UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2006, Número 5, páginas 23 - 35
ISSN: 1815-0640

Desde la cuadratura de polígonos a ecuaciones de segundo grado

Carmen Galván Fernández

Resumen

Mostramos una forma de resolver en el aula dos cuestiones: "¿Tienen el mismo perímetro los rectángulos de la misma área?" y "Dado un cuadrado construir geométricamente rectángulos equivalentes" Este proceso nos conduce hacia la resolución geométrica de ecuaciones de segundo grado.
El uso de un programa de geometría interactivo facilita las construcciones, la visualización y la generación de nuevas ideas.

Abstract

We show a way to solve in classroom two questions: "Have equivalent rectangles the same perimeter?" and "Given a square to make geometric construction of equivalent rectangles". This process guides us to solve quadratic equations through geometric method.
The use of an interactive geometry program facilitates constructions, visualisation and generation of new ideas.

Introducción

Con este trabajo continuamos "Cuadratura de polígonos", artículo que fue publicado en el nº 1 de esta revista. En él hicimos la propuesta del estudio de dos cuestiones:

- ¿Es igual el perímetro de todos los rectángulos que tienen igual área?
- Dado un cuadrado, construir geométricamente rectángulos equivalentes

Nuestro propósito, en principio, sólo fue transmitir la forma que nos parecía adecuada para resolverlas en el aula. Pero en el camino fueron saliendo a la luz relaciones entre contenidos matemáticos que nunca antes habíamos sospechado, que despertaron nuestro interés por seguir aprendiendo: la determinación de un rectángulo concreto entre los infinitos que tienen igual área se hace posible al fijar su perímetro; es decir, nos tropezamos sin querer con una ecuación de segundo grado (conocemos el producto y la suma de dos números, ¿cuáles son estos?). Teníamos ante nuestra vista la solución geométrica y no íbamos a pasar por ella sin mirarla…Con su estudio completaremos el trabajo.

Así que, a partir de la resolución del problema de encontrar el cuadrado equivalente a un polígono, hemos llegado al estudio de la resolución de ecuaciones de segundo grado desde la geometría. Pensamos que este proceso podría utilizarse en la enseñanza como un ejemplo donde uno de los principales objetivos fuera mostrar vías de comunicación natural entre la geometría, el análisis y el álgebra, que ayuden a una mejor comprensión de las matemáticas.

Las actividades podrían trabajarse con alumnos de catorce a dieciséis años, preferiblemente en un aula donde cada uno pueda disponer de un ordenador. Mejor, quizás, con grupos reducidos. El momento más adecuado podría ser como continuación de las actividades resueltas en el trabajo anterior, "Cuadratura de polígonos", o como ampliación en el estudio de ecuaciones de 2º grado.

La utilización de un programa de geometría interactivo se hará indispensable para que estos ejercicios se puedan efectuar con la garantía de buena acogida y comprensión por parte de los alumnos. Nosotros hemos recurrido a GEUP (www.geup.net). Desde nuestro punto de vista, además de facilitar la construcción y la visualización, el uso de programas de este tipo ayuda a que podamos ofrecer en nuestra enseñanza una visión más rica, más bella, más real de las matemáticas.

Variación del perímetro de los rectángulos de igual área

Una sencilla pregunta puede abrir el debate: ¿Tienen el mismo perímetro todos los rectángulos cuya área es 12 u^2? Es normal que se escuchen voces: -¡Claro que sí! Si tienen igual área tendrán el mismo perímetro! - Hay que demostrarlo. Diremos. Bastará un solo ejemplo para aceptar la verdad: un rectángulo de 3 x 4 tiene menor perímetro que uno de 2 x 6… Pero vamos a profundizar un poco. *Estudiaremos cómo varía el perímetro de los rectángulos de igual área si varía su base x*.

Utilizaremos la gráfica de la función $y = A / x$

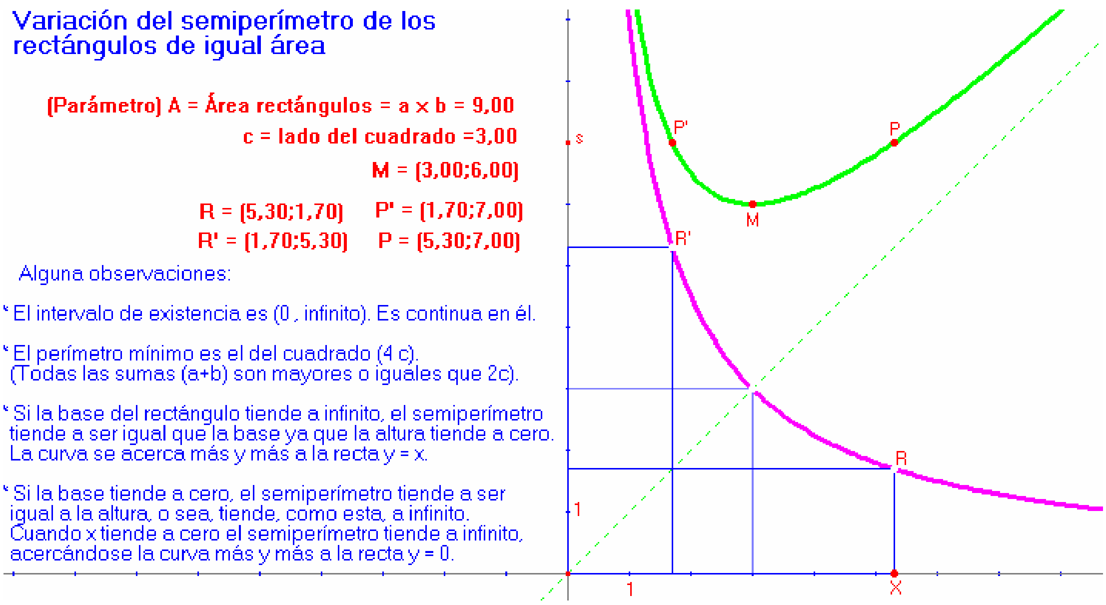


Fig.1

Esta gráfica nos proporciona una cómoda visualización de los rectángulos que son equivalentes entre sí: cada punto de ella tiene por coordenadas la base (*x*) y la altura (*y*) de un rectángulo cuya área es la misma (*A*). Tenemos cada rectángulo ante nuestra vista y será fácil fijar la atención en su perímetro. Calcularemos sólo la mitad, la suma de la base y la altura ($x + y$), y a esta suma la llamaremos "semiperímetro" (*s*). En los mismos ejes donde tenemos la gráfica de $y = A / x$ iremos representando, punto a punto, la gráfica de la función $s = x + A / x$.

Debemos dejar que los alumnos trabajen solos, que observen y extraigan sus propias conclusiones.

Finalmente, entre todos, iremos escribiendo resultados del análisis de esta variación, procurando relacionar en cada momento el lenguaje de la gráfica con el algebraico y con el geométrico.

Podemos atender al intervalo de existencia, a la continuidad, al crecimiento y decrecimiento, a las asíntotas, al punto donde se presenta el mínimo…, pero para no aburrirnos sólo nos vamos a detener ahora en una de estas observaciones:

Nos encontramos, quizás por primera vez, ante una función que presenta una asíntota oblicua. Es un buen momento para iniciar su estudio porque el apoyo de la geometría, la realidad visual, ayudará a entender el concepto. Se comprende con facilidad que cuando la base tiende a infinito la altura tiende a cero y, en consecuencia, el semiperímetro tiende a ser igual que la base. Algebraicamente, Si $x \to \infty$, el semiperímetro ($s = x + A / x$) tiende hacia el mismo infinito al que tiende x, ya que el cociente A / x tiende a cero. Observamos cómo la gráfica se acerca más y más a la recta $y = x$. El alumno empezará a familiarizarse con este tipo de comportamientos y estará mejor dispuesto a realizar, cuando llegue el momento, un estudio general y sistemático. De igual forma podemos entender que la curva se acerque cada vez más al eje vertical cuando x tiende a cero.

Todo esto se puede hacer, para un caso concreto, con papel y lápiz y en la pizarra. Pero es mejor utilizar el ordenador. En la Fig.1 podemos observar la construcción realizada con GEUP. Es importante que el alumno realice las construcciones, no dárselas hechas, porque éstas constituyen por sí mismas un ejercicio matemático. (En el Anexo explicamos los pasos fundamentales de esta construcción).

El programa, además de garantizarnos la facilidad en la construcción de las figuras, ***permite tratar de forma general el problema:*** con una sola construcción podemos disponer de las gráficas correspondientes a cualquier valor del área y ***ayuda enormemente a la visualización:*** si movemos el punto X sobre el eje de abscisas, observaremos el rectángulo que corresponde a cada uno de estos puntos y, a la vez, los correspondientes puntos R y P moviéndose, R sobre su curva la gráfica de $y = A / x$, y P sobre la gráfica de la función $s = x + A / x$. También, a la inversa, podemos mover los puntos R o P sobre sus lugares geométricos y observar los rectángulos que corresponden a cada posición. Podemos ir siguiendo así, continuamente, la variación del perímetro cuando varía la base del rectángulo.

Creemos que todo ello favorece la comprensión y la generación de nuevas ideas, tanto en los alumnos como en el profesor. Nos ha hecho pensar, por ejemplo, que podemos atraer con mayor facilidad la atención hacia el comportamiento de la función en relación con las asíntotas, como hemos explicado anteriormente, o, como veremos después, hacia la resolución gráfica de algunas ecuaciones de 2º grado…

Rectángulos equivalentes a un cuadrado

¿Cómo habíamos construido el cuadrado equivalente a un rectángulo dado?

En la figura siguiente (Fig. 2) recordamos los pasos fundamentales:

Primero observamos la equivalencia entre el rectángulo de dimensiones *a* y *b* y la diferencia de los cuadrados de lados *(a + b) /2* y *(a – b) /2*:

$$a \cdot b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

Después, el Teorema de Pitágoras nos dará el cuadrado equivalente a la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado de uno de los catetos del correspondiente triángulo rectángulo.

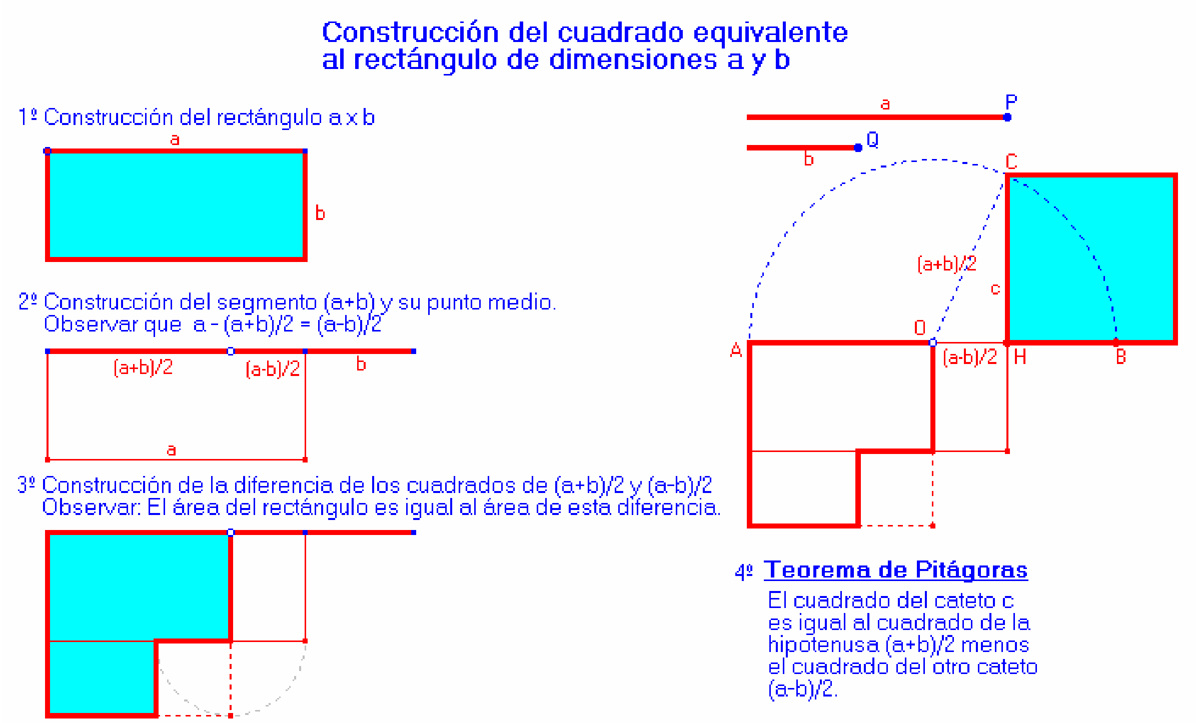


Fig.2

Nos detenemos un poco a observar la secuencia de figuras equivalentes: rectángulo – diferencia de cuadrados – cuadrado.

Es importante advertir que el diámetro de la circunferencia es la suma de la dimensiones del rectángulo, AB = $a + b$, donde a = AH y b = HB. Podemos reconocer también el Teorema de la Altura: en el triángulo rectángulo ABC, la altura c correspondiente a la hipotenusa AB es media proporcional entre a y b: $c/a = b/c$.

Pero resolver el problema inverso es lo que ahora nos interesa: ***Dado un cuadrado, queremos encontrar rectángulos equivalentes a él.***

En el aula optamos por dar al alumno la oportunidad de actuar, de pensar por sí mismo. Nuestra labor será intentar facilitar el razonamiento, hacer preguntas o reflexiones que puedan preparar la mente para el descubrimiento. Podemos ir poco a poco haciendo la clase, dialogando con nuestros alumnos:

Supongamos un cuadrado de 9 u^2 de área. Dibujémoslo. Sabemos que numéricamente es fácil encontrar todos los rectángulos equivalentes a él, de base x y altura y, a través de la función $y = 9 / x$, pero se trata de encontrar, partiendo del segmento que es el lado del cuadrado, los segmentos que serán la base y la altura de los rectángulos de forma puramente geométrica, utilizando adecuadamente una regla sin graduar y un compás. Volvamos la vista atrás y analicemos la construcción de la figura 2. Ahora tenemos que conseguir la secuencia inversa: cuadrado – diferencia de cuadrados – rectángulo.

Cada alumno ha de intentarlo, debe construir, a partir del cuadrado dibujado, una diferencia de cuadrados equivalente y el correspondiente rectángulo. Dejémosles actuar…Finalmente, cada uno (o más de uno) habrá podido conseguir un rectángulo diferente…¡Todos son válidos!

Concluimos: el problema estará resuelto desde que nos demos cuenta de que ***la clave está en el Teorema de Pitágoras*** y que el lado del cuadrado, que es uno de los catetos de un triángulo rectángulo, puede permanecer invariable para diferentes e infinitos triángulos rectángulos CHO, que podemos conseguir dejando fijo CH y moviendo el punto O a través de la horizontal (Fig. 3). ***Observamos que podemos prescindir de la construcción de la diferencia de los cuadrados*** $[(a + b)/2]^2 - [(a - b)/2]^2$ ***porque las dimensiones del rectángulo están ya determinadas: son los segmentos AH = a y BH = b.***

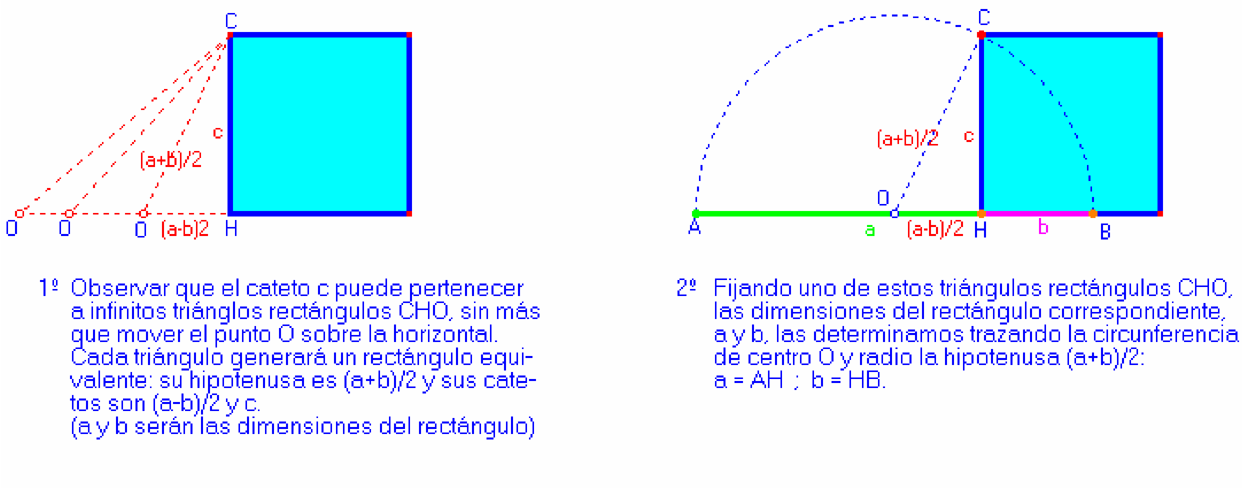
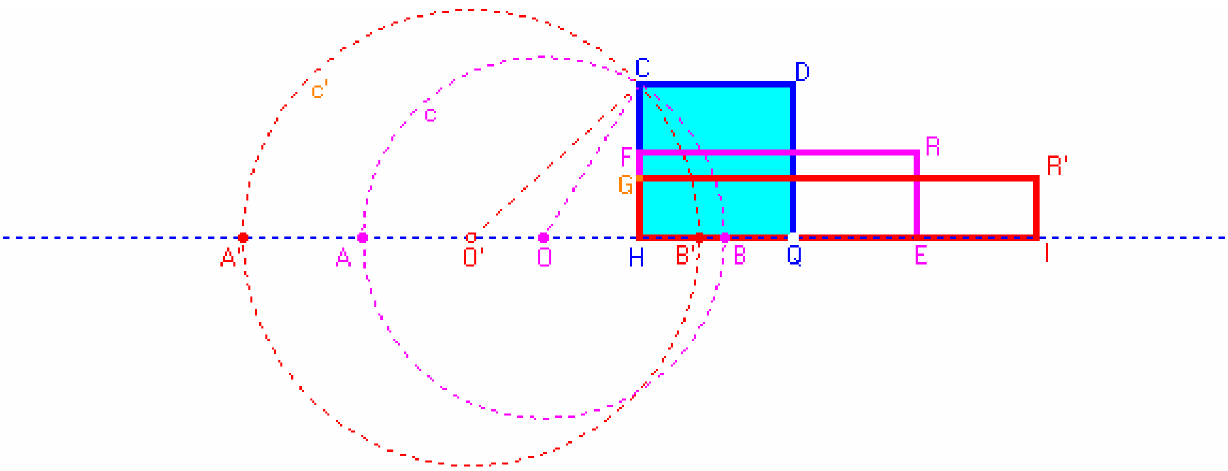


Fig.3

Nos damos cuenta de que al mover el punto O sobre la horizontal, varía con él la circunferencia de diámetro *a* + *b* (la mitad del perímetro de cada rectángulo) y se van generando los correspondientes distintos rectángulos de dimensiones *a* y *b*. Se ve con claridad: ***cada rectángulo queda determinado por su área y por su perímetro***.



Al mover el punto O sobre la horizontal se van generando los distintos rectángulos equivalentes.

Fig. 4

En la figura anterior (Fig. 4) podemos ver dos de los infinitos rectángulos equivalentes al cuadrado CDHQ: el rectángulo ERFH correspondiente al punto O y a la circunferencia c y el rectángulo IR’GH que corresponde al punto O’ y a la circunferencia c’.

Ecuaciones de 2º grado

Y fue entonces, en este proceso de formación de rectángulos de igual área, cuando llegamos a darnos cuenta de que teníamos ante nuestra vista la solución geométrica de una ecuación de 2º grado: "Cada rectángulo queda determinado por su área y su perímetro" - "Dos números *a* y *b* están determinados por su producto y su suma".

Fue entonces cuando pudimos comprender algo de cómo, según los historiadores, hace alrededor de 4000 años, los babilonios habían utilizado la identidad: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = a \cdot b$ en la resolución de sus ecuaciones cuadráticas…

El clásico y sencillo ejercicio de planteo de un sistema de ecuaciones de dos incógnitas que da origen a una ecuación de segundo grado, tantas veces propuesto para resolver de forma algebraica en nuestras clases, se nos mostraba ahora con nuevas e interesantes posibilidades didácticas… Veámoslo de forma general:

"Hallar dos números sabiendo que su suma es s y su producto es p".

Si los números desconocidos son x e y, el sistema x + y = *s* ; x · y = *p* conduce a la ecuación $x^2 - s\,x + p = 0$, que puede tener dos raíces reales: *a* y *b.*

Es evidente que el problema geométrico: **"*Encontrar las dimensiones del rectángulo conocidos su perímetro y su área*"** exige que, en la ecuación obtenida, los números *s* y *p* sean positivos, así como tienen que ser positivas las dos raíces. Pero vamos a analizar todas las posibilidades, según el signo de las raíces, para una ecuación de segundo grado completa cuyo coeficiente de x^2 sea la unidad y con *s* y *p* positivos:

1. a y b positivas: (x – a) (x – b) = 0; x2 – (a + b) x + a b = 0; x2 – s x + p = 0
2. a y b negativas: (x + a) (x + b) = 0; x2 + (a + b) x + a b = 0; x2 + s x + p = 0
3. a y b de distinto signo, (a > 0): (x – a) (x + b) = 0; x2 + (b – a) x – a b = 0, que da origen a dos ecuaciones distintas, según sea el signo de la diferencia (b–a)=d:

$|b| \rangle |a| \Leftrightarrow$ x2 + d x – p = 0 la raíz de mayor valor absoluto es negativa.

$|b| \langle |a| \Leftrightarrow$ x2 – d x – p = 0 la raíz de menor valor absoluto es negativa.

Para la resolución geométrica es fundamental distinguir qué nos indica el coeficiente de x, es decir, saber si el dato conocido es la suma (*a* + *b*) = *s* o la diferencia (*b* – *a*) = *d*. Recordemos que la determinación de *a* y *b*, geométricamente, la debemos a la aplicación del teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo de hipotenusa (*a* + *b) / 2* y catetos raíz cuadrada de (*a b*) y (*a* – *b) / 2* o (b – a) / 2. Es evidente que el signo de las raíces no lo vamos a obtener geométricamente, sino que lo debemos asignar nosotros según sea el caso que estemos resolviendo.

En las **ecuaciones de los casos 1 y 2 (**$x^2 \pm s\,x + p = 0$**)** los datos son *s* y *p*, o sea, disponemos de dos segmentos, la hipotenusa $\frac{s}{2} = \frac{a+b}{2}$ y el cateto $\sqrt{p} = c$. Tendremos que hallar el segmento que será el otro cateto $\frac{a-b}{2}$ para tener resuelta la ecuación.

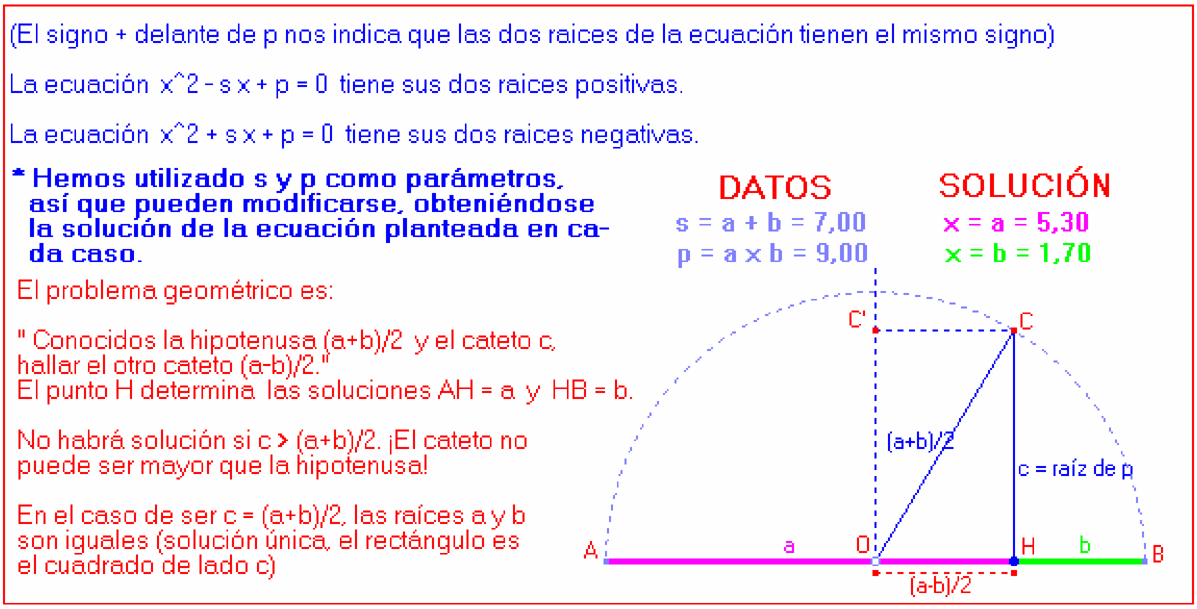


Fig.5

En la Fig. 5 observamos la construcción realizada con GEUP: Trazamos la circunferencia cuyo diámetro es el segmento AB = (a + b) = s. Sobre la perpendicular a AB en su punto medio O, marcamos el segmento OC' = lado del cuadrado cuya área es p. Al trazar la paralela a AB por C' obtenemos el punto C como intersección de ésta con la circunferencia. Con lo cual determinamos el segmento C'C = OH = cateto (a – b) / 2, que es el que queríamos encontrar.

- ¡Qué sencilla y bella la discusión geométrica de la ecuación!:

El cateto c, lado del cuadrado, no puede ser mayor que la hipotenusa (a+b)/2.

Para que la ecuación $x^2 – sx + p = 0$ tenga solución tiene que cumplirse: $\frac{s}{2} \geq \sqrt{p}$.

O lo que es igual: $s^2 \geq 4p$. Lo cual concuerda con la discusión desde el punto de vista algebraico (el discriminante de esta ecuación es $\Delta = s^2 - 4p$).

Si la hipotenusa es mayor que el cateto ($\frac{s}{2} \rangle \sqrt{p}$), la ecuación tiene dos soluciones *a* y *b,* que son las dimensiones del rectángulo equivalente al cuadrado de área *p.*

Si la hipotenusa es igual que el cateto ($\frac{s}{2} = \sqrt{\mathrm{p}}$), la ecuación tiene una sola solución, el único rectángulo posible es el cuadrado de área *p.*

- No podemos resistir, en este momento, la tentación de conectar con las funciones. ¡También disponemos del recurso gráfico para discutir y resolver la ecuación…! Observando las gráficas de la Fig.1, fijémonos en el detalle: todas las sumas posibles (a + b) son mayores o iguales que 2c (c = lado del cuadrado, que es el rectángulo de perímetro mínimo). Veamos que las coordenadas de los puntos R y R', que son las dimensiones de los rectángulos de área 9 y perímetro 7 (los vemos dibujados) corresponden a las dos soluciones a = 5,30 y b = 1,70 (o viceversa) de la ecuación $x^2 - 7x + 9 = 0$, que es la resuelta geométricamente en la Fig. 5. Con las gráficas de las funciones de la Fig.1 podemos obtener las soluciones correspondientes a las ecuaciones $x^2 \pm s\,x + 9 = 0$.

Será interesante proponer ahora una nueva investigación:

"¿Cómo varía el área de los rectángulos de igual perímetro?"…

- Veamos que ¡es posible llegar a la fórmula $x = \dfrac{\mathrm{s} \pm \sqrt{\mathrm{s}^2 - 4p}}{2}$ para resolver la ecuación $x^2 - sx + p = 0$ desde la geometría!:

Observemos la Fig.5:

Una raíz es el segmento (suma) $a = \frac{\mathrm{a+b}}{2} + \frac{a-b}{2}$ y la otra es el segmento (diferencia) $b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$ Después, el teorema de Pitágoras para hallar $\frac{a-b}{2}$ y su expresión en función de *s* y *p*:

$$x = \frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2} = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - p} = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2 - 4p}{4}} = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

De pronto, esta fórmula, que siempre habíamos considerado sólo como el resultado de una serie impecable de piruetas algebraicas que nos permitía despejar la incógnita como por arte de magia, se nos presenta ahora, bajo la luz de la geometría, con una claridad y una armonía perfectas, mostrándonos su belleza.

Sólo nos queda resolver **las ecuaciones en el caso 3**, cuando las raíces son de distinto signo ($x^2 \pm d\,x - p = 0$). En ellas los datos son *d* y *p*. Disponemos de los dos catetos $\frac{d}{2} = \frac{a-b}{2}$ y $\sqrt{p} = c$. Tenemos que encontrar el segmento $\frac{a+b}{2}$, hipotenusa del triángulo rectángulo, para tener resuelta la ecuación.

Es evidente que estas ecuaciones siempre tienen solución.

Podemos ver la construcción geométrica en la siguiente Fig. 6. El programa permite introducir los valores de *d* y *p* como parámetros. Podemos variar sus valores y obtener, de inmediato, la construcción y la solución correspondiente a la ecuación planteada en cada caso En la figura aparece la solución de las ecuaciones $x^2 \pm 3x - 10 = 0$.

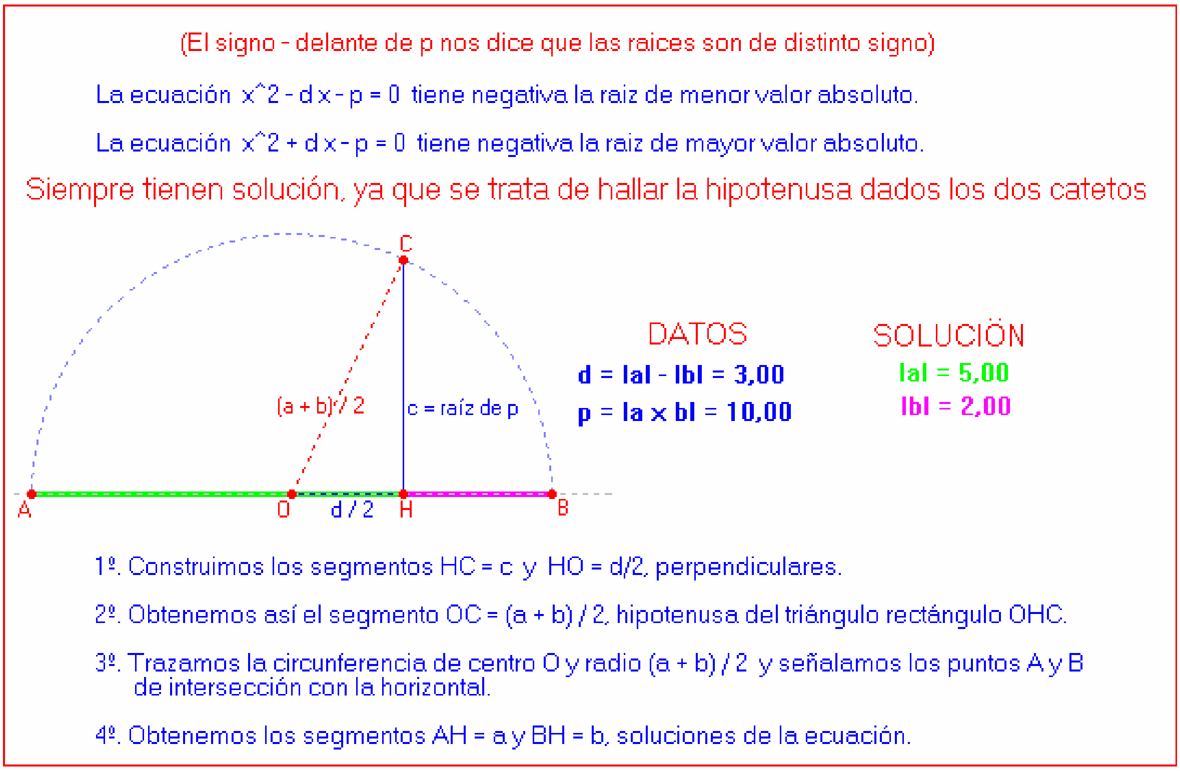


Fig.6.

Conclusión

Muchas sorpresas nos hemos encontrado:

Cuando comenzamos el estudio de la cuadratura de polígonos, nunca pensamos que nos iba a conducir a la ecuación de segundo grado. En principio, no parecía tener nada que ver una cosa con la otra. ¡Cuánta magia encerrada dentro de la fórmula fundamental $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = a \cdot b$!Cada vez le encontramos más utilidad al Teorema de Pitágoras…

A lo largo de los siglos, números y figuras han caminado unidos ayudando así a la construcción del edificio matemático. Quizás en nuestra enseñanza deberíamos intentar no separarlos demasiado, porque pensamos que unidos nos ayudan a comprender, a profundizar y a avanzar en el conocimiento.

Anexo

Construcción de la Figura 1

Nuestro objetivo es poder observar la variación del perímetro de los rectángulos de igual área aprovechando la posibilidad que nos ofrece el programa de reunir en la construcción el aspecto geométrico, el numérico y el gráfico y, lo que es muy importante, tratar el problema de manera general.

Tratar de forma general el problema significa, por una parte, que lo podamos tener resuelto para cualquier valor del área y, por otra, que para un valor concreto del área podamos disponer de todos los correspondientes rectángulos equivalentes y poderlos visualizar.

Mostraremos dos formas de construcción del problema (Construcción 1 y Construcción 2) que son esencialmente distintas.

La que aparece en el texto como Fig. 1 corresponde a la Construcción 1.

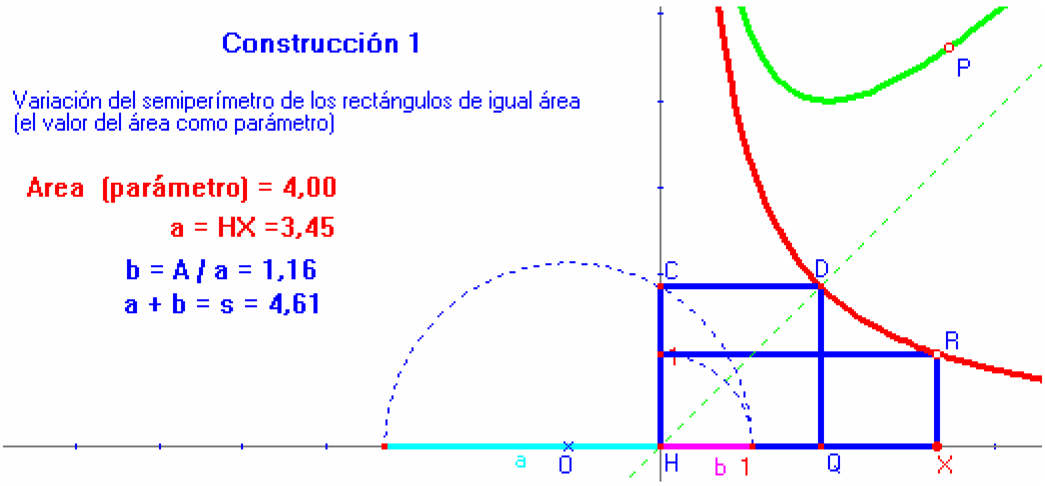


Fig.7

1. En esta construcción (Fig. 7) la generalización en el valor del área la hemos conseguido utilizando su valor como un parámetro que se puede modificar,

sobre el cual el programa basará sus posteriores cálculos. Para otro valor diferente que nos interese nos proporcionará la construcción final correspondiente.

2. Para un determinado valor del área (en la figura anterior es Área = 4), los diferentes rectángulos equivalentes se irán generando al mover el punto X (en la figura aparece en rojo) sobre el semieje horizontal positivo. Cada posición de X nos da el valor de la base (HX = a) y, para cada valor de ésta, el correspondiente valor de la altura lo conseguimos utilizando la función y = A / x, esto es: el programa calculará el valor de la altura (y) para cada valor de la base (x) a través de esta fórmula. Construimos el rectángulo que corresponde a una posición de X (el que aparece en la figura es de base a = 3´45 y altura b = 1´16) y esta construcción quedará ligada a este punto, pudiéndose visualizar la variación de los rectángulos al variar X, que era lo que pretendíamos.
3. El punto P es el de coordenadas (x , x + A / x), así que el movimiento de X producirá el movimiento de los puntos R y P. Las gráficas de las funciones y = A / x y s = x + A / x son, respectivamente, los lugares geométricos de los puntos R y P cuando se mueve X.
4. El cuadrado equivalente a los rectángulos se ha construido geométricamente con la intención de poder observar que permanece estable al variar X, además de corresponder al perímetro mínimo. El cuadrado cambiará cuando cambie el valor del área.

<u>Construcción 2</u>

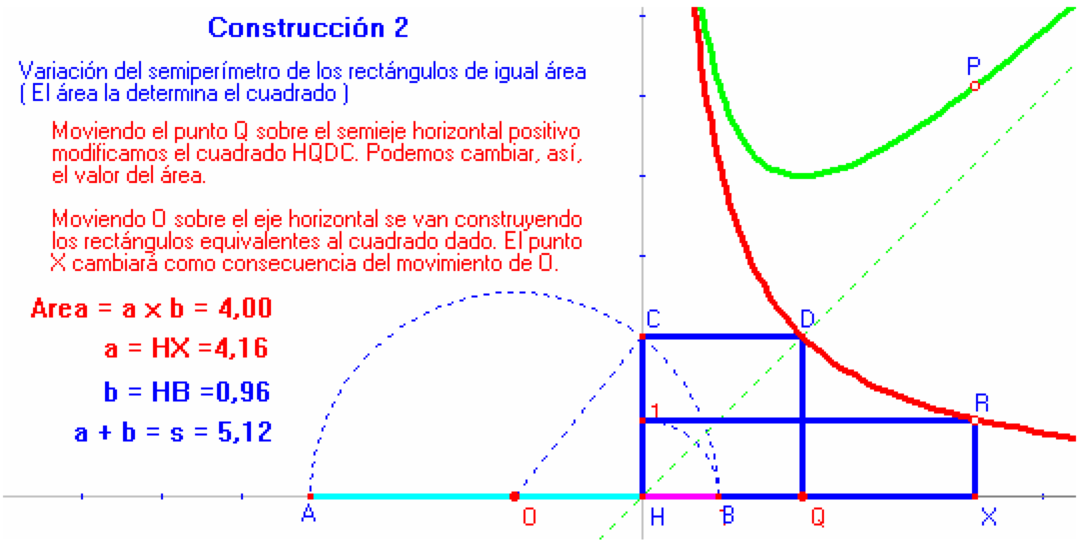


Fig.8

1. En esta construcción (Fig.8), la variación del área la conseguimos cambiando el cuadrado, es decir, hemos construido un cuadrado de lado variable. Moviendo el punto Q sobre el semieje horizontal positivo irán formándose diferentes cuadrados QHCD, que determinarán el valor del área A.
2. Para un cuadrado fijo (un valor de A), se irán generando los correspondientes rectángulos equivalentes a través del movimiento del puno O sobre el eje

horizontal (construcción geométrica). El punto X variará como consecuencia del movimiento O.

3. Las gráficas de las funciones se consiguen como lugar geométrico de los puntos R y P cuando se mueve O.

¿Por cuál de las dos construcciones nos decidimos?

a) En la Construcción 1 controlamos numéricamente el valor del área, podemos darle el valor exacto que nos interese y se podrá observar el cambio de las figuras correspondientes cuando cambiamos cada valor. En la Construcción 2, sin embargo, la visualización del cambio de las figuras se puede seguir "de forma continua" a la vez que movemos el punto Q, pero perdemos precisión en el valor numérico del área, si nos interesara.

b) En la Construcción 1 se ha hecho uso de la función y = A/x para la construcción de los rectángulos equivalentes y después, a partir de ellos, se ha realizado la construcción del cuadrado correspondiente; estas construcciones dependerán de X. En la Construcción 2 se hace la construcción geométrica de los rectángulos equivalentes a un cuadrado dado, estando el punto X condicionado al movimiento de O.

Ambas construcciones se complementan y constituyen, desde nuestro punto de vista, un eficaz ejercicio matemático.

Bibliografía

- Courant, R. y Robbins, H. (1971): ¿Qué es la matemática? Aguilar, Madrid.
- Eves, Howard. (1969): Estudio de las geometrías. Uteha, Méjico.
- Rey pastor, J. y Babini, J. (1986): Historia de las matemáticas. Gedisa, Barcelona.
- Ríbnikov, K. (1987): Historia de las matemáticas. Mir, Moscú.

Carmen Galván ha sido profesora de educación secundaria en varios centros de la isla de Tenerife (Canarias, España). Tiene varias publicaciones sobre la enseñanza de las matemáticas.
e-mail: carmen@geup.net