UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, páginas 13-18
ISSN: 1815-0640

Euler y las particiones

Tomás Sánchez Giralda

Resumen

El principal objetivo del artículo es el análisis y estudio de problemas que fueron tratados por Euler, verdadero gigante de las Matemáticas. Sobre sus anchas espaldas han tenido el privilegio de trabajar científicos de varias disciplinas, y pensamos que futuras generaciones seguirán sus huellas.

Abstract

The main aim of this paper is the analysis and study of some problems treated by Euler, a true giant of Mathematics. On his broad shoulders scientists of several disciplines have had the privilege of working on, and we hope that later generations will follow his footsteps.

La utilidad de las Matemáticas, comúnmente reconocida en sus partes elementales, no sólo no se detiene en las Matemáticas Superiores, sino que es de hecho mucho mayor cuanto más se avanza en el desarrollo de la Ciencia.

L. Euler

Introducción

L. Euler está considerado como uno de los más importantes genios científicos del siglo XVIII. Sus diferentes trabajos —artículos, libros, monografías, cuadernos, cartas, etc.— han tardado casi tres siglos en ser publicados tanto por el número como por su profundidad y volumen. La calidad y cantidad de su Opera Omnia —más de 80 volúmenes, 29 de Matemáticas, y casi 900 publicaciones— permite afirmar que nos encontramos ante un modelo de matemático, físico, ingeniero, astrónomo, músico y filósofo de la actualidad. Este carácter multidisciplinar hace que Euler esté íntimamente ligado al actual desarrollo de un gran número de disciplinas científicas, razón por la que resulta harto difícil, por no decir imposible, entender buena parte de sus trabajos como parte de un único de los apartados, o áreas de conocimiento, en los que, en la actualidad, han quedado divididas las diferentes ramas del saber.

Por otra parte, la necesidad de limitar la extensión de este trabajo nos obliga a incidir en aspectos concretos del Álgebra, tal y como son entendidos hoy en día y en los que algunos trabajos de Euler —*Partitio numerorum*— han tenido antecedentes importantes para su desarrollo. Como parece adecuado, también, que los problemas a incluir deban tener actualidad y perspectivas de futuro, hemos hecho una elección entre las muchas posibles. Nos hemos decidido por tratar algunos aspectos de la Combinatoria que llevaron a Euler a resultados no sólo no agotados en su propio contexto, la combinatoria algebraica, sino que han sido soporte para importantes avances en Álgebra y, en concreto, en la Teoría de Caracteres y Representaciones, con importantes aplicaciones con otras disciplinas como son la Física y la Química. El lector interesado podrá encontrar en las referencias de la bibliografía otros temas y aportaciones de Euler que fueron de importancia para la aparición de nuevas etapas de modernización y crecimiento del Álgebra.

Euler y las particiones

Sea n un entero positivo. Una partición es toda forma de escribir al entero n como la suma de enteros positivos, donde se entiende que si dos descomposiciones sólo difieren en el orden de sus términos las consideramos como la misma partición. Así mismo, denotaremos por $p(n)$ el número de particiones del número n. Si es $n=1$ se tiene $p(1)=1$. Si $n=2$ las particiones posibles son 2 y $1+1$, y se tiene $p(2)=2$. Si tomamos $n=3$ será $p(3)=3$, pues las particiones posibles del número 3 son 3; $2+1$ y $1+1+1$. Podríamos iterar los cálculos y concluir que se tiene $p(4)=5$; $p(5)=7$; $p(6)=11\ldots$ El estudio y análisis de la función partición $p(n)$[1] ha sido uno de los temas tratados en la evolución de las Matemáticas y, de hecho, es conocido que desde el punto de vista computacional $p(n)$ puede ser computado en un tiempo proporcional a $n^{3/2}$.

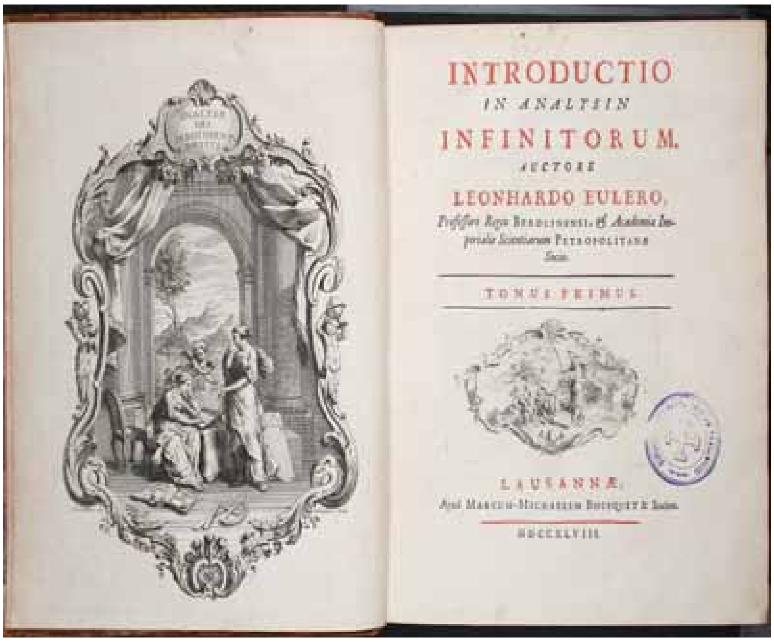


Figura 1: Biblioteca Histórica del Palacio de Santa Cruz (Signatura 5393). Universidad de Valladolid.

En esta línea, la identidad de Euler toma la forma dada por la igualdad:

$$p(n/\,partes\,impares) = p(n/\,partes\,diferentes)\,, \qquad (*)$$

[1] El estudio de esta función no es un problema fácil. Su comportamiento es, en esencia, como $e^{\sqrt{n}}$, resultado importante y profundo que se debe a los matemáticos Hardy y Ramanujam en 1917, y que fue completado por Rademacher años más tarde.

según la cual el número de particiones con las condiciones indicadas son iguales. En este sentido, la parte de mayor interés en la teoría de particiones corresponde a la obtención de identidades del tipo general

$$p(n\,/\,condición\ \ tipo\ 1) = p(n\,/\,condición\ tipo\ 2)\,,$$

en la que el primer miembro de la igualdad denota las particiones de n sujetas a una determinada condición que llamamos de tipo 1 y el segundo miembro serían las particiones de tipo 2. Tales identidades se conocen como "identidades tipo Euler".

Con un procedimiento que generaliza el utilizado por Euler, G. E. Andrews, siguiendo ideas de I. Schur, probó en 1969 el siguiente resultado:

$$p(n\,/\ partes \subseteq N) = p(n\,/\ partes\, diferentes \subseteq M);$$

donde N es cualquier conjunto de números enteros con la propiedad de que ninguno de sus elementos es una potencia de dos veces un elemento de N, y M es el conjunto conteniendo todos los elementos de N junto con todos sus múltiplos de potencias de dos. Así, si se toma $N = \{1,3,5,....\}$ se recupera la identidad de Euler por ser entonces M el conjunto de los enteros positivos.

¿Cómo probó Euler el resultado $(*)$ en el año 1748? Podríamos pensar que al tratarse de un problema de Combinatoria la prueba consistiría en establecer de manera inteligente una biyección que transformara toda partición en partes impares del número n en una colección de partes distintas con la misma suma, y por tanto en una nueva partición de tal número. Tal cosa se puede hacer; sin embargo el procedimiento que siguió Euler fue el de introducir el concepto de función generatriz asociada a un conjunto de enteros S, lo que constituye una de sus grandes aportaciones a la Ciencia y resulta una técnica de completa actualidad.

En concreto, si es $S = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ una sucesión de enteros positivos la función generatriz asociada por Euler a S queda definida por la serie formal $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. En el caso de que la sucesión sea finita queda claro que la función generatriz o generadora asociada es un polinomio con coeficientes enteros. En el caso particular de considerar la función partición $p(n)$, la función generatriz asociada a $S = \{p(0), p(1), p(2), \ldots, p(n), \ldots\}$ está dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + ...$$

En esta línea, Euler indica: *«…Si el producto* $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots$ *se desarrolla, se tiene la serie* $1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + \cdots \quad + \cdots$ *en la que los coeficientes indican los **números de formas diferentes** en que el exponente puede expresarse como la suma de números distintos»*. Así, Euler prueba que las funciones generatrices relativas a las sucesiones de enteros positivos dados por las funciones partición $p(n / \text{partes impares})$ y $p(n / \text{partes diferentes})$ están dadas, respectivamente, por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n / \text{partes diferentes}) x^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n)\,,$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n / \text{partes impares}) x^n = \prod_{n=impar} \frac{1}{(1 - x^n)}\,.$$

Como se tiene $(1 + x^n) = \dfrac{(1 - x^{2n})}{(1 - x^n)}$, Euler obtiene la igualdad de las expresiones como producto que aparecen en las igualdades anteriores y esto le permite concluir que para todo entero positivo n se tiene la igualdad o identidad que lleva su nombre y que dice: «*El número de formas diferentes en que un número dado puede expresarse como la suma de números naturales distintos es el mismo que el número de formas en que el citado número puede expresarse como la suma de números impares, ya sean iguales o diferentes*»

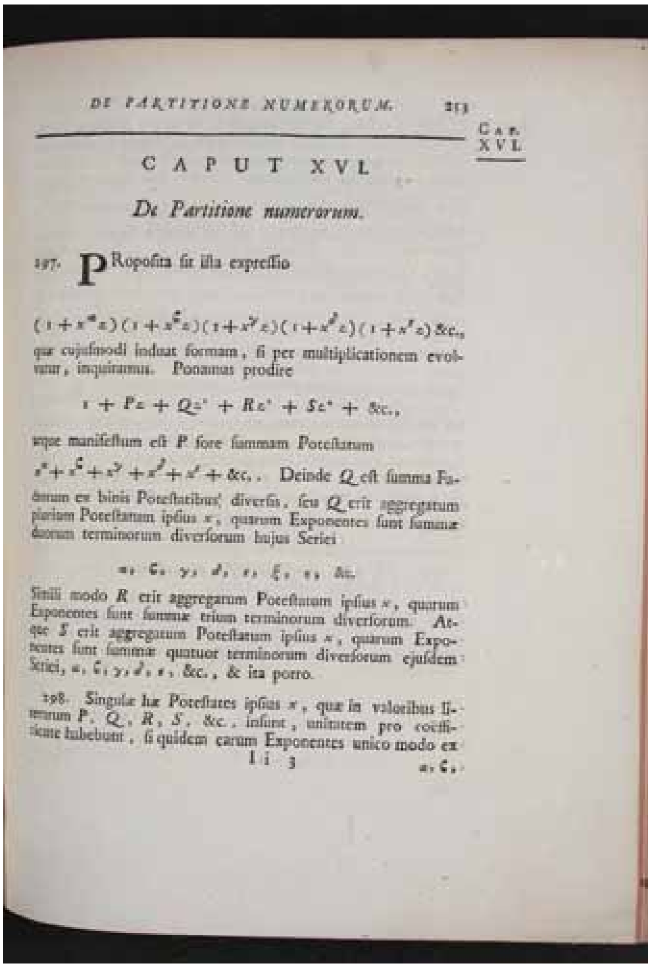
Las aportaciones de Euler en esta área de trabajo fueron abundantes. Además de la antes citada y probada identidad que lleva su nombre, él continuó la discusión de este tipo de problemas en un buen número de trabajos que se pueden encontrar en el Libro I de su "*Introductio in Analysin Infinitorum*" (Figuras 1 y 2), publicación que tuvo varias ediciones en su época. Así, por ejemplo, Euler hace una comparación entre las particiones de un entero n en un número impar de partes diferentes y entre las particiones, del mismo número, en un número par de partes diferentes, demostrando que ambos conjuntos tienen igual número de elementos excepto para un caso muy particular, cuando es $n = i/2 \cdot (3i - 1)$, en cuyo caso la diferencia entre ambos conjuntos es ± 1. Este resultado de Euler es una nueva identidad particional y se conoce como el teorema de los números pentagonales[2] de Euler.

La identidad de Euler $(*)$ considera particiones de "partes diferentes". Es decir, de partes que difieren al menos en 1, de donde la naturalidad del estudio de análogo problema para casos donde tal diferencia sea al menos de 2. El siguiente resultado debido a Rogers y Ramanujam trata tal caso y afirma: «*El número de particiones del entero n en partes que difieren en al menos 2 es igual al número de particiones de n en partes que son congruentes a 1 ó 4 módulo 5*». Tal resultado fue probado a comienzos del siglo pasado y generó un buen número de trabajos en esta dirección.

J. J. Silvester dio, en 1884, un refinamiento de los resultados de Euler considerando el número de particiones de un número n usando k partes impares,

[2] El nombre de números pentagonales corresponde a los números 1, 5, 12, 22…, que son el número de puntos que configuran pentágonos de tamaño creciente.

cada una de las cuales puede repetirse, de manera que cuando es k suficientemente grande se recupera el caso tratado por Euler. Con posterioridad es N. Fine quien establece un nuevo refinamiento del teorema de Euler. Para ello utiliza el concepto de rango de una partición, que es debido a F. Dyson (1944), y que se define como la diferencia entre la parte mayor y el número de partes de la partición. El resultado de Fine afirma que el número de particiones del entero n en partes distintas de rango $2r$ o $2r+1$ es igual al número de particiones de n en partes impares con parte mayor $2r+1$. Más recientemente, M. Bousquet-Mélou y K. Eriksson (1997-1999) han obtenido nuevos resultados en el cálculo de particiones particulares de un entero n que tienen como caso límite la identidad obtenida por Euler en la primera mitad del siglo XVIII. Aquellos lectores interesados en ampliar información sobre este tema pueden consultar las publicaciones de H. L. Alder y de S. Ahlgren y K. Ono que se citan en la Bibliografía.


DE PARTITIONE NUMERORUM. 253

CAP. XVI.

CAPUT XVI.

De Partitione numerorum.

197. PRoposita sit ista expressio

$$(1+x^{\alpha}z)(1+x^{\beta}z)(1+x^{\gamma}z)(1+x^{\delta}z)(1+x^{\varepsilon}z)\,\&c.,$$

quae cujusmodi induat formam, si per multiplicationem evolvatur, inquiramus. Ponamus prodire

$$1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \&c.,$$

atque manifestum est P fore summam Potestatum $x^{\alpha} + x^{\beta} + x^{\gamma} + x^{\delta} + x^{\varepsilon} + \&c.$. Deinde Q est summa Factorum ex binis Potestatibus diversis, seu Q erit aggregatum plurium Potestatum ipsius x, quarum Exponentes sunt summae duorum terminorum diversorum hujus Seriei

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \eta,\ \&c.$$

Simili modo R erit aggregatum Potestatum ipsius x, quarum Exponentes sunt summae trium terminorum diversorum. Atque S erit aggregatum Potestatum ipsius x, quarum Exponentes sunt summae quatuor terminorum diversorum ejusdem Seriei, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, &c., & ita porro.

198. Singulae hae Potestates ipsius x, quae in valoribus literarum P, Q, R, S, &c., insunt, unitatem pro coefficiente habebunt, si quidem earum Exponentes unico modo ex

Ii 3 $\alpha, \beta,$

Las repercusiones de los resultados de Euler tanto en Álgebra como en otras partes de las Matemáticas han sido muy numerosas. En la teoría de caracteres y representaciones se hace importante uso de la teoría de particiones y de los conceptos y resultados de Euler.

Para finalizar, y volviendo al principio del trabajo, parece indicado resaltar la importancia que ha tenido y tendrá la Teoría de Particiones. Citaremos aquí, por su interés, solo unas líneas extraídas del artículo de Ahlgren y Ono: «Partitions play important roles in such diverse areas of mathematics as combinatorics, Lie theory, representation theory, mathematical physics, and the theory of special functions».

Bibliografía

- S. Ahlgren y K.Ono (2001): “Addition and Counting: The arithmetic of Partitions”. Notices of the AMS. Volume 48, Number 9. USA.
- H. L. Alder (1969): “Partition Identities – From Euler to the present”. Amer. Math. Monthly 76, pp.733-745. USA.
- W. Dunham (2006): “Euler: El matemático de todos los matemáticos”. 2.ed. Nivela, Madrid.

- F. G. Frobenius (1968): “Gesammelte Abhandlungen I, II, III. Editor J. P. Serre. Springer-Verlag, Berlin.
- T.Y. Lam (1998): “Representations of Finite Groups: A Hundred Years”. Notices of the AMS. Volume 45, Number 3 and 4. USA.
- V. S. Varadarajan (2006): “Euler Through Time: A New Look at Old Themes”. American Mathematical Society. USA.

Tomás Sánchez Giralda (1947, Las Palmas de Gran Canaria, España) es Doctor en Ciencias (Matemáticas) por la Universidad Complutense de Madrid. Desde el año 1969 ha desempeñado actividades, tanto docentes como investigadoras y de gestión, en las Universidades Complutense de Madrid, Paris-Orsay, Murcia y Valladolid. En esta última es, en la actualidad, catedrático de Álgebra. Es autor de artículos de investigación y de divulgación científica, de libros y capítulos de libros, así como de otras publicaciones en Matemáticas y sus aplicaciones.
E-mail: tsg@agt.uva.es