UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, páginas 77-94
ISSN: 1815-0640

Ideas para la clase de logaritmos

Raquel Susana Abrate y Marcel David Pochulu

Resumen

En este trabajo presentamos algunas sugerencias de diseño de actividades para la clase de logaritmos, tratando de buscar la comprensión de los conceptos y procedimientos e intentando dotarlos de mayor sentido para los estudiantes. Para ello, proponemos recuperar la construcción histórica por la que atravesaron, las nociones de progresión geométrica y aritmética, y algunas de sus múltiples aplicaciones.

Abstract

In this article some suggestions of design activities for the logarithm lesson are presented, trying to look for the comprehension of concepts and procedures and providing a major sense for the students. To do it, we propose to get back the historical construction they have crossed over, the conceptions of geometrical and arithmetical progression and some of the multiple applications.

Introducción

En una gran cantidad de casos, la enseñanza de los logaritmos se realiza de manera algorítmica y descontextualizada. Generalmente se parte de la definición, se dan algunos ejemplos, luego se enuncian y ejemplifican las propiedades y finalmente se realizan los ejercicios. Asimismo, los ejercicios suelen ser largas listas donde hay que calcular el logaritmo de un número –en diferentes bases– de manera directa o valiéndose de las propiedades; o bien, el cálculo de dicho número aplicando finalmente el antilogaritmo.

En este sentido, acordamos con Lefort (2001) pues sostiene que aunque esta introducción sea matemáticamente satisfactoria, se halla bastante lejos de ser evidente para los estudiantes y su propiedad fundamental queda oculta. Además, el problema histórico que llevó a concebir los logaritmos también estaría ausente a pesar de que su uso, para presentar esta nueva noción, tiene la ventaja de la simplicidad: se trata sencillamente de construir una tabla que permita realizar rápidamente multiplicaciones, divisiones y potencias.

Creemos que muchas veces el modo en que se enseña Matemática dificulta que se comprenda la relevancia del tema, que se entiendan los obstáculos del pasado y que adquiera real sentido, al menos en parte, para muchos de nuestros alumnos. Enseñar contenidos matemáticos desprovistos de su historia suele acarrear el inconveniente de que pueden ser concebidos por los alumnos como algo artificioso y arbitrario de esta ciencia. La perspectiva histórica no sólo permite conocer cómo se crearon y construyeron los conceptos y las teorías que hoy manejamos, producto de un trabajo acumulativo, sino también, faculta para comparar técnicas y métodos actuales con otros que se utilizaron en el pasado. Así, el quehacer matemático se torna valioso al poner de manifiesto que un mismo problema se resolvió de maneras diferentes en distintas épocas.

Pensamos que recurrir a la narración de las vicisitudes que debieron sortearse a lo largo del tiempo, hasta llegar a estos conocimientos, puede ser una manera de "humanizar" el contenido matemático, aproximándolo a la realidad del alumno, y tal vez, una manera más apropiada para iniciar su abordaje.

Asimismo, al enfoque histórico debiéramos anexarle su aplicación, no sólo a contextos intramatemáticos, sino también extramatemáticos, para que el alumno pueda comunicarse mediante la Matemática y se apropie de diferentes visiones de esta ciencia, construyendo la suya propia. La integración de distintas áreas es uno de los aspectos que estimula el interés de los alumnos y por eso proponemos diseñar y planificar algunas actividades para ser llevadas al aula con este propósito, a la vez que colaboran en la construcción de nuevos conceptos. Como expresa Schoenfeld (1985) *"de bien poco sirve saber lo fundamental, si no se sabe cuándo ni dónde usarlo*", a lo que agregamos que, la posibilidad de usarlo requiere conocimientos previos que permitan conocer un concepto matemático en una situación no matemática. ¿De qué manera es posible llevar esto a la práctica? Creemos que poniendo el acento en el proceso de aprendizaje más que en el de enseñanza y resaltando que "hacer Matemática" implica, entre otras cosas, resolver diferentes problemas, utilizando los mismos contenidos matemáticos en distintas situaciones.

Abordando los logaritmos en la clase de Matemática

Retomando la idea original de Napier, que motivara el surgimiento de los logaritmos, nos proponemos abordar el tema de un modo similar, aunque mucho más acotado y simplificado. Podríamos comenzar calculando, como lo hacemos habitualmente y sin ayuda de la calculadora, las siguientes multiplicaciones:

a) 16 x 512 b) 81 x 19683 c) 256 x 262144 d) 625 x 1953125

Aplicando el algoritmo de la multiplicación tendríamos:

		5	1	2
	x		1	6
+	3	0	7	2
	5	1	2	
	8	1	9	2

			1	9	6	8	3
				x		8	1
+			1	9	6	8	3
	1	5	7	4	6	4	
	1	5	9	4	3	2	3

$$
\begin{array}{r}
262144 \\
\times \quad 256 \\
\hline
1572864 \\
+\;1310720 \\
524288 \\
\hline
67108864
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
1953125 \\
\times \quad 625 \\
\hline
9765625 \\
+\;3906250 \\
11718750 \\
\hline
1220703125
\end{array}
$$

Ahora bien, podríamos construir una tabla que contenga algunas potencias de base y exponente natural, como la que aparece a continuación (Tabla Nº 1), y localizamos en ella cada uno de los resultados obtenidos.

n	2^n	3^n	4^n	5^n
1	2	3	4	5
2	4	9	16	25
3	8	27	64	125
4	16	81	256	625
5	32	243	1.024	3.125
6	64	729	4.096	15.625
7	128	2.187	16.384	78.125
8	256	6.561	65.536	390.625
9	512	19.683	262.144	1.953.125
10	1.024	59.049	1.048.576	9.765.625
11	2.048	177.147	4.194.304	48.828.125
12	4.096	531.441	16.777.216	244.140.625
13	8.192	1.594.323	67.108.864	1.220.703.125
14	16.384	4.782.969	268.435.456	6.103.515.625

13	**8.192**	**1.594.323**	**67.108.864**	**1.220.703.125**

Tabla Nº 1: Potencias de base y exponente natural

Vemos que todos los resultados conseguidos se ubican en la fila correspondiente a n = 13. Es decir, que 13 es el exponente al que hay que elevar el 2 para obtener 8.192, o el 3 para obtener 1.594.323, o el 4 para obtener 67.108.864, o el 5 para obtener 1.220.703.125.

Este exponente, en Matemática se denomina *logaritmo.* En particular diríamos que el logaritmo de 8.192, en base 2, es 13 y lo denotamos:

$$\log_2 8.192 = 13 \text{ pues } 2^{13} = 8.182;$$

o que el logaritmo de 1.594.323 en base 3 es 13 y lo denotamos:

$$\log_3 1.594.323 = 13 \text{ pues } 3^{13} = 1.594.323;$$

Y así sucesivamente. No obstante, volveremos sobre este concepto para terminar de comprenderlo.

Ubicamos ahora en la tabla cada uno de los factores correspondientes a las multiplicaciones planteadas al inicio de la actividad y tratamos de expresarlos como potencias con igual base. Por ejemplo:

$$16 \times 512 = 8.192$$
$$2^4 \times 2^9 = 2^{13}$$

Hemos tomado este ejemplo en particular, pero es fácil comprobar que las restantes multiplicaciones involucran los mismos exponentes.

Tal como pudimos constatar, el cálculo de las multiplicaciones propuestas con la actividad se vuelve más complejo y tedioso, a medida que aumenta el número de dígitos de los factores. Si en cambio expresamos a cada uno de los factores como potencias de igual base, las cuales podemos encontrar en una tabla similar a la anterior, y utilizamos propiedades ya conocidas por nosotros, el cálculo puede tornarse mucho más sencillo.

Por ejemplo, 16 x 512 puede resolverse, sin efectuar el algoritmo de la multiplicación, utilizando sólo la tabla expuesta, de la siguiente manera:

$$16 = 2^4 \text{ y } 512 = 2^9\text{, por lo que } 16 \times 512 = 2^4 \times 2^9$$

Aplicando propiedades de las potencias:

$$16 \times 512 = 2^4 \times 2^9 = 2^{4+9} = 2^{13}$$

Buscamos ahora en la tabla, en la columna correspondiente a 2^n, su valor para $n = 13$. El mismo es 8.192, coincidentemente con el valor que encontráramos cuando resolvimos la multiplicación mediante el algoritmo habitual.

Del mismo modo, podemos hacer:

$$81 \times 19.683 = 3^4 \times 3^9 = 3^{13} = 1.594.323$$
$$256 \times 262.144 = 4^4 \times 4^9 = 4^{13} = 67.108.864$$
$$625 \times 1.953.125 = 5^4 \times 5^9 = 5^{13} = 1.220.703.125$$

De manera similar, podríamos efectuar otras operaciones, como divisiones, por ejemplo, pues:

$$\frac{67.108.864}{263.144} = \frac{4^{13}}{4^9} = 4^4 = 256$$
$$\frac{1.220.703.125}{625} = \frac{5^{13}}{5^4} = 5^9 = 1.953.125$$

También podríamos verificar otras propiedades de la potencia, como ser:

$$4^7 = 16384 = 2^{14} \Rightarrow 4^7 = 2^{14} \Rightarrow (2^2)^7 = 2^{14}$$
$$2^0 = 3^0 = 4^0 = 5^0 = 1$$

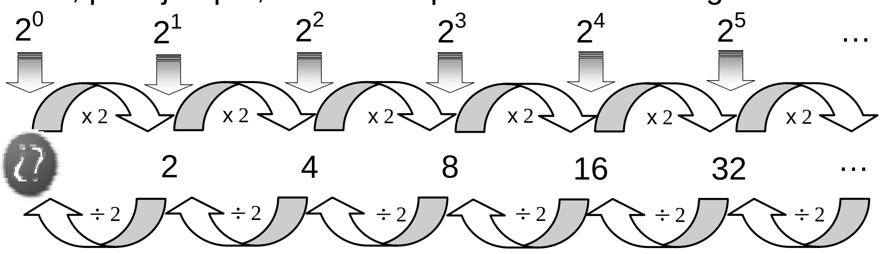
El lector se habrá percatado de que esta actividad tuvo como propósito fundamental mostrar a los alumnos que las multiplicaciones se pueden convertir en sumas y las divisiones en restas, con lo que se facilita notablemente el cálculo, más cuando los números implicados son muy grandes y se cuenta, obviamente, con tablas apropiadas. Hoy no tendría sentido realizarlas de esta manera, pero el concepto que vino a originar esta búsqueda de simplicidad de los cálculos, trasciende la utilidad que tuvo en su época, y precisamente en este aspecto centraremos nuestro trabajo en las secciones siguientes.

Una propiedad que suscita errores

En Abrate, Pochulu y Vargas (2006), se expresa que a veces termina siendo sólo una convención, para muchos alumnos, el hecho de que una potencia con base no nula y exponente cero de por resultado uno. Por lo general, al intentar resolver una situación de esta naturaleza, los alumnos no siempre recuerdan aquella regla "instituida" en algún momento de su formación matemática. Usualmente apelan a justificaciones que guardan cierto grado de coherencia interna con el razonamiento seguido, como el considerar que $a^0 = 0$ pues *"se multiplica cero veces la base"*, o que $a^0=a$ puesto que *"si se multiplica cero veces la base, queda la misma base",* pero que son inconsistentes para las leyes y propiedades establecidas para los números enteros.

Observemos que las tablas propuestas para abordar el concepto de logaritmo nos brindan una oportunidad más para reforzar esta dificultad que presentan los alumnos aún en ciclos superiores, pues aparece una serie de potencias donde podemos ver claramente la ley de formación que subyace en ella.

Tomemos, por ejemplo, la serie de potencias de base igual a 2:



Notemos que la serie es geométrica de razón 2 y que los exponentes conforman una serie aritmética cuya diferencia es 1.

Una alternativa sería conjeturar qué valor se le podría asignar a 2^0. No obstante, para que la serie tenga sentido (se multiplica por 2 a un término para obtener el siguiente, o equivalentemente, se divide entre 2 a uno de ellos para conseguir el anterior), no queda otra alternativa que asignar un 1.

El mismo análisis puede hacerse con las otras series de potencias, incluso con una base negativa, pues también es frecuente que los alumnos infieran que $(-a)^0 = -1$, extrapolado de $a^0 = 1$, con $a > 0$.

Una leyenda que se relaciona con el tema[1]

En el siglo IX, se escribieron en Arabia los primeros libros sobre el juego del ajedrez, cuyos autores fueron: Al-Razí, Al-Sarajsí y Al-Adlí. Este último escribió "El Libro del Ajedrez" en el que se narra por vez primera, la célebre *leyenda de los granos de trigo*, donde se le atribuye la invención del Ajedrez a alguien llamado Sissa.

La Historia cuenta que Sissa inventó este juego con el objeto de agradar al rey y combatir su tedio, mostrándole además que un rey sin su pueblo está inerme, pues no tiene poder ni valor. Fascinado con el juego, el rey le ofreció a Sissa cumplirle un deseo. No obstante, Sissa decidió darle al rey una lección de humildad, y pidió lo siguiente: dos granos de trigo por la primera casilla del tablero, cuatro granos por la segunda, ocho por la tercera, dieciséis por la cuarta, y así sucesivamente hasta completar las sesenta y cuatro casillas. Digamos, estaríamos continuando con la serie de potencias de base 2 que iniciamos anteriormente.

El rey, extrañado de que alguien con tanta inteligencia pidiera algo en apariencia tan simple, ordenó que se le concediera su petición. Al poco tiempo, su visir le indicó que era imposible satisfacer la demanda, pues la cantidad de trigo que pedía Sissa era muchísimo más de lo que ellos podrían llegar a tener. Surge naturalmente como interrogante ¿Qué cantidad de granos de trigo le debía entregar el rey?

Ahora bien, si nos dejamos llevar por la imaginación y el placer de recrearnos con la Matemática, podríamos hacer varios análisis importantes que nos conducirían a retomar temas que seguramente abordamos en la currícula escolar. Por ejemplo, si pensamos que tal cantidad de granos de trigo pudiera juntarse de un solo golpe, cosa que es imposible aún recolectando todas las cosechas de trigo del mundo durante un siglo, y contáramos un grano de trigo por segundo, sin parar, ¿Cuánto tardaríamos? Muy posiblemente debamos hacer cambios de unidades para que nuestra respuesta adquiera sentido.

A su vez, podríamos también cuestionarnos cuánto pesaría esta carga de trigo. Desde luego, tendríamos que hacer algunas experiencias previas para determinar el peso aproximado de un grano de trigo, e indagar la capacidad máxima de carga de un camión de transporte de granos, más si nuestra intención está en brindar una respuesta medianamente aceptable al interrogante.

Asimismo, valdría la pena hallar la cotización internacional promedio del trigo, por toneladas, al cierre de la Bolsa de Valores y estimar el costo de esta cantidad de cereal. Con seguridad, habrá que hacer algunas conversiones de moneda y nos llevaría a incursionar por el mundo financiero.

[1] Leyenda tomada de http://www.portalajedrez.com/anecdotas/leyendagranostrigo.php

Pero si nuestra curiosidad y capacidad de asombro desea continuar, podríamos considerar la posibilidad de colocar los granos de trigo uno tras otro. Ahora bien, deberíamos también estimar el grosor y el largo de un grano de trigo, y entonces cabe preguntamos ¿Qué tan larga sería nuestra hilera? ¿De un Kilómetro? ¿De mil Kilómetros? ¿Llegaríamos al otro lado del mundo? ¿Podríamos darle una vuelta a la tierra?

Nuevamente, la búsqueda de respuestas a estos cuestionamientos conducirá a integrar muchos más contenidos de los que podemos estar imaginando en este momento.

Más propiedades de los logaritmos

Podríamos redescubrir las propiedades del logaritmo a partir del análisis de las tablas antes utilizadas. ¿De qué manera? Recordemos que "el logaritmo de un número es el exponente al cual se debe elevar la base del logaritmo para obtener dicho número (argumento)".

Volviendo sobre el ejemplo:

$$16 \text{ x } 512 = 2^4 \text{ x } 2^9 = 2^{13} = 8.192$$

Según lo expresado anteriormente, 4 es el exponente al que hay que elevar el 2 para obtener 16. En otras palabras, 4 es el logaritmo en base 2 de 16 lo que simbólicamente escribimos: $\log_2(16) = 4$. También, y con el mismo criterio: $\log_2(512) = 9$ y $\log_2(8.192) = 13$.

Observemos que, 4 + 9 = 13, lo que podría escribirse como:

$$\log_2(16) + \log_2(512) = \log_2(8.192) = \log_2(16 \times 512)$$

Del mismo modo, mirando las columnas de la tabla correspondientes, podemos establecer las siguientes igualdades:

$$\log_3(81) + \log_3(19.683) = \log_3(1.594.323) = \log_3(81 \times 19.683)$$
$$\log_4(256) + \log_4(262.144) = \log_4(67.108.864) = \log_4(256 \times 262.144)$$
$$\log_5(625) + \log_5(1.953.125) = \log_5(1.220.703.125) = \log_5(625 \times 1.953.125)$$

Podríamos continuar con cálculos similares, y luego de un número significativo de ejemplos, convencernos como para "generalizar" este resultado diciendo que: *El logaritmo de un producto, en una base dada, es la suma de los logaritmos -en la misma base- de cada uno de los factores, si éstos existen.* En lenguaje simbólico escribiríamos:

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

Algo similar ocurre con el logaritmo de un cociente. Recordemos que en un ejemplo anterior, dividimos:

$$\frac{67.108.864}{263.144} = \frac{4^{13}}{4^{9}} = 4^{4} = 256$$

Llevando a cabo un análisis análogo al realizado para el producto, y teniendo en cuenta el concepto de logaritmo, tendremos que:

$$13 - 9 = 4 \Rightarrow \log_4(67.108.864) - \log_4(262.144) =$$
$$= \log_4(256) = \log_4\left(\frac{67.108.864}{262.144}\right)$$

O también, en la división:

$$\frac{1.220.703.125}{625} = \frac{5^{13}}{5^{4}} = 5^{9} = 1.953.125$$

Notamos que:

$$13 - 9 = 4 \Rightarrow \log_5(1.220.703.125) - \log_5(625) =$$
$$= \log_5(1.953.125) = \log_4\left(\frac{1.220.703.125}{625}\right)$$

De manera análoga al análisis que realizamos con el producto, y con un buen número de ejemplos demostrativos, podríamos concluir y generalizar que: *El logaritmo de un cociente, en una base dada, es la diferencia entre los logaritmos del dividendo y del divisor, en la misma base, si éstos existen.* En lenguaje simbólico escribiríamos:

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

Finalmente, podríamos deducir la propiedad del logaritmo respecto de la potencia, si analizamos también uno de los ejemplos citados. Vimos que:

$$4^7 = 2^{14} = 16.384$$

Es decir, que:

$$\log_4(16.384) = \log_4\left(4^7\right) = 7$$

Además, podríamos pensar a 4^7 de la siguiente manera:

$$4^7 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$$

Por la propiedad anteriormente mencionada, referida al logaritmo de un producto, y generalizándola para *n* factores, tenemos:

$$\log_4(4^7) = \log_4(4\times4\times4\times4\times4\times4\times4) =$$
$$= \log_4(4)+\log_4(4)+\log_4(4)+\log_4(4)+\log_4(4)+\log_4(4)+\log_4(4) =$$
$$= 7\times\log_4(4) = 7\times1 = 7$$

En consecuencia, según este criterio, también podemos escribir:

$$\log_2(4^7) = \log_2(4\times4\times4\times4\times4\times4\times4) =$$
$$= \log_2(4)+\log_2(4)+\log_2(4)+\log_2(4)+\log_2(4)+\log_2(4)+\log_2(4) =$$
$$= 7\times\log_2(4) = 7\times2 = 14$$

Resultado que ya conocíamos pues habíamos visto anteriormente que $4^7 = 2^{14}$, y por esta razón, también podríamos escribir:

$$\log_2(4^7) = \log_2(2^{14}) = 14\times\log_2(2) = 14\times1 = 14$$

De manera similar, puede analizarse a partir de la tabla que:

$$\log_3(81) = \log_3(3^4) = 4\times\log_3(3) = 4\times1 = 4$$

Efectivamente 4 es el exponente al que hay que elevar el numero 3 para obtener 81, es decir, 4 es el logaritmo de 81 en base 3.

Podríamos sugerir a los alumnos que busquen con otros ejemplos, como el que sigue y tantos como se consideren significativos introducir en la clase:

$$\log_5(390.625) = \log_5(5^8) = 8\times\log_5(5) = 8\times1 = 8$$

Esto nos permite concluir que:

El logaritmo de un número positivo, en la misma base, es igual a 1. En símbolos:

$$\log_b(b) = 1$$

El logaritmo de una potencia -en una base determinada- es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de esta potencia, si éste existe. En símbolos:

$$\log_b(a^n) = n\times\log_b(a)$$

Podríamos continuar buscando más propiedades de logaritmos de este modo, pero consideramos que no constituye el eje de este artículo, y corremos el riesgo que el lector pierda el objetivo que perseguimos con la presentación de este tema en la clase de Matemática.

Buscando el error

Estamos convencidos de que la corrección sistemática del error no favorece su eliminación. Por el contrario, creemos que un camino posible se encuentra intentando que los alumnos sean los que perciban los errores. Darle lugar al error en la clase es trabajarlo descubriendo las hipótesis falsas que llevaron a producirlo, buscando los posibles caminos hasta redescubrir los conceptos validados y matemáticamente aceptados, comparando versiones correctas con erróneas, etc.

Si el error es descubierto como consecuencia de una interacción o debate entre profesor y alumno, promoverá la superación, puesto que los estudiantes pueden modificar sus viejas ideas cuando están convencidos de que hay otra que es mejor. Veamos una actividad que esconde un error y conlleva a un proceso de reflexión y análisis de lo realizado.

Sabemos que:

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Como a un número mayor le corresponde también un logaritmo mayor, tendremos que:

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) > \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Aplicando una de las propiedades de logaritmos que mencionamos anteriormente:

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) > 2 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Si dividimos ambos miembros de la desigualdad por $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$, resulta:

$$1 > 2$$

¿Dónde está el error de este razonamiento? Pues si aceptamos como válido lo realizado, estaríamos contradiciendo el orden que se establece para los números reales.

Una actividad que conduce a un desafío e integra contenidos

Las tablas de logaritmos y las reglas de cálculo (reglas numeradas con multitud de tablas paralelas) eran imprescindibles en cualquier centro de cálculo, hasta la aparición de las calculadoras y ordenadores. Actualmente los logaritmos ya no son necesarios para lo que fueron descubiertos. Sin embargo, ciertas características y utilidades que, durantes estos siglos se les han descubierto, los han hecho sobrevivir al desarrollo de la electrónica. Planteamos aquí una actividad que pensamos conduce a un desafío e integra contenidos, más si nos proponemos analizarla y reflexionar sobre ella.

¿Qué pasaría si al efectuar un producto, como lo hacíamos anteriormente, alguno de los factores no figura en la tabla porque no es potencia entera de 2, ni de 3, ni de otra base que aparece allí? Supongamos, por ejemplo, que debemos hacer la multiplicación entre 64 y 400.

En este caso, como el 64 es una potencia de 2 (también lo es de 4 en la tabla mostrada anteriormente) podríamos expresar al 400 como una potencia en la misma base. Como 400 es un valor comprendido entre 256 y 512, entonces es una potencia de 2 comprendida entre 28 y 29, y el exponente que estaríamos buscando debiera ser un número comprendido entre 8 y 9. Si contáramos con una calculadora científica, o un software adecuado, hallaríamos que el exponente buscado se obtiene de calcular:

$$\begin{aligned} 2^n &= 400 \\ \log\left(2^n\right) &= \log(400) \\ n \cdot \log(2) &= \log(400) \\ n &= \frac{\log(400)}{\log(2)} \cong 8{,}643856190 \end{aligned}$$

Ahora bien, pensemos por un instante que no disponemos ni de calculadora ni de software (a lo sumo podríamos llegar a tener la calculadora que nos brinda un teléfono celular, tan común en la época en la cual vivimos) y que muy “ligeramente” llevamos a cabo un proceso de *interpolación lineal* para efectuar el cálculo. No obstante, somos conscientes de que este procedimiento nos conducirá a encontrar una aproximación a dicho exponente. El razonamiento sería:

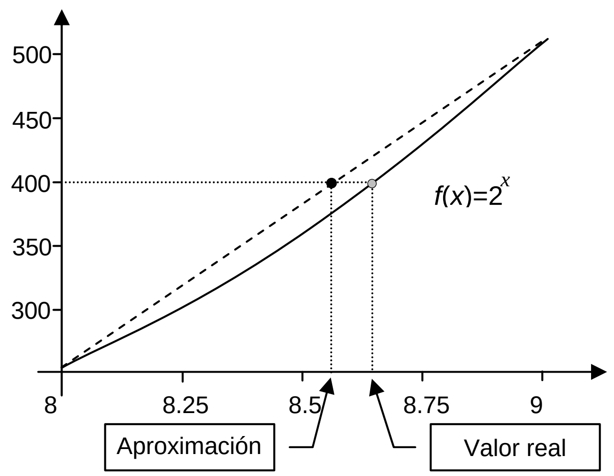
$$\begin{array}{ccccccc} & & 256 & \text{———} & 8 & & \\ & 144 & & & & y & \\ 256 & & 400 & \text{———} & x & & 1 \\ & & & & & & \\ & & 512 & \text{———} & 9 & & \end{array}$$

Esto es, si a una diferencia de 256 entre las potencias (512 – 256) le corresponde una diferencia de 1 (9 – 8) entre los exponentes, entonces a una diferencia de

144 (400 – 256) le corresponderá: $y = \dfrac{144.1}{256} = 0{,}5625$, por lo que el exponente buscado es n = 8 + y = 8,5625. Logramos, de esta forma, que nuestra multiplicación se transforme en:

$$64 \times 400 = 2^6 \cdot 2^n \cong 2^6 \cdot 2^{8{,}5625} = 2^{14{,}5625}$$

Hacemos notar que la aproximación de $2^{8{,}5625} \cong 378{,}0674934$ al 400 deviene, sencillamente, porque hemos calculado el exponente pensando en una variación proporcional (lineal) entre los números. De hecho, hemos aplicado una “regla de tres simple”, cuando en realidad la variación es exponencial. Lo expuesto anteriormente resulta más evidente si lo analizamos a través de una gráfica:



Como habíamos dicho que no disponíamos de una calculadora científica, no nos resultaría fácil hallar que $2^{14{,}5625} \cong 24.196{,}31958$, en consecuencia, nos vemos nuevamente tentados a realizar otra *interpolación lineal*. En este caso tendríamos:

$$1\left\{\begin{array}{l} 0{,}5625\left\{\begin{array}{lcl} 14 & \text{———} & 16.384 \\ 14{,}5625 & \text{———} & x \end{array}\right\} y \\ \begin{array}{lcl} 15 & \text{———} & 32.768 \end{array} \end{array}\right\} 16.384$$

Armando convenientemente la proporción y resolviendo resulta:

$$y = \frac{0{,}5625 \times 16.384}{1} = 9.216$$

En consecuencia, el valor buscado es 16.384 + 9.216 = 25.600.

Sintetizando lo realizado hasta el momento tenemos:

$$64 \times 400 = 2^6 \cdot 2^n \cong 2^6 \cdot 2^{8{,}5625} = 2^{14{,}5625} \cong 25.600$$

Sin embargo, efectivamente $64 \times 400 = 25.600$, muy a pesar de que el resultado se obtuvo tras sucesivas aproximaciones lineales. Naturalmente surge como interrogante ¿Por qué ocurre esto? y allí está el desafío que le proponemos al lector.

Cabe hacer notar que esta situación no sólo se presenta en el ejemplo propuesto. Tampoco es generalizable a cualquier producto. Sí, por ejemplo, se presenta cuando uno de los factores puede ser expresado como una potencia de base natural y exponente entero, y el otro no.

Ideas para la clase de logaritmos

Sostenemos que los logaritmos son quizás una de las herramientas matemáticas mas desaprovechadas en la educación escolar, ya que no se le da un fundamento real a dicha función. Fuera de cálculos técnicos, los logaritmos presentan utilidades como remarcamos a continuación.

Las escalas logarítmicas: En ocasiones resulta ventajoso emplear escalas logarítmicas en lugar de escalas aritméticas para llevar a cabo representaciones gráficas. Las escalas logarítmicas son utilizadas en diversas áreas, a los fines de representar datos que tienen una variación muy grande o un rango de variabilidad muy amplio. Por ejemplo, en técnicas de vacío, la presión de gas varía desde 1 atmósfera[2] hasta un rango de 10^{-13} – 10^{-15} atmósferas. Evidentemente, si utilizamos escalas convencionales (lineales o aritméticas) se hace prácticamente imposible plasmar tal rango de variabilidad.

En cambio, si consideramos logaritmos decimales, sabemos que: $\log_{10}(1) = 0$, $\log_{10}(10^{-15}) = -15$ y ahora tenemos el intervalo [-15; 0] donde la presión es fácilmente representable en una escala que llamaremos logarítmica. La denominamos logarítmica porque en vez de indicar el valor de la variable se señala su logaritmo.

Crear actividades que demanden el uso de escalas logarítmicas no resulta complicado, más si podemos acceder a la Internet, la cual puede tornarse una fuente inagotable de información y datos de primera mano. Recordemos que como red originariamente científica, puede encontrarse gran cantidad de información útil para la clase de Matemática.

El diseño de la actividad que realicemos dependerá, obviamente, de nuestra creatividad y de los intereses de nuestros alumnos. No obstante, tomaremos aquí un ejemplo particular, el cual sólo muestra algunas de las aplicaciones que tiene el tema en cuestión.

Supongamos que deseamos recopilar información acerca del peso mínimo y máximo que tienen los mamíferos marinos de la Patagonia Austral (Argentina). Con seguridad nos sorprenderemos por la variedad y diversidad de datos que encontraremos en la red sobre este tema, lo que conllevará a enriquecedoras puestas en

[2] La unidad de presión denominada atmósfera equivale a la presión de la atmósfera terrestre sobre el nivel del mar. 1 atmósfera $\cong$ 760 milímetros de mercurio $\cong$ 101.325 pascales.

común entre profesor y alumnos. Por lo pronto, aparecerán datos referidos a los recién nacidos y a los adultos, discriminados por sexo, pues existen notables diferencias entre ellos (por ejemplo, entre los elefantes marinos, una hembra alcanza un peso máximo de 900 kg, mientras que un macho los 3500 kg).

Representar los pesos mínimos y máximos de los mamíferos marinos en una escala aritmética puede no aportarnos demasiada información para aquellos animales de porte más pequeño. No obstante, la representación en escala logarítmica resulta sumamente adecuada, y hasta sencilla de realizar si contamos con algún software matemático o planilla de cálculo.

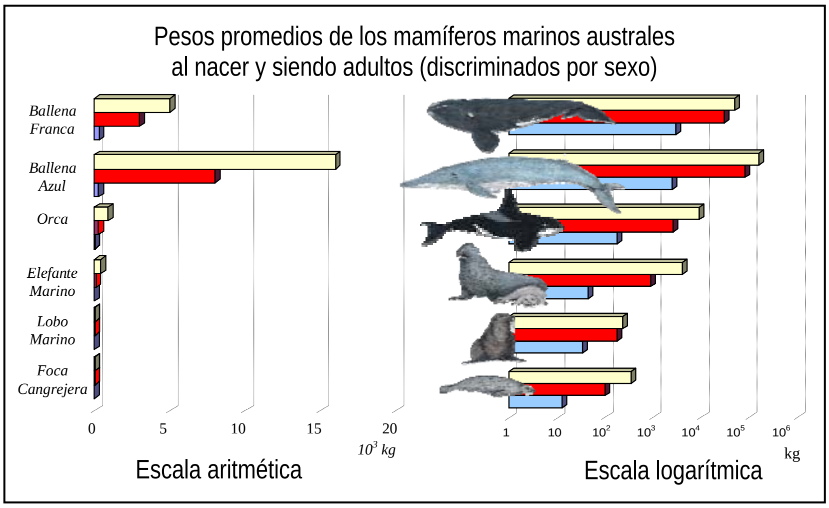


Figura Nº 01: Comparación entre escala aritmética y logarítmica

La lectura e interpretación de estas escalas (Figura Nº 01) es un tema interesante en sí, pues nos lleva a debatir cómo las mismas pueden confundir a los incautos.

Los sonidos que oímos: La pérdida de la audición, no parece ser un problema preocupante para la mayoría de los miembros de nuestra sociedad. Constantemente nos exponemos a la agresión sonora, la cual hasta nos invade y en algunos casos vamos a buscarla: el sonido de una discoteca, por ejemplo, el tradicional “poné más fuerte” un aparato de reproducción de sonido, o un *disc-man* escuchado con un volumen tan alto, que quien se sitúa a pocos pasos del oyente, puede también escuchar su música.

El oído humano puede acomodarse a intervalos de presiones e intensidades sonoras bastante grandes: entre 2×10^{-5} y 20 N/m^2 para la amplitud de la presión y desde 10^{-12} hasta 1 vatios/m^2 para la intensidad. El valor más bajo, en ambos casos, se toma como umbral de audición, mientras que el más alto, que produce sensación dolorosa en la mayoría de las personas, es el umbral de dolor.

Debido a este gran intervalo al que resulta sensible el oído, se utilizan escalas logarítmicas para describir los niveles de presión y de intensidad de una onda sonora. Vale aclarar que al crecer la intensidad de una onda sonora geométricamente, la sensación percibida lo hace de forma aproximadamente aritmética; es decir, que al doble de intensidad nosotros escuchamos sólo un poco más. Esto es lo verdaderamente problemático de la cuestión, pues sensitivamente no percibimos como tales a los grandes aumentos de intensidad sonora. Por esta razón, se introdujo la escala de medidas en bel y decibeles (en honor a Alexander Graham Bell), en la cual un sonido de intensidad *I* tiene, por definición, un nivel de intensidad de: $D = 10 \cdot \log(I / I_0)$ decibeles.

En consecuencia, cada vez que la intensidad se multiplica por 10, se añaden 10 decibelios al nivel. Esto es, un sonido que ejerce una intensidad sonora 1.000 veces más grande que otro tendrá un nivel de intensidad sonora sólo 30 decibeles mayor. Por ejemplo, supongamos que queremos comparar el nivel de intensidad de una conversación normal con el de un martillo neumático. Podemos buscar en bibliografía especializada, o en la Internet, los valores de intensidad correspondientes. Así tendremos:

Conversación normal: $D = 10 \log\left(\dfrac{3 \times 10^{-6}}{10^{-12}}\right) = 10 \log\left(3 \times 10^{3}\right) \cong 65$ decibeles

Número 1000 veces más grande $\Downarrow$ ***Difiere en 30 unidades*** $\Downarrow$

Martillo neumático: $D = 10 \log\left(\dfrac{3 \times 10^{-3}}{10^{-12}}\right) = 10 \log\left(3 \times 10^{9}\right) \cong 95$ decibeles

Las discusiones que de estas actividades se desprenden son ilimitadas, pues se pueden analizar incrementos en decibeles de una onda sonora y compararlos con el incremento de intensidad, relacionar la distancia de una fuente sonora con la intensidad en decibeles, determinar la ganancia de potencia de un amplificador de sonido o equipo de música, entre otras.

Destructividad de un terremoto: Una primera medida de la intensidad de los terremotos son los daños que ocasiona, pero para lograr una caracterización más precisa, se han desarrollado diversas escalas. Pareciera lógico medir los sismos por la energía que liberan, aunque muchas veces son números muy grandes. Por ejemplo, hay terremotos cien mil millones de veces más fuertes que otros, y por otro lado, algunos que no parecen ser muy intensos liberan tanta energía como una explosión.

Para evitar números tan grandes, igual que ocurre para medir los sonidos, las escalas usan logaritmos. La escala sismológica de Richter, también conocida por su nombre más adecuado de escala de magnitud local (ML), es una escala logarítmica arbitraria que asigna un número para cuantificar el tamaño de un terremoto. Fue nombrada así en honor de Charles Richter (1900-1985), sismólogo nacido en Hamilton, Ohio, Estados Unidos.

Richter desarrolló su escala en la década de 1930 y calculó que la magnitud de un terremoto o sismo puede ser medida mediante la fórmula $M = \log_{10}(A) + C$, donde *A* es la amplitud de sus ondas superficiales en milímetros y $C = 3{,}3 + 1{,}66\log_{10}(D) - \log_{10}(T)$ es una constante que depende del período *T* de las ondas registradas en el sismógrafo y de la distancia *D* de éste al epicentro, en grados angulares. Naturalmente la magnitud *M* es una medida logarítmica.

El uso del logaritmo en la escala es para reflejar la energía que se desprende en un terremoto. Nuevamente, el logaritmo incorporado a la escala hace que los valores asignados a cada nivel aumenten de forma exponencial, y no de forma lineal. Al ser logarítmica la magnitud *M*, una diferencia de 1 unidad en magnitud significa 10 veces más de amplitud en la onda sísmica registrada, lo cual puede ser catastrófico en sus efectos. Un terremoto de magnitud 1 o 2 es muy débil, y los de magnitud mayor que 7 devastadores, pero veamos algunos ejemplos concretos.

El 19 de noviembre de 1973, a las 11:19 hs, se produce un terremoto de magnitud 5,40 en Argentina, causando daños en varias localidades del este de las provincias de Salta y Jujuy, especialmente en Santa Clara. Aproximadamente cuatro años después (23 de noviembre de 1977, a las 9:26 hs) se produce otro terremoto, pero de magnitud 7,40 que provocó daños importantes en casi toda la provincia de San Juan, especialmente en la ciudad de Caucete, donde murieron 65 personas. También ocasionó leves daños en la zona norte del Gran Mendoza[3].

Si observamos, la diferencia entre estos dos sismos no parece muy grande, pues $M_1 = 5{,}40$ y $M_2 = 7{,}40$.

En consecuencia tendríamos $\log(A_1) + C = 5{,}40$ para el primer caso, y $\log(A_2) + C = 7{,}40$ para el segundo.

Restando miembro a miembro estas igualdades vemos que:

$$\log(A_2) - \log(A_1) = 2$$

Si aplicamos las propiedades de logaritmos abordadas anteriormente tenemos $\log\left(A_2 / A_1\right) = 2$. Es decir:

$$\frac{A_2}{A_1} = 10^2 \Rightarrow A_2 = 100A_1$$

Lo que indica que el terremoto de Caucete fue aproximadamente 100 veces más intenso que el ocurrido en Santa Clara. Otra vez, las posibilidades de actividades vuelven a ser numerosas, llevándonos a integrar la Matemática con otras disciplinas.

El carácter ácido, básico o neutro de las disoluciones: Para indicar el nivel de acidez de una sustancia, solemos hablar del pH. Si bien esta expresión es universalmente utilizada, la misma alude al potencial hidrógeno (pH) que tiene una sustancia. En disoluciones diluidas en lugar de utilizar la actividad del ion hidrógeno, se le puede aproximar utilizando la concentración molar del ion hidrógeno (por ejemplo, una concentración de $[H+] = 1 \times 10^{-7}$ M). Expresar concentraciones de iones con exponente negativo resulta en la práctica incómodo; por esta razón en el año 1909, el

[3] Fuente: http://www.inpres.gov.ar/seismology/seismology/historic/hist.panel.htm

químico danés Soren P. L. Sorensen introdujo el concepto de pH, como el logaritmo decimal del inverso de la concentración de iones expresada en moles/ litro. Esto es: $pH = \log\left(1/H^{+}\right)$.

Aplicando ahora el logaritmo de un cociente, la expresión anterior puede escribirse tal como la conocemos:

$$pH = \log(1) - \log\left(H^{+}\right) = -\log\left(H^{+}\right)$$

Si no olvidamos que el valor del pH es un logaritmo en base 10, es fácil de entender que un pH = 9 es 10 veces mas alcalino que un pH = 8, o que un pH = 6 es 10 veces mas ácido que pH=7, y que un pH=5 es 100 veces mas ácido que un pH = 7.

De este modo, si preguntamos ¿qué pH tiene el agua de un acuario? y alguien nos responde: *"Aproximadamente entre 6 y 7"*, podríamos deducir que esta respuesta demuestra la ignorancia del aficionado sobre la dimensión e importancia de este parámetro. Pensemos que si el agua es ligeramente ácida, con pH entre 7,0 y 6,8, la mayoría de los peces de río lograrían vivir en ella. Si el pH es menor de 6,8, no son muchos los peces que viven en este tipo de agua. Sin embargo, los seres que habitan grandes lagos y los animales marinos son prácticamente inflexibles en su relación con el pH debido a la gran estabilidad de los parámetros químicos de sus aguas de origen[4].

Conclusión

Los logaritmos surgieron de una idea muy simple y aún hoy siguen siendo un instrumento importante, tal vez modesto, pero esencial para el conocimiento científico. No obstante, adherimos a las palabras de Martínez Negrete (2004) cuando expresa que:

> Muchas veces enseñando Matemáticas, el alumno pregunta al profesor para qué le sirven, por ejemplo, los logaritmos. Es difícil responder satisfactoriamente a la mayoría de las personas esta válida inquietud. El maestro teme reconocer que en términos estrictamente prácticos y cotidianos, saber de logaritmos es tan inútil como entender alguna revolución o conocer el ciclo de Krebs. Sin embargo estos conocimientos son vitales para comprender la realidad, y frente a las problemáticas de la existencia tener mejores enfoques y herramientas de análisis para su solución. (p. 4)

A su vez, desde los lineamientos curriculares se enfatiza la necesidad de que los alumnos adquieran esquemas de conocimiento que les permitan ampliar su experiencia dentro de la esfera de lo cotidiano y accedan a sistemas de mayor grado de integración. En este sentido, creemos que la Historia de la Matemática se constituye en un valioso aliado para abordar los logaritmos, pues muestra cómo un proceso de construcción humana, lento y laborioso, con contribuciones diversas, se fue liberando poco a poco de la experiencia sensible tendiendo a una mayor generalidad, unidad y armonía.

[4] Fuente: http://www.mundoacuariofilo.org/portal/

Bibliografia

- Abrate, R., Pochulu, M. & Vargas, J. (2006). Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo. Villa María: Universidad Nacional de Villa María.
- Lefort, X. (2001). "Historia de los logaritmos: Un ejemplo del desarrollo de un concepto en matemáticas". Proyecto Penélope: Documentos de Historia de las Ciencias. Disponible en Internet: http://nti.educa.rcanaria.es/penelope/es_conflefort.htm
- Martínez Negrete, R. (2004). "Matemáticas: su enseñanza en el placer". En: Ciencia Abierta. Vol. 23, (CA-23-electrónica). Dirección en Internet: http://cabierta.uchile.cl/revista/23/articulos/pdf/edu6.pdf
- Schoenfeld, A. (1985). Ideas y tendencias en la resolución de problemas. Madrid: M.E.C.

Raquel Susana Abrate. Es profesora en Matemática y Computación, y Licenciada en Pedagogía de la Matemática por la Universidad Blas Pascal (Argentina). Docente de Matemática del nivel medio, superior no universitario y universitario. Sus investigaciones actuales se centran en: La resolución de problemas en la formación de profesores y el uso de metáforas en el discurso docente. Contacto: Chile 280, Villa María, Córdoba (Argentina).
E-mail: raquelsabrate@arnet.com.ar

Marcel David Pochulu. Es profesor en Matemática y Computación, y Licenciado en Pedagogía de la Matemática. Además, tiene una Maestría en Docencia Universitaria y el Doctorado en Didáctica de la Matemática. Docente de Matemática del nivel medio, superior no universitario y universitario. Sus investigaciones actuales se centran en la resolución de problemas en la formación de profesores y el uso de metáforas en el discurso docente. Contacto: Colabianchi 847, Villa María, Córdoba (Argentina).
E-mail: mpochulu@arnet.com.ar