UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2006, Número 7, páginas 39 - 51
ISSN: 1815-0640

Los estudiantes proponen un problema: una posibilidad favorecida por los ambientes computacionales informatizados

Estela Torroba, Marisa Reid, Nilda Etcheverry y Mónica Villarreal

Resumen

Se presenta un relato acerca de los procesos seguidos por estudiantes al resolver un problema abierto, propuesto en el transcurso de una experiencia didáctica diseñada para estudiar las implicaciones del uso de la computadora en los procesos de pensamiento matemático de estudiantes universitarios.

Se reportan características del trabajo realizado por estudiantes y docentes en el ambiente en el cual se llevó a cabo la experiencia y algunas conclusiones vinculadas con el planteo de conjeturas que son favorecidas en los ambientes computacionales.

Abstract

This article reports about the process followed by student when solving a open-ended problem, that was proposed during an didactic experience designed to study the effect that produce the use of the computer on the process of mathematical thinking of college students.

Characteristics are reported of the work of students and teachers in the environment in which the experience took place and same conclusions related with the plant of conjectures that are favoured in the computer environment.

Introducción

En el presente trabajo reportaremos acerca de los procesos seguidos por dos estudiantes al resolver un problema abierto propuesto en el transcurso de una experiencia didáctica diseñada para estudiar las implicaciones del uso de la computadora en los procesos de pensamiento matemático de estudiantes universitarios.

La experiencia muestra que la proposición de un problema abierto (open-ended problem) de tipo exploratorio en un ambiente informatizado permite que los estudiantes se involucren en la tarea de proponer conjeturas matemáticas a partir de las respuestas visuales ofrecidas por la computadora, generando un juego de conjeturas y refutaciones donde también surgen discusiones acerca de las argumentaciones matemáticas que son consideradas válidas para probar una determinada conjetura.

En este tipo de trabajo son favorecidos dos procesos fundamentales para el aprendizaje de la matemática: la visualización y la experimentación. Por visualización entendemos el proceso de formar imágenes, sea mentalmente o con el auxilio de lápiz y papel o tecnología. Tal proceso estimula el descubrimiento matemático dando lugar a una mejor comprensión (Zimmermann & Cunninghan, 1991). Por su parte, la experimentación, asociada con la idea de ensayo y error, contribuye a la generación de conjeturas cuya validez puede ser verificada o refutada con la ayuda de la tecnología.

En la siguiente sección describiremos, sintéticamente, el grupo de estudiantes que participó del estudio, la propuesta didáctica que generó esta experiencia de aula, describiendo en detalle lo ocurrido en los dos encuentros que se realizaron con los estudiantes y reportaremos algunos episodios que nos brindan elementos para reflexionar y, finalmente, presentaremos algunas conclusiones.

El grupo de trabajo

Los alumnos participantes del estudio, Erica y Emiliano, son estudiantes de segundo año de las carreras de Profesorado en Matemática y Profesorado en Computación, respectivamente, de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa. Estos estudiantes habían cursado Análisis Matemático I durante el primer cuatrimestre de 2003 y se encontraban, al momento de participar de la experiencia, preparando el examen final de esa materia.

En oportunidad en que los alumnos acudieron a realizar consultas para corroborar sus conocimientos y aclarar conceptos, se les planteó un problema donde debían combinar varios temas vistos en la asignatura para su solución.

Según Schoenfeld, A. (1985): Los aspectos del conocimiento relevantes para el rendimiento en resolución de problemas incluyen: el conocimiento intuitivo e informal sobre el dominio del problema, los hechos, las definiciones y los procedimientos algorítmicos, los procedimientos rutinarios, las competencias relevantes y el conocimiento acerca de las reglas del lenguaje en ese dominio.

En la elección del problema se tuvo en cuenta que en el proceso de resolución se debía atender a la conexión existente entre las distintas representaciones (verbal, algebraica, numérica y gráfica) para lo cual la tecnología juega un papel fundamental.

El proceso de resolución de un problema con el uso de tecnología se centra en el alumno, es este quien tiene una responsabilidad importante en su formación, donde es preferible el trabajo en pequeños grupos y el profesor tiene un rol de facilitador, de generación de espacios de trabajo, de saber como utilizar los recursos.

El hecho de no presentarlo como un ejercicio correspondiente a un tema determinado posibilitó la puesta en juego de ideas para llegar a la solución y el reconocimiento de la aplicación de determinados conceptos.

Para la resolución del problema los alumnos utilizaron el software Derive 5 lo que posibilitó además de economizar tiempo y esfuerzo en las tareas rutinarias, un razonamiento visual que los condujo, como lo relataremos a continuación, a plantear una nueva situación.

La introducción de la computadora asigna un nuevo rol a la visualización matemática y ésta, complementada con la manipulación simbólica hace que ambas contribuyan a la comprensión matemática (Borba & Villarreal, 2005).

Fueron realizados dos encuentros de aproximadamente dos horas cada uno, donde los alumnos trabajaron en un ambiente computacional disponiendo de una computadora equipada con el software Derive 5.

La responsable del desarrollo de la propuesta didáctica fue una docente que está a cargo de la cátedra de Análisis Matemático I. Otra de las autoras de este trabajo realizó filmaciones y grabaciones de audio durante el desarrollo de los encuentros con los alumnos y confeccionó un cuaderno de registro de observaciones a fin de describir y analizar el desarrollo de las actividades, los procesos de pensamiento y las estrategias de los estudiantes.

La experiencia

En el primer encuentro se planteó el siguiente problema:

> Sea una función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx$. Hallar el coeficiente *b* en función de *a*, de manera que el área de la región encerrada por la curva y el eje de las *x* tenga un valor constante.

Al comienzo los estudiantes se muestran bastante desorientados por el enunciado del problema. La docente interviene formulando una pregunta que permita iniciar la actividad:

Docente (D): *¿Cómo se les ocurre que deben ser a y b?*

Emiliano (Em): *a tiene que ser menor que cero para que las ramas sean hacia abajo. Pero b puede ser negativo o positivo.*

Erica (Er): [poco convencida de lo expresado por Emiliano] *¿no sé por qué a debe ser menor que cero?*

Em: *Esto es para que quede una región encerrada entre la curva y el eje de las x.*

La docente sugiere el uso del software para la construcción de algunos gráficos. Los estudiantes grafican las funciones $y = -x^2 + bx$ donde b varía de –7 a 9 con un paso de 4, es decir b = -7, -3, 1, 5, y 9 (Figura 1).

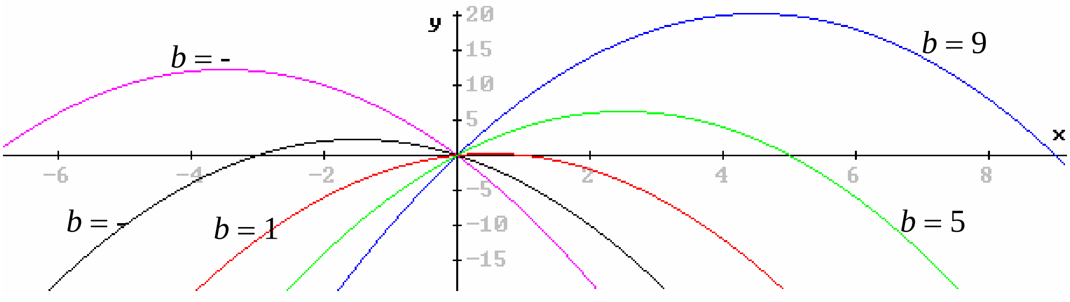

Figura 1

Los estudiantes grafican otras parábolas considerando distintos valores negativos del coeficiente *a*[1] y en cada caso variando *b*. Erica usa el comando *Zoom* para acercarse a los gráficos en el origen y se produce el siguiente diálogo entre los estudiantes:

Er: *Todas* [se refiere a las parábolas] *pasan por el origen de coordenadas.*

Em: *Sí, pero todas las parábolas cortan al eje x en dos puntos, falta averiguar el otro.*

Er: *Para eso, resolvamos la ecuación* $a\,x^2 + b\,x = 0$.

Erica manifiesta sentirse más segura haciendo los cálculos algebraicos con lápiz y papel y, luego de realizarlos acota: *"La curva va desde cero a* $\frac{-b}{a}$*"*, refiriéndose a los ceros de la función cuadrática.

Una vez realizadas estas tareas la docente retoma el problema y plantea lo siguiente:

D: *¿Qué significa que las áreas deben ser constantes?*

Obteniendo como respuesta:

[1] Cuando se analizaron los registros y las grabaciones, observamos que el planteo con el coeficiente *a* negativo restringió su solución. La docente responsable debió sugerir el análisis de la situación con a mayor que cero, lo que probablemente hubiera conducido a conclusiones interesantes.

Er: *Y…, que valga siempre lo mismo, por ejemplo 3.* [...] *¿El área bajo la curva era la integral, no?*

Em: *Sí, pero acordáte que sólo cuando la función es positiva…. Nos falta ver entre qué límites debemos integrar, pero en principio consideremos a negativo y b positivo.*

D: *¿Por qué hacen esa consideración?*

Em: [Señalando las gráficas mostradas en la figura 1], *según que b sea positivo o negativo los límites de integración cambiarán.*

Convencidos que el área la pueden plantear a partir de una integral definida, cuyos límites de integración son las raíces anteriormente calculadas, escriben: $\int_0^{-b/a} (ax^2 + bx)\,dx$ y de acuerdo a lo planteado por Erica, igualan esa expresión a 3.

Emiliano propone resolver la integral usando el software, el cual permite calcular integrales definidas con límites de integración no numéricos, y obtiene como resultado: $\frac{1}{6}\frac{b^3}{a^2}$.

Despejando *b*, en función de *a*, de la ecuación $\frac{1}{6}\frac{b^3}{a^2} = 3$ resulta

$$\boxed{b = 18^{1/3}\, a^{2/3}}$$

Es importante destacar que esa expresión ya está dando respuesta al problema planteado, al menos para el caso particular donde el área sea 3.

A continuación mostraremos el trabajo exploratorio de los estudiantes lo cual merece ser destacado ya que proporciona evidencias acerca del tipo de actividad que favorece el ambiente computacional. Los estudiantes profundizan y van más allá en la exploración.

Después de obtener la expresión de b en función de a, de manera que el área encerrada por cada una de las parábolas $y = a\,x^2 + 18^{1/3}\, a^{2/3} x$ y el eje x sea 3, realizan las gráficas de estas funciones cuadráticas para distintos valores negativos de *a*, lo cual se muestra en la Figura 2.

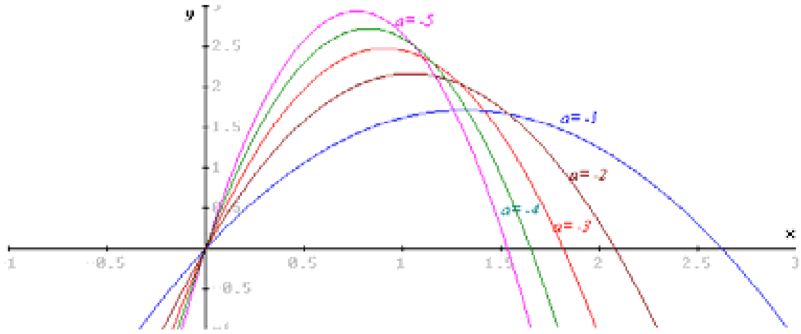

Figura 2.

Observando las gráficas, los estudiantes comentan:

Em: *Para que el área sea siempre la misma, cuando la base* [se refiere a la distancia entre las raíces de cada parábola] *aumenta, la altura* [se refiere a la ordenada del vértice de cada parábola] *debe disminuir*.

Er: *Claro, para que el área de la región encerrada sea constante es necesario que cuando la raíz* [se refiere a la raíz no nula] *crece, la ordenada del vértice decrezca*, [sobre su hoja de trabajo realiza el gráfico que se muestra en la Figura 3]

Figura 3

La docente trata de interpretar las producciones de los alumnos y retomando la afirmación de Erica, pregunta: *Cuándo la raíz, de la que hablan Uds., crece: ¿qué sucede con la abscisa del vértice?*

Er: *"como la raíz aumenta, entonces la abscisa del vértice también aumenta"*

La profesora rescatando la relación que los alumnos establecían entre las coordenadas del vértice les propone que las marquen sobre las parábolas para que confirmen o desechen la hipótesis que están sosteniendo.

Para poder obtener las coordenadas del vértice Erica prefiere expresar la ecuación en forma canónica, por lo que completando cuadrados, en su hoja de cálculos, obtiene $\mathbf{y}=\mathbf{a}\left(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}\right)^{2}+\frac{\mathbf{b}^{2}}{\mathbf{4(-a)}}$ y expresa las coordenadas del vértice de la forma: $V=\left(-\frac{b}{2a};-\frac{b^{2}}{4a}\right)$.

Emiliano, quien está frente al teclado de la computadora, introduce la expresión hallada por Erica (para las coordenadas del vértice) y sustituye b por el valor $b=18^{1/3}\ a^{2/3}$, obteniendo la expresión:

$$\left(-\frac{18^{\frac{1}{3}}\ a^{\frac{2}{3}}}{2\,a};-\frac{\left(18^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{2}}{4\,a}\right).$$ [2]

Posteriormente marca los vértices sobre las parábolas mostradas en la Figura 2, (Figura 4)

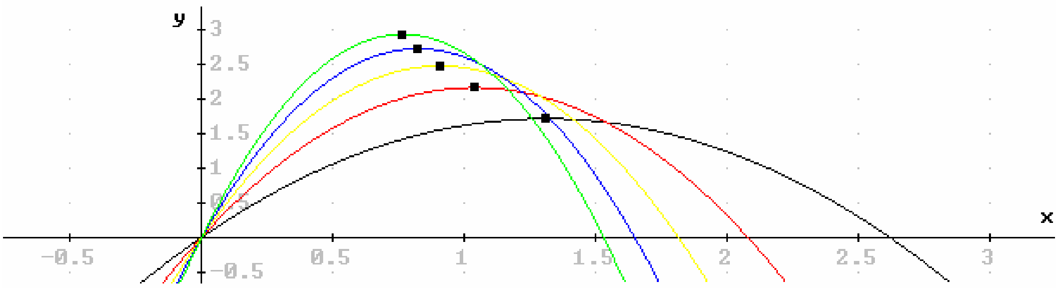

Figura 4

La docente interviene diciendo:

D: *Entonces ¿se cumple que cuando la base aumenta la altura debe disminuir?*

Er: *Sí, en realidad cuando aumenta la abscisa del vértice disminuye su ordenada.*

A pedido de Erica, Emiliano grafica una familia de parábolas haciendo variar a entre 0.25 y 10 con un paso de 0.25 y sobre ellas los vértices.

---

[2] A sugerencia de la docente fue necesario elegir la preferencia de simplificación ***Any*** (Definir-Preferencia de simplificación) que permite controlar las simplificaciones de las expresiones matemáticas, por ejemplo, simplifica expresiones del tipo $\left(\mathbf{x}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\mathbf{x}$ en lugar de $|x|$ si el signo de *x* es desconocido ya que pensamos que la simplicidad de las notaciones resultarían más familiares.

[Silencio, mientras observan el gráfico en la computadora (Figura 5). Finalmente Emiliano propone:]

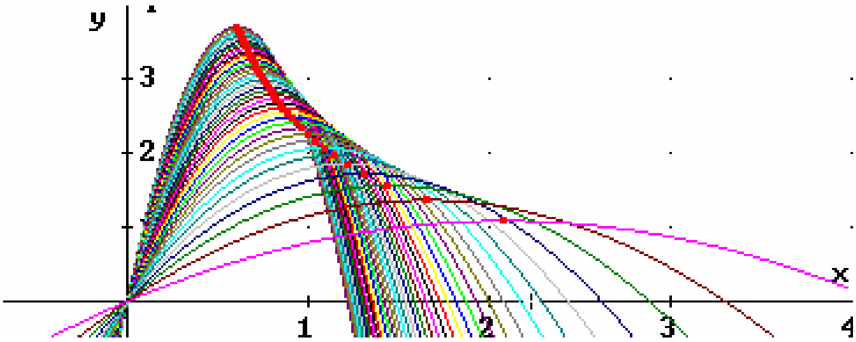

Figura 5

Em: *Hasta podríamos encontrar la ecuación de esa curva.*

Er: *¿De cuál?*

Em: *De la curva que pasa por todos los vértices*

[Silencio]

Er: [anotando (x ; y)] *Tenemos que encontrar una función f(x) donde x sea la abscisa del vértice,* $\mathbf{y = f(x)}$ *la ordenada.*

Erica, busca entre sus anotaciones y comienza trabajar con la expresión de las coordenadas del vértice: $\mathbf{V = \left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{b^2}{4a} \right)}$, aunque anteriormente Emiliano había logrado una expresión de las coordenadas sólo en función de a y a partir de allí obtener la figura 4.

Es importante destacar en este momento del relato de la experiencia que los estudiantes visualizando las gráficas pudieron anticipar la existencia de una curva que une los vértices de las parábolas, surgiendo de esta manera un nuevo problema propuesto por ellos y que va más allá del problema original.

Los estudiantes tenían la conjetura de que el gráfico de la función que buscaban, relacionando xv e yv bajo las condiciones establecidas, era una rama de hipérbola, sin embargo no conseguían determinar la ecuación de ésta. La docente decide intervenir:

D: *¿Cuál es la expresión de la coordenada x?*

[Silencio]

Em: *x debe ser* $-\frac{b}{2a}$

D: *Ahora, la idea es encontrar la coordenada y en función de x*

Er: *Como* $b = 18^{1/3}\, a^{2/3}$ *podemos escribir x* [se refiere a xv] *sólo en función de a. Con el auxilio del software sustituyen la variable b y obtienen*: $x = -\frac{18^{1/3}}{2 \cdot a^{1/3}}$.

Em: *y* [se refiere a yv] *debe ser* $-\frac{b^2}{4a}$, *podríamos hallar y [del vértice] en función de a.* Para ello usando el comando Sustituir encuentran $y = -\frac{3 \cdot 12^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{4}$.

Er: Pero necesitamos escribir y en función de x. Usando el comando “Resolver” obtiene $a = -\frac{9}{4 \cdot x^3}$

Em: *Claro, sustituyendo encontraríamos la ecuación de la función que estamos buscando.* Usando el software arriban a la función $f(x) = \frac{9}{4x}$.

Posteriormente realizan el gráfico de la función hiperbólica que acaban de determinar (Figura 6)

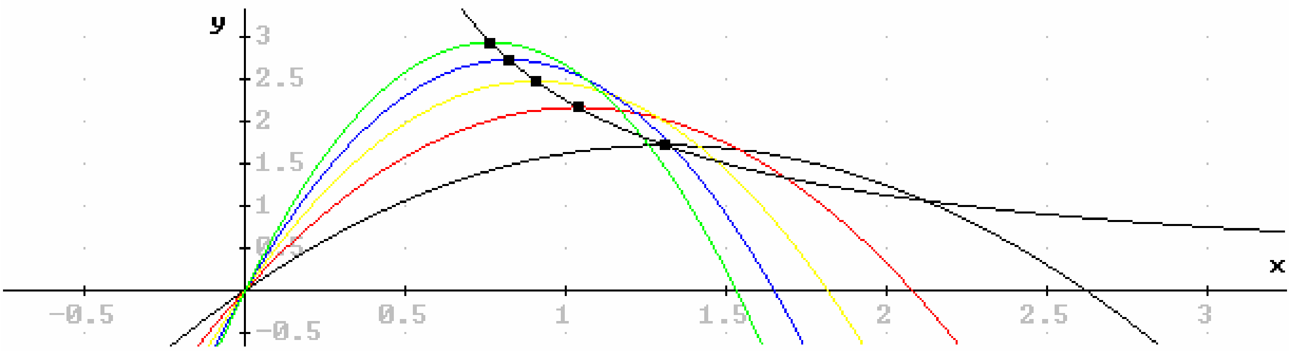

Figura 6

Observan que el gráfico de la función es una hipérbola pero en la pantalla sólo se ve una sola de sus ramas. Cambiando la escala del gráfico aparece la otra rama. Esta última actividad puso el punto final al primer encuentro.

En el segundo encuentro se retoma el problema planteado. La docente recuerda que Emiliano había manifestado que b podía tomar valores positivos o negativos, entonces propone que analicen la situación cuando b toma valores negativos. Los estudiantes recuerdan que en los gráficos realizados en el encuentro anterior mostrados en la Figura 1, las parábolas $\mathbf{y=-x^2+bx}$ se desplazan hacia la izquierda cuando b toma valores negativos.

Continúan la exploración del problema planteado originalmente pero ahora considerando tanto a como b negativos y las raíces son en este caso $-{}^{\mathbf{b}}\!/\!_{\mathbf{a}}$ y $\mathbf{0}$. A partir de esa observación plantean la integral que les permitirá calcular el área buscada:

$$\int_{-b/a}^{0}\left(ax^2+bx\right)dx$$

Nuevamente acuerdan que el área constante sea igual a 3. Repiten la estrategia ya usada para obtener b en función de a, resultando en este caso

$$b=-18^{1/3}\,a^{2/3}$$

Para corroborar lo hallado deciden graficar la familia de parábolas $\mathbf{y=ax^2-18^{1/3}\,a^{2/3}\,x}$ asignado a a los valores negativos –10, -8, -6, -4, -2 (Figura 7) .

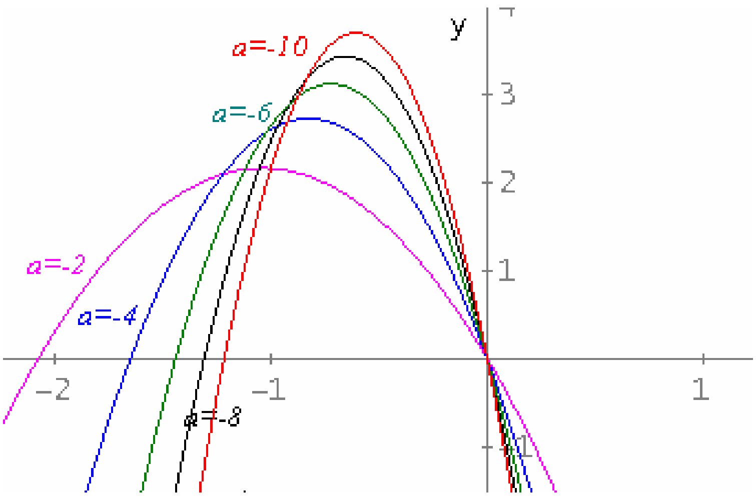

Figura 7

A continuación deciden marcar los vértices de las parábolas ya graficadas y posteriormente grafican la función $\mathbf{f(x)=-\dfrac{9}{4x}}$ ya que consideran que si b era negativo, entonces la función que pasa por los vértices de esas parábolas debe cambiar también su signo. Esta conjetura fue confirmada a través de la visualización del gráfico correspondiente (Figura 8), estableciendo de esta manera que los vértices se encuentran sobre una rama de la hipérbola.

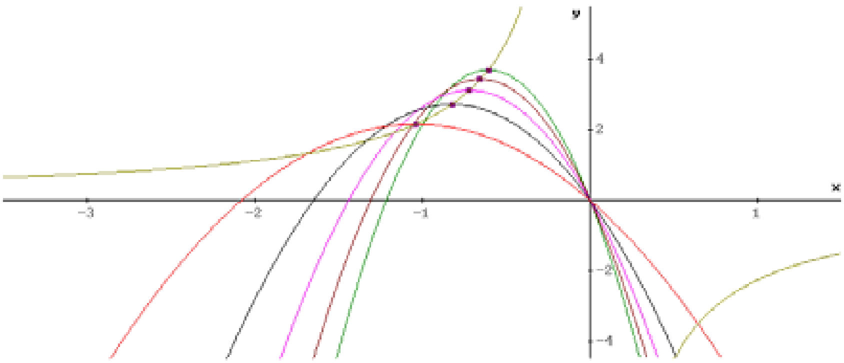

Figura 8

Finalmente la docente les pide que realicen la generalización del problema.

Introduciendo un valor constante k para el área, los estudiantes logran expresiones generales tales como:

$$\mathbf{y = a\,x^2 + \left(6 \cdot a^2 \cdot k\right)^{1/3}\,x}$$

para las funciones cuadráticas y

$$\mathbf{f(x) = \frac{3\,k}{4x}}$$

para una de las ramas de la función que pasa por los vértices de las parábolas en el caso que b sea positivo.

La generalización del problema fue realizada usando el software ya que se trataba de realizar los mismos pasos que consideraron para el caso particular $\mathbf{k = 3}$, con la ventaja de la rapidez en las distintas etapas. Esta actividad se vio favorecida por la posibilidad de uso del software en la realización de cálculos simbólicos.

Conclusiones

La visualización tuvo un papel importante en el planteo de conjeturas que luego fueron verificadas gráfica y analíticamente. Según Hitt, F. (1995): *“visualizar no es lo mismo que ver. En nuestro contexto, visualizar es la habilidad para crear ricas imágenes mentales que el individuo pueda manipular en su mente, ensayando diferentes representaciones del concepto y, si es necesario, usar el papel o la computadora para expresar la idea matemática en cuestión”.*

Durante el desarrollo de la experiencia surgieron conclusiones no previstas por los docentes como la determinación de que los vértices de las diferentes parábolas se hallaban sobre una rama de hipérbola lo que muestra que trabajando en un ambiente computacional es posible que emerjan conjeturas que puedan ser verificadas.

También puede destacarse que los alumnos, para resolver el problema, recurren inicialmente a un caso particular, a partir del cual luego consiguen generalizar, mostrando un camino más inductivo que deductivo. La elección de un caso particular (área de la superficie limitada por la parábola y el eje x) permitió graficar familias de curvas que encerraban regiones de áreas constantes y la visualización de ellas los condujo a proponer un nuevo problema, la determinación de la curva que pasa por los vértices de esas parábolas.

En este trabajo se observa el planteo de conjeturas, de lo más variadas que luego, por iniciativa de los alumnos o del docente son retomadas y dan lugar a nuevos resultados que en este caso fueron totalmente inesperados.

La tecnología es una ayuda para resolver problemas. Los estudiantes deciden cuando usarla y cuando no, y lograr así un equilibrio entre el uso de la tecnología y la forma tradicional de trabajar con lápiz y papel. En esta experiencia se observó a los alumnos alternar entre ambas formas de trabajo ya sea que en una lograban más seguridad que en otra o para controlar los resultados obtenidos de una u otra forma.

El problema propuesto podría haberse resuelto sin recurrir a la computadora, solamente usando lápiz y papel. Usar el software amplió la gama de manipulaciones posibles y de visualizaciones, favoreciendo la exploración de temas matemáticos y la formulación de conjeturas, provocando la reflexión y el razonamiento matemático permitiendo la formulación y resolución de un nuevo problema.

Este resultado difícilmente hubiese surgido sin recurrir a la tecnología. Por medio de la construcción de gráficos los estudiantes revalidan constantemente sus hipótesis y conjeturas.

Bibliografía

- F. Hitt (1995): “Intuición Primera Versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el paso de una Representación Gráfica a un Contexto real y Viceversa”, Revista Educación Matemática. Vol. 7 No 1, Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- F. Hitt (2003): “Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología”, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X No 2, Venezuela.
- M. Borba (1999): Tecnologias informáticas na Educação Matemática e reorganização do pensamento. In Bicudo (Ed.) Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas, São Paulo: Editora UNESP.

- M. Borba; M. Villarreal (2005): Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking. Mathematics Education Library .Springer, United States of America.
- A, Schoenfeld (1985) Mathematical Problem Solving New York: Academic Press.
- W. Zimmermann, S. Cunningham (1991): Editor`s introduction: what is mathematical visualitation? In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S.(Eds) Visualization in teaching and learning mathematics.

Torroba, Estela, Santa Rosa (1950). Profesor de Matemática y Física Universidad Nacional de La Pampa. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. (Argentina). Dirección Postal: Independencia 329. Santa Rosa, (6300), La Pampa, Argentina
estelat@exactas.unlpam.edu.ar

Reid, Marisa, Sansinena (Pcia. Bs. As) (1966). Licenciada en Matemática. . Universidad Nacional de La Pampa. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. (Argentina). Dirección Postal: José Luro 1359 Santa Rosa, (6300), La Pampa, Argentina.
mareid@exactas.unlpam.edu.ar

Etcheverry, Nilda, Santa Rosa (1954). Magíster en Didáctica de la Matemática. Universidad Nacional de La Pampa. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. (Argentina). Dirección Postal: Avda Argentino Valle 623 Santa Rosa, (6300), La Pampa, Argentina.
nildae@exactas.unlpam.edu.ar

Villarreal, Mónica, Doctora en Educación Matemática. Universidad Nacional de Córdoba. Facultad de Ciencias Agropecuarias. (Argentina). Dirección Postal: Av. Cornelio Saavedra 3113, Barrio Granadero Pringles, (5008) Córdoba, Argentina.
mvilla@agro.uncor.edu