UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

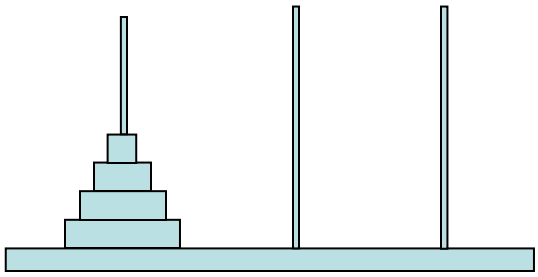
Junio de 2007, Número 10, páginas 175-181
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Se tienen tres varillas y cuatro discos de diferentes tamaños, apilados como se muestra en la figura. Los discos tienen una perforación en el centro para insertarlos en las varillas.



Se deben trasladar los cuatro discos a otra de las varillas, previamente determinada, ubicándolos en el mismo orden y respetando las siguientes reglas de juego:

1) *Un movimiento es el traslado de un disco de una varilla a otra.*
2) *Sólo se puede mover un disco a la vez.*
3) *Cada disco que se retira de una varilla debe llevarse directamente a otra varilla.*
4) *En ningún momento debe estar ubicado un disco cualquiera sobre otro de menor tamaño.*

¿Cuál es el menor número de movimientos?

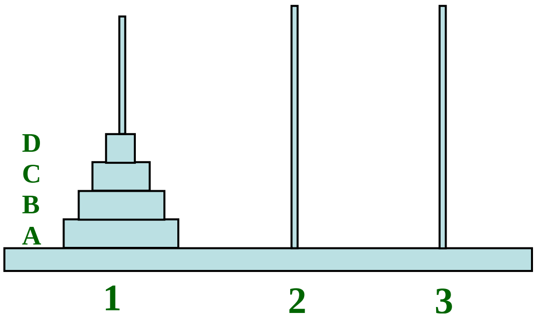
Estamos ante un antiguo problema de carácter lúdico, conocido como *Torres de Hanoi*. Se ha escrito bastante sobre este juego y se puede jugar hasta en algunas agendas electrónicas. En este artículo veremos algunos aspectos matemáticos de este interesante juego en el marco de los problemas de optimización e ilustraremos el uso de una notación adecuada en la resolución de algunos problemas.

Observemos que el problema está planteado como uno de optimización discreta, pues se pide realizar el traslado de discos en el *menor* número de movimientos y es obvio que la variable "número de movimientos" toma valores sólo en los números enteros.

Seguramente, luego de algunos intentos lograremos ubicar los cuatro discos en otra varilla, como pide el problema. Si jugamos tratando de minimizar el número de movimientos, posiblemente llegaremos a un número de movimientos que consideraremos es el mínimo. Sin embargo, ¿cómo estar seguros que tal número es el mínimo? Una posibilidad es examinar todos los casos y convencernos que nuestra secuencia de movimientos es la que tiene el menor número de elementos. Para ello puede ser muy útil un diagrama de árbol que nos vaya mostrando todas las posibilidades. Con ese propósito adoptamos una notación:

Notación

1. A las varillas las llamaremos 1, 2 y 3
2. Llamaremos A, B, C y D a los discos, considerando que A es el más grande y que los otros tienen tamaños decrecientes, siguiendo el orden alfabético



3. Usaremos ternas ordenadas para representar el conjunto de discos que hay en cada varilla, antes o después de cada movimiento.
4. La varilla en la que inicialmente están los discos es la 1 y la varilla a la que se desea hacer el traslado es la 3.
5. La situación inicial del juego propuesto queda descrita por la terna.

$$(ABCD,\ \Phi,\ \Phi)$$

que indica que los cuatro discos están en orden decreciente en la varilla 1 y que en las varillas 2 y 3 no hay disco alguno (un conjunto vacío de discos).

Con la notación adoptada, en un diagrama de árbol, con el punto inicial especificado, tendríamos dos posibles situaciones siguientes:

$$(ABCD,\ \Phi,\ \Phi) \begin{cases} (ABC,\ D,\ \Phi) \\ (ABC,\ \Phi,\ D) \end{cases}$$

Así podemos desarrollar el árbol completo, pero es fácil imaginar que será muy frondoso.

Diversos casos

La notación adoptada nos puede servir para mostrar fácilmente todos los movimientos posibles cuando tenemos menos discos; así, si llamamos *n* al número de discos, tendremos:

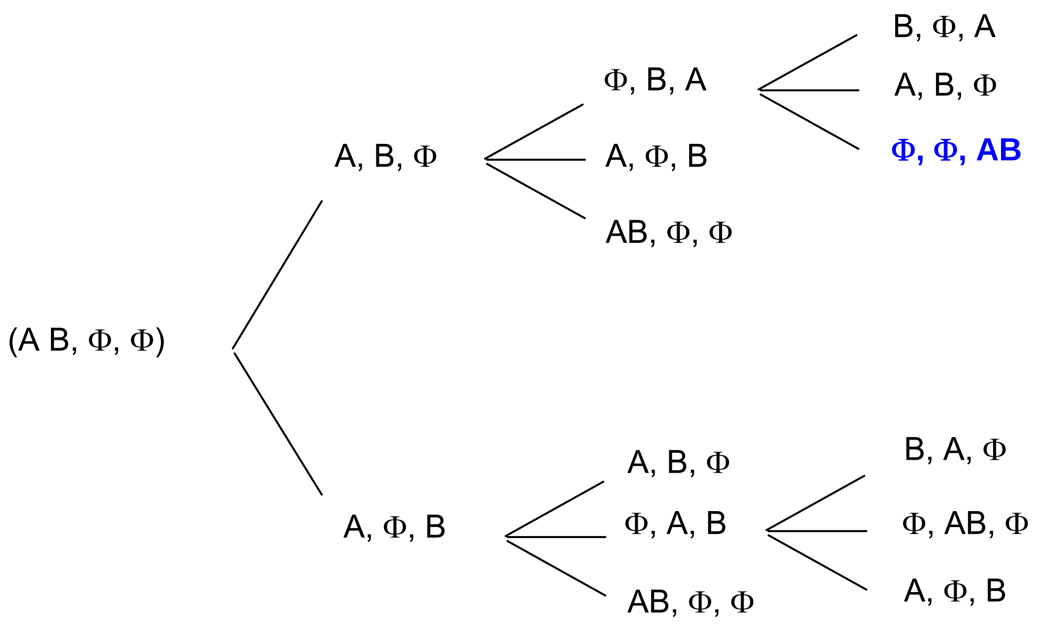
Cuando n = 1

Situación inicial: (A, Φ, Φ). Situación final buscada: (Φ, Φ, A).

Es obvio que **uno es el menor número de movimientos para trasladar un disco de una varilla a otra.**

Cuando n = 2

Situación inicial: (AB, Φ, Φ). Situación final buscada: (Φ, Φ, AB).



Se puede ver que se llega a la situación buscada en **tres** movimientos y no hay manera de hacerlo en un número menor de movimientos; así, **tres es el número óptimo de movimientos cuando se tienen dos discos.**

Observemos que los puntos de los cuales no salen ramas, ya han aparecido antes y no se continúan porque obviamente se repetiría la rama ya desarrollada y la llegada al punto deseado sería con un mayor número de movimientos.

Cuando n = 3

Situación inicial: (ABC, Φ, Φ). Situación final buscada: (Φ, Φ, ABC).

Es claro que para trasladar tres discos, tenemos que trasladar también dos discos. Como ya tenemos una forma óptima de trasladar dos discos, usemos esa forma para trasladar dos de los tres de este caso. Usamos tal forma para trasladar los dos discos más pequeños – B y C -, considerando el disco A como “piso” de esta torre de dos discos.

Veamos las tres etapas:

i) Consideramos BC como una torre de dos discos y la trasladamos a la varilla 2. (*3* movimientos)
ii) Trasladamos el disco A a la varilla 3. (*1* movimiento)
iii) Trasladamos la torre BC del poste 2 al poste 3, sobre el disco A (*3* movimientos)

Así se realizan en total *3* + *1* + *3* = ***7*** movimientos

Con este análisis, podemos afirmar entonces que **siete es el número mínimo de movimientos para trasladar 3 discos** de una varilla a otra, siguiendo las reglas establecidas, aun sin haber efectuado los movimientos específicos. El carácter de óptimo queda justificado por haber hecho uso solamente del número óptimo de movimientos (tres) para trasladar dos veces 2 discos (B y C) y una vez del número óptimo de movimientos (uno) para trasladar 1 disco (A). Podemos decir que el problema de trasladar 3 discos lo hemos convertido en tres subproblemas, cada uno de los cuales ha sido resuelto óptimamente, y esto garantiza que el problema también se ha resuelto óptimamente[1]. Esto es consistente con un principio mucho más general de la programación dinámica, conocido como el principio de optimalidad de Bellman.

Si hacemos un diagrama de árbol usando la notación adoptada, veremos claramente que con la secuencia óptima de movimientos se tienen las siguientes situaciones:

(ABC, Φ, Φ); (AB, Φ, C); (A, B, C); (A, BC, Φ);

(Φ, BC, A); (C, B, A); (C, Φ, AB); (Φ, Φ, ABC)

Se pueden distinguir los **siete** movimientos y las etapas (i), (ii) y (iii)

[1] Otra posibilidad sería considerar que la torre de dos discos está formada por los discos A y B, pero se ve fácilmente que así no tenemos los tres subproblemas con soluciones óptimas y que se emplean más de 7 movimientos.

Cuando n = 4

Siguiendo el mismo razonamiento, ya podemos responder a la pregunta del problema planteado, y sin necesidad de realizar los movimientos específicos:

Necesitamos 7 movimientos para trasladar la torre de tres discos (B, C y D) a la varilla 2, luego 1 movimiento para trasladar el disco A a la varilla 3 y finalmente otros 7 movimientos para trasladar la torre de tres discos de la varilla 2 a la varilla 3, sobre el disco A. Así, el mínimo número de movimientos que se necesita para trasladar los cuatro discos de la varilla 1 a la varilla 3 es

$$7 + 1 + 7 = \mathbf{15}$$

El lector queda invitado a hacer la verificación empírica, jugando con los discos.

Generalización

Llamemos ***M(n)*** al menor número de movimientos que se requieren para trasladar una torre de *n* discos de un poste a otro determinado. Luego del análisis hecho hasta ahora, es lógico concluir que para trasladar *n* discos de la varilla 1 a la varilla 3, en el menor número de movimientos, se procederá como sigue:

i) Considerar el disco más grande como piso de una torre de n-1 discos y trasladar esta torre a la varilla 2. (**M(n-1)** movimientos)
ii) Trasladar el disco más grande a la varilla 3. (**1** movimiento)
iii) Trasladar la torre de n-1 discos de la varilla 2 a la varilla 3, sobre el disco más grande ya trasladado (Otros **M(n-1)** movimientos)

Así se realizan en total $2M(n\text{-}1)+1$ movimientos y tenemos la expresión recursiva

$$\boldsymbol{M(n) = 2\,M(n-1) + 1,\ \text{ para todo entero } n > 1, \text{ con } M(1) = 1} \qquad (\mathbf{1})$$

Determinemos ahora una expresión general para $M(n)$, pues (**1**) sólo nos da una expresión en términos de $M(n\text{-}1)$.

- ***Una forma de obtener M(n):***

$$M(1) = 1$$

$$M(2) = 2\,M(1) + 1 = 2\,(1) + 1 = 2 + 1$$

$$M(3) = 2\,M(2) + 1 = 2\,(2 + 1) + 1 = 2^2 + 2 + 1$$

$$M(4) = 2\,M(3) + 1 = 2(2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$

En general,

$$M(n) = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1$$

Y observando que tenemos la suma de una progresión geométrica cuya razón es 2,

$$\boldsymbol{M(n) = 2^n - 1}$$

- ***Otra forma de obtener M(n):***

La expresión anterior también la podemos obtener empleando el método general de resolución de ecuaciones en diferencias de primer orden, no homogéneas, con coeficientes constantes y condición inicial dada, pues la relación establecida en (**1**) es un caso particular de este tipo de ecuaciones.

Usamos la notación habitual al trabajar con ecuaciones en diferencias: escribimos $M(n) = x_n$, y reescribimos (**1**):

$$x_{n+1} - 2x_n = 1, \text{ con } x_1 = 1 \qquad (\mathbf{1'})$$

La solución general de la ecuación homogénea correspondiente es

$$(x_n)_h = K\,2^n\,,$$

donde K es una constante por determinar.

La solución particular de la ecuación dada es

$$(x_n)_p = -1$$

La solución general de (**1’**) es, entonces

$$x_n = K\,2^n - 1$$

Usando la condición inicial $x_1 = 1$, obtenemos que $K = 1$, y en consecuencia, la solución de (**1’**) es

$$\boldsymbol{x_n = 2^n - 1},$$

que es la misma expresión que obtuvimos de (**1**) usando la suma de una progresión geométrica.

Observaciones

a) Suele ocurrir que obteniendo experimentalmente que con 1 disco el número de movimientos es 1, con 2 discos es 3, con 3 discos es 7 y con 4 discos es 15, ya se afirma que con *n* discos el número mínimo de movimientos es $\mathbf{2^n - 1}$. Esto es interesante y revela una capacidad de intuir una fórmula general; sin embargo sólo es una conjetura y habría que probar la validez de esta fórmula para todo valor entero positivo de n.

b) También podemos demostrar que $\boldsymbol{M(n) = 2^n - 1}$ usando el método de *inducción matemática*. Se requerirá usar también la conclusión ya obtenida en (1) que podemos escribir

$$M(n+1) = 2M(n) + 1 \text{ para todo entero } n > 0, \text{ con } M(1) = 1. \qquad (\mathbf{2})$$

Veamos brevemente tal demostración:

- Ya verificamos que la fórmula es válida para $n = 1$; es decir

$$M(1) = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

- Supongamos que es válida para n = h (*Hipótesis inductiva*):

$$M(h) = 2^h - 1$$

- Debemos probar que es válida para $n = h + 1$; es decir, que

$$M(h + 1) = 2^{h+1} - 1 \text{ (\textit{Tesis inductiva})}$$

- La prueba es sencilla:

$$\begin{aligned} M(h + 1) &= 2M(h) + 1 && \text{(Por (\textbf{2}))} \\ &= 2\,(2^h - 1) + 1 && \text{(Por la hipótesis inductiva)} \end{aligned}$$

Luego,

$$M(h + 1) = 2^{h+1} - 2 + 1 = 2^{h+1} - 1,$$

que es lo que queríamos demostrar.