G., Santis, M.A., & Valle, J. (2015). *Texto del Estudiante. Matemática. Primero Medio*. Editorial SM.
- Plomp, T. (2010) Educational design research: An introduction. En T. Plomp, & N. Nieveen (Eds.), *On Introduction to Educational Design Research* (pp. 9-35). Enschede, Países Bajos: SLO.
- Popham, W.J. (1999). *¿Por qué las pruebas estandarizadas no miden la calidad educativa? Grupo de Trabajo sobre Estándares y Evaluación*. PREAL y Grupo de Análisis para el Desarrollo, p.2. Perú.
- Quispe, R. (2012). *Hacia la Evaluación Censal 2014*. Alfabetización Matemática. Dirección Regional de Educación Puno. Programa Presupuestal Logros de Aprendizaje PELA-ETR. 41. Recuperado el 27 de Agosto de 2018 de <https://es.slideshare.net/rodosq/pruebas-tipo-pisa-matematica-resueltas>

#### **Autores**

**Martínez Espíndola, Claudia Graciela:** Profesora de Matemáticas y Licenciada en Educación, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Estudiante de Master 2 en Sciences de l'Éducation. Université Rennes 2, France. Línea de investigación: Ciencias de la educación enfocada en la matemática de estudiantes de secundaria. Mail: [claugraciela94@gmail.com](mailto:claugraciela94@gmail.com)

**Ramos-Rodríguez, Elisabeth :** Doctora en Ciencias de la Educación. Profesora jerarquizada en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Líneas de investigación: Formación de profesores y Modelación matemática. Ha publicado libros, capítulos de libros y artículos en revistas de impacto, donde destacamos sus publicaciones en las revistas *Bolema* y *Reflective Practice*. Mail: [elisabeth.ramos@pucv.cl](mailto:elisabeth.ramos@pucv.cl)