

La motivación de la belleza

R Elena Ortega, Inés Ortega, Tomás Ortega y Cecilia Crespo Crespo.

Resumen

En el presente artículo se exponen dos métodos generales para dibujar rosetones de forma exacta. Ambos tienen su origen en el "método directo", que se basa en la relación de las longitudes de los radios de las circunferencias que los determinan, y que surge del análisis directo de las figuras geométricas. Una conexión de éste con el séptimo problema de Apolonio da lugar al "método de las tangentes", que es menos rico en argumentación que el primero, pero más fácil de aplicar. Cuando el número de lados del polígono regular aumenta el método directo deja de ser aplicable en la realidad, pero las relaciones métricas de los radios proporcionan el "método métrico de las proporciones". Ambos métodos se pueden aplicar a polígonos regulares de cualquier número de lados de forma muy sencilla, aunque el conocimiento de la relación métrica que sustenta al segundo requiere un nivel de razonamiento superior.

Abstract

In this paper we expound two general methods to draw rose windows in an exact manner. Both have their origin in the "direct method", which, on the one hand, is based upon the relation of the lengths of the radii of the circumferences which determine them, and, on the other, arises from the analysis of the geometric figures. A connection of this with Apollonius's seventh problem gives way to the "tangents' method", which is less rich in argumentation than the first, but easier to apply. When the number of sides of the regular polygon increases, the direct method stops being applicable, but the metric relations of the radii provide the "metric method of proportions". Both methods can be applied to regular polygons of any number of sides in an easy manner, though the knowledge of the metric relation that sustains the second one requires a higher level of reasoning.

Resumo

O presente artigo apresenta dois métodos gerais para desenhar rosetas de forma exata. Ambos têm a sua origem no "método direto", que se baseia na relação das longitudes dos raios das circunferências que os determinam, e que surge da análise direta das figuras geométricas. Uma conexão deste com o sétimo problema de Apolônio dá lugar ao "método das tangentes", que é menos rico em argumentação que o primeiro, porém mais fácil de aplicar. Quando o número de lados do polígono regular aumenta, o método direto deixa de ser aplicável na realidade, mas as relações métricas dos raios proporcionam o "método métrico das proporções". Ambos os métodos podem ser aplicados a polígonos regulares de qualquer número de lados de forma muito simples, ainda que o conhecimento da relação métrica que sustenta o segundo requer um nível superior de raciocínio.

Introducción

En el paso del románico al gótico se comenzaron a hacer dibujos (planos) de los edificios que se pretendían construir y los conocimientos de Geometría se ponen al servicio de la Arquitectura para elaborar los proyectos de las edificaciones. En esta época surgen los rosetones como elementos arquitectónicos que, además de proporcionar una mayor iluminación interior, aportaban una ornamentación muy elegante, tanto en la fachada como en el interior, donde a la belleza de la forma geométrica se añade el efecto de la luminosidad exterior. Por supuesto que consideramos rosetones basados en polígonos regulares y que se pueden dibujar de forma exacta con regla y compás. A estos rosetones los denominamos gaussianos, en lo que sigue sólo haremos referencia a ellos y las posibilidades de construcción están limitadas por el teorema de Gauss.

Se puede y se debe enfocar la enseñanza de los conceptos matemáticos desde diferentes perspectivas, de las que deben destacarse aquellas que tengan que ver con la motivación. La enseñanza sin el aprendizaje carece de sentido y uno de los primeros principios de la Didáctica de la Matemática es conseguir que el alumno quiera aprender. Desde la Geometría se pueden establecer preciosas conexiones con el Arte que, sin duda, son muy motivadoras para los alumnos por diversos motivos: en primer lugar, porque se muestra una aplicación de la matemática; en segundo lugar, porque se sale del contexto propio de la disciplina y se proporciona una visión más amplia de la matemática; en tercer lugar, porque el proceso de enseñanza-aprendizaje se vuelve más interesante para los alumnos y, en particular, se muestran más participativos en las tareas que tienen que ver con aplicaciones reales; finalmente, también se debe destacar la conexión entre el simbolismo algebraico y el dibujo geométrico, así como el razonamiento y argumentación que están fundamentados en el análisis didáctico de las propiedades de los elementos que componen las figuras.

Por todo lo anterior, resulta evidente que conviene crear situaciones (Brousseau, 1986) que propicien estas conexiones con el objetivo fundamental de despertar el interés de los alumnos por el aprendizaje de la Geometría, y el tema que aquí nos ocupa, la construcción de rosetones, reúne todas estas condiciones.

En el trabajo que se presenta se utilizan tres métodos de dibujo que permiten construir los rosetones de forma exacta con regla y compás. El primero, método directo, se basa en la determinación de forma directa de los radios de las tres circunferencias que intervienen en la construcción de los rosetones (circunferencia circunscrita, circunferencia de centros y circunferencia de tangentes). Este método surge directamente al analizar las relaciones métricas de los elementos implícitos en las figuras de los rosetones, es muy rico en argumentación, en el sentido de Ibañes, M. y Ortega, T. (2004), pero las dificultades de aprendizaje se sitúan en el cuarto nivel de Van Hiele (Gutiérrez, J. y Jaime, A., 1990), ya que la obtención de las longitudes de los radios de la circunferencia de centros y tangente de las circunferencias de tangencias son auténticos teoremas, aunque en la descripción que se hace después no se enuncien. Al aplicar este método a la construcción del rosetón de cuatro pétalos se establece una conexión con el séptimo problema de

tangencias de Apolonio, y surge de manera natural el método de las tangencias, que se puede aplicar para construir de forma exacta rosetones, sea cual fuere su número de pétalos. Es precisamente el aumento del número de pétalos lo que hace que el método directo no se pueda aplicar como tal y, buscando una solución a esta problemática, surge de forma natural el método métrico de las proporciones, que se basa en la determinación de la “tercia proporcional” de la relación métrica que expresa el radio de la circunferencia tangente en función del radio de la circunferencia circunscrita. Este método también permite el diseño de rosetones de forma exacta, independientemente del número de lados. Por otra parte conviene tener presente que, aunque la aplicación del mismo sí que es sencilla, el aprendizaje de la deducción del método añade un paso más al método directo y, por tanto, la obtención del método se sitúa en el cuarto nivel de Van Hiele y, al igual que en el estudio que hacen Ortega, I y Ortega, T. (2004) sobre los diez problemas de Apolonio, la aportación gráfica del análisis de los elementos de las figuras geométricas es mucho más rica e interesante que la aportación que procede de la manipulación del simbolismo algebraico.

El rosetón de cuatro pétalos. El método de tangencias

Como puede verse en Crespo Crespo, C. (2005), las relaciones entre el radio de la circunferencia del rosetón de cuatro pétalos, R_e , con el radio de los centros, R_c , y con el radio de las cuatro circunferencias tangentes que dibujan los pétalos, R_t , que son muy fáciles de obtener, son éstas:

$$R_c = (2 - \sqrt{2})R_e$$

$$R_t = (\sqrt{2} - 1)R_e$$

La construcción gráfica de este rosetón es muy sencilla. La figura 1 se ha hecho con CABRI partiendo de la circunferencia de radio R_e , pues se pierde generalidad si se supone que es la unidad.

Considerando la figura 1, en la que $OH=OK=1$, es claro que $HK = HP = \sqrt{2}$ y, por tanto $R_c = PQ = 2 - \sqrt{2}$ y $R_t = OA = \sqrt{2} - 1$. Es evidente que los puntos de tangencia están en las bisectrices OR y OS y en las rectas que unen los centros AB , BC , CD y DA . Esta construcción también se podría haber resuelto como en Ortega, I. y Ortega, T. (2004), ya que se puede considerar que se trata del séptimo problema de Apolonio (circunferencia tangente a dos rectas y a otra circunferencia dada), pero el problema que nos ocupa es un caso particular del problema de Apolonio, ya que el centro de

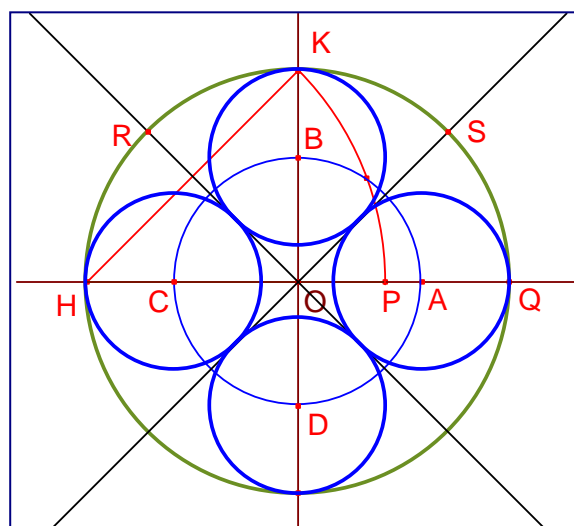


Figura 1. Rosetón de 4 pétalos I.

la circunferencia es el punto de corte de las dos rectas. Aquí la solución es aún más sencilla, ya que, por ser el radio OL perpendicular a la recta tangente a la circunferencia, PQ , en el punto de tangencia, L , el problema se reduce a determinar la circunferencia inscrita al triángulo OPQ , cuyo centro, A , es el punto común de las bisectrices. La construcción geométrica se ultima trazando la circunferencia de los centros de las circunferencias tangentes. Figura 2.

Método de las tangencias: El procedimiento gráfico que se acaba de describir es genérico y “exacto”, y se puede aplicar a los polígonos regulares de cualquier número de lados, y las diferencias de trazado de unos casos a otros sólo se diferencian en el número de circunferencias tangentes, cosa que carece de importancia, y en la construcción del propio polígono, que es donde reside la complejidad. Considerando la figura 2 como soporte de la descripción, este método gráfico de tangencias se puede enunciar así: Se considera un radio OL en el que va a estar situado el centro de la circunferencia tangente; partiendo de este lado se considera el triángulo isósceles POQ formado por la recta tangente a la circunferencia dada en el punto L , que es el extremo del radio considerado, y las rectas que son mediatrices de los lados LK y LM del polígono base. Finalmente se traza a uno de los ángulos iguales; el punto de corte de esta bisectriz con el radio OL es el centro de la circunferencia de tangencias, A , el segmento AL es su radio y el segmento OA es el radio de la circunferencia de centros.

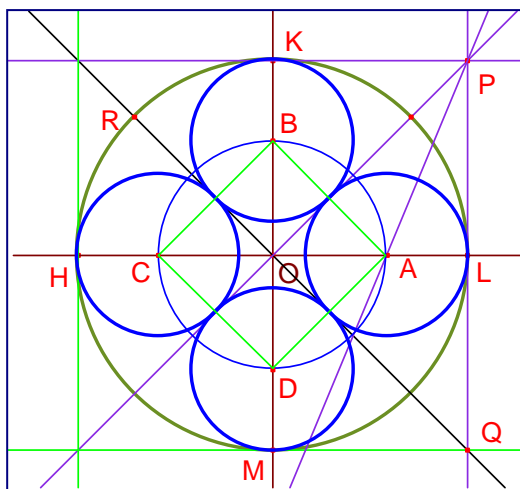


Figura 2. Rosetón de 4 pétalos II.

El rosetón de seis pétalos

Un análisis similar al anterior sobre el rosetón de seis pétalos de la figura 3 permite establecer las siguientes relaciones métricas entre el radio exterior, R_e , el radio de la circunferencia de centros, R_c , y el radio de las circunferencias tangentes que dibujan los pétalos, R_t :

$$R_e=3R_t \text{ y } R_c=2R_t$$

Estas relaciones permiten dibujar el rosetón de la figura 3, una vez que se ha construido el hexágono regular, como se hizo en la figura 1: El hexágono regular es un polígono muy sencillo de construir, ya que las longitudes del radio, OP , y del lado, PQ , son

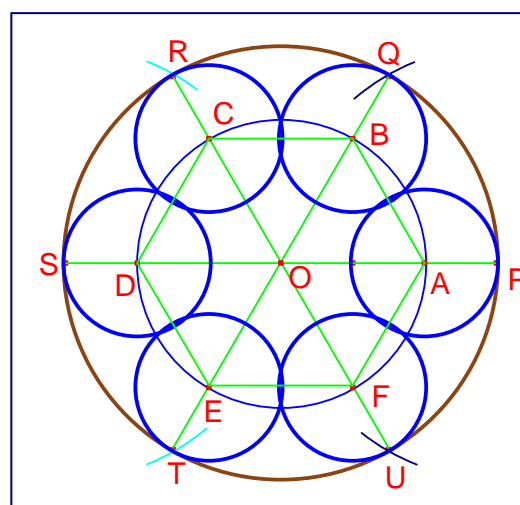


Figura 3. Rosetón de 6 pétalos I.

iguales. Aplicando el teorema de Tales, ahora, dividiendo OP en tres partes iguales se obtiene el radio de la circunferencia de centros, $R_c=OA$, y el radio de las circunferencias tangentes, $R_t=AP$.

El procedimiento general de tangencias descrito en el apartado anterior es muy sencillo de aplicar y el rosetón que muestra la figura 4 se ha construido utilizando este procedimiento. La primera circunferencia tangente, que describe el primer pétalo, y que tiene centro A se dibuja teniendo en cuenta que es la circunferencia inscrita al triángulo OMN . En consecuencia A es la intersección de las bisectrices y este punto determina con O el radio de la circunferencia de centros y con P el radio de las circunferencias que determinan los pétalos. Aunque en la figura 4 no se ha dibujado, la bisectriz del ángulo OMN contiene al lado AB del hexágono regular inscrito en la circunferencia que contiene a los centros. Esta propiedad se justifica por el hecho de que el triángulo OMN es equilátero y las bisectrices coinciden con las mediatrices. Se puede elaborar una argumentación más completa, en el sentido de Ibañes y Ortega (2004), tratando de que sea convincente y explicativa. Para ello hay que combinar las representaciones gráfica, simbólica y verbal, y justificar todas las afirmaciones, como por ejemplo, ¿por qué OMN es equilátero?

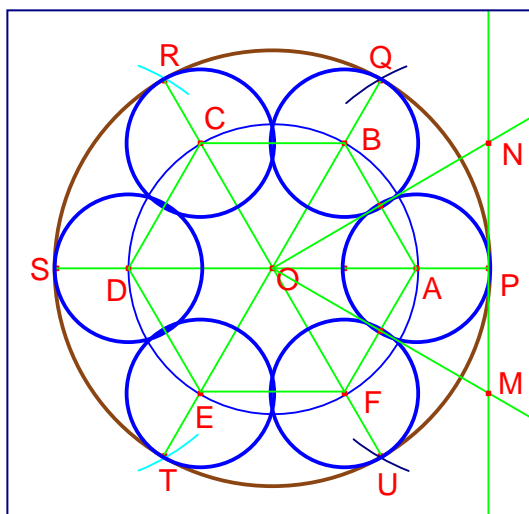


Figura 4. Rosetón de 6 pétalos II.

El rosetón de tres pétalos

El análisis directo que permite construir este rosetón es un poco más complicado, pero merece la pena hacerlo por las relaciones métricas que aparecen en él. Examinando la figura 5 no es difícil, establecer la relación entre el lado del triángulo, l_t inscrito en una circunferencia de radio R_e y este radio, $l_t = \sqrt{3}R_e$, que se deduce del triángulo rectángulo LVR . Por otra parte, un

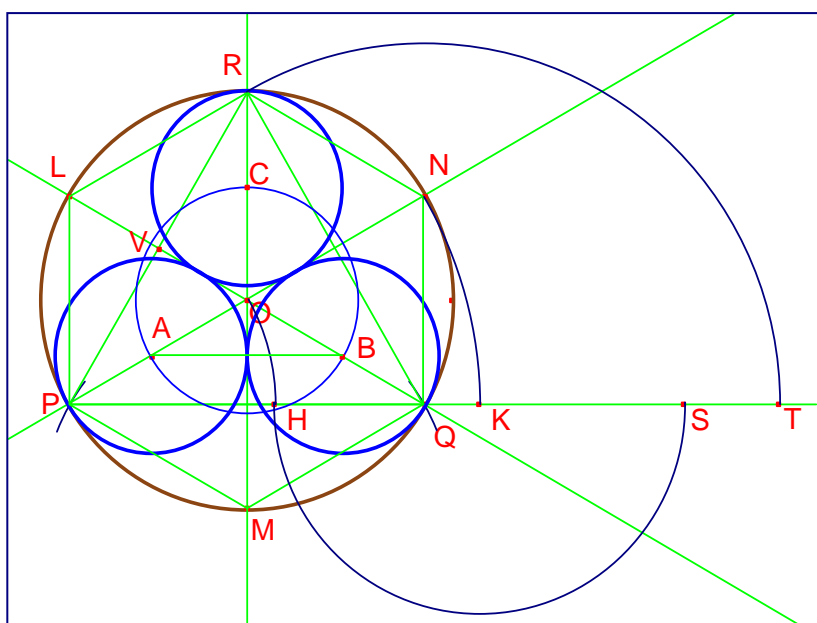


Figura 5. Rosetón de 3 pétalos I.

nuevo análisis de la figura 5, permite expresar el radio de la circunferencia de centros mediante el segmento ST, pero esto no es inmediato.

Analizando la figura 5 es fácil ver que los triángulos OAB y OPQ son semejantes y, por tanto, se verificará la relación

$$\frac{\sqrt{3}R_e}{2R_t} = \frac{R_e}{R_c}$$

que es equivalente a esta otra

$$\frac{\sqrt{3}}{2R_t} = \frac{1}{R_e - R_t}$$

De esta última relación ya es muy fácil deducir que es $R_t = (2\sqrt{3} - 3)R_e$ y considerando que $R_e=1$, entonces $R_t = 2\sqrt{3} - 3$ y que $R_c = 4 - 2\sqrt{3}$.

Como $PH=HK=KS=R_e$ y $PQ=QT=l_t$, es claro que $ST= R_c$, igualdad que se verifica para cualquier longitud de R_e , y cuando este radio es la unidad, $R_t = 2\sqrt{3} - 3$.

Por otra parte, es claro que si se considera el procedimiento gráfico general la construcción del rosetón de tres pétalos es mucho más sencilla. La figura 6 muestra este procedimiento: la circunferencia inscrita en el triángulo OST representa al primer pétalo, la circunferencia de centro O radio OA es la circunferencia de los centros y, ahora, el trazado de los otros dos pétalos es trivial.

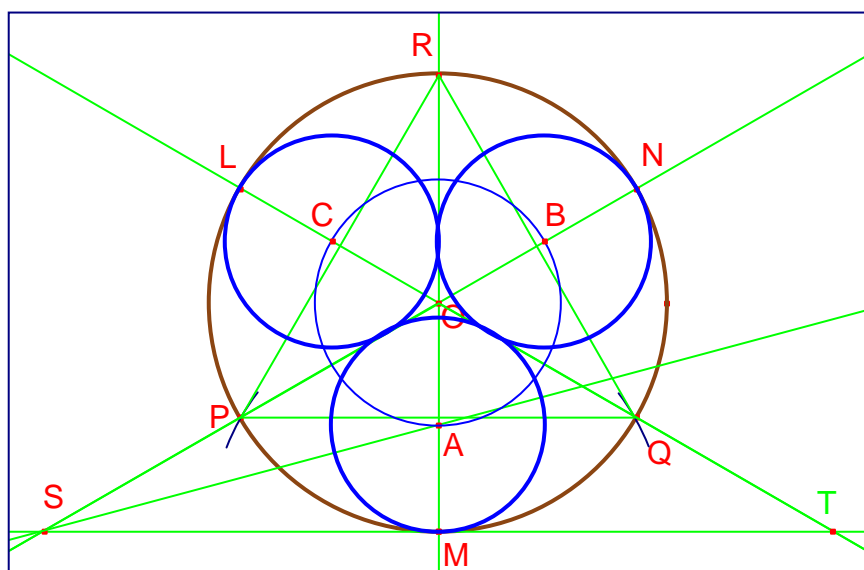


Figura 6. Rosetón de 3 pétalos. Método de las tangentes.

Rosetón de cinco pétalos. El método métrico de la proporción

Su construcción está ligada a la del pentágono regular, que ya los Pitagóricos sabían dibujarlo con regla y compás de forma exacta. La construcción que aquí se presenta está basada en un análisis sobre la figura 7.

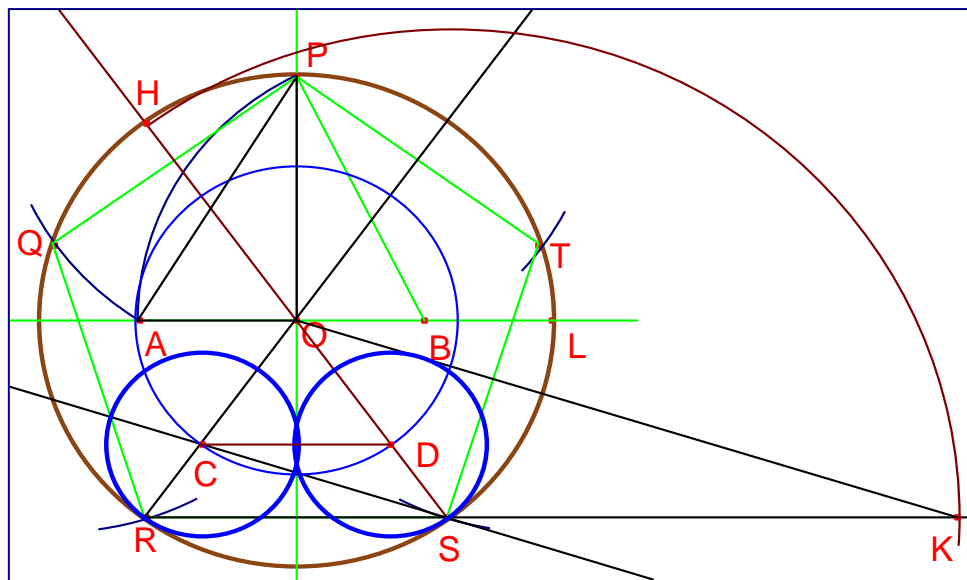


Figura 7. Rosetón de 16 pétalos construido por el método general

Es bien conocido que los lados del triángulo AOP contienen las longitudes de los polígonos regulares inscritos en la circunferencia de centro O y radio OL de 5, 6 y 10 lados (Boyer, 1999, pág. 222). Esto permite dibujar de forma exacta el pentágono regular $PQRST$ y determinar la longitud de su lado, l_p , en función del radio de la circunferencia circunscrita, R_e , que verifica la siguiente relación:

$$l_p = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} R_e$$

Considerando las relaciones métricas derivadas de la semejanza de los triángulos OCD y ORS y denotando por R_t y R_c a los radios de las circunferencias tangentes y de los centros, como viene siendo usual, se tiene:

$$\frac{l_p}{2R_t} = \frac{R_e}{R_c}$$

De la expresión anterior se obtiene que

$$R_t = \frac{l_p R_e}{2R_e + l_p},$$

y R_t se puede determinar por cuadraturas, como se ha hecho en los rosetones

anteriores, pero los cálculos se complican en exceso y, en esta ocasión, considerando que $R_e=1$,

$$R_t = \frac{l_p}{2+l_p}$$

Ahora optamos por determinar R_t aplicando el teorema de Tales, y para ello sólo hay que calcular la tercera proporcional de la siguiente igualdad:

$$\frac{l_p}{2+l_p} = \frac{x}{1}$$

Considerando que $RO=1$, que $RS=l_p$ y que $RK=2+l_p$, la paralela a OK por S determina el punto C y con él el radio de la circunferencia tangente, que es CR . La circunferencia de centro O y radio OR determina los centros de las demás circunferencias tangentes y el trazado de éstas termina la construcción.

Método métrico de la proporción: El procedimiento que se acaba de utilizar constituye un método general métrico “exacto” y, considerando la figura 7 como guía, se puede enunciar así: a uno de los lados del polígono, RS , se le añade un diámetro de circunferencia, SH , para formar el segmento SK sobre la semirecta RK que contiene al lado RS , considerando ahora el radio de la circunferencia exterior, OR , se une K con O y se traza la paralela a OK por S . El punto de corte de esta paralela con OR es el centro de la circunferencia de tangencias, C , y el segmento CR es su radio.

Una vez dibujado el pentágono regular la construcción basado en el procedimiento de tangencias se aplicaría exactamente igual que en los casos anteriores y por esta razón ya no se considera en este apartado.

Aunque cuando se duplica el número de lados, es conocido (Ortega, T., 2005) que la longitud del lado del polígono regular de $2n$ lados, l_{2n} , se expresa en función de la longitud del lado del polígono regular de n lados, l_n , mediante la siguiente relación, conocida como igualdad de Von Ceulen

$$l_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}$$

el análisis de las relaciones métricas de los rosetones se va complicando en exceso, y lo mismo ocurre con las expresiones explícitas de las relaciones entre los radios de las circunferencias que los determinan. Sin embargo, la construcción de polígonos que tienen el doble del número de lados que uno dado es muy sencilla y el diseño del rosetón correspondiente también es fácil aplicando el método que se acaba de describir. La figura 8, muestra la construcción del rosetón de 16 pétalos. Una vez que se ha dibujado el polígono regular de 16 lados, al lado IJ se le adjuntan dos radios de circunferencia para obtener IK , uniendo K con O y trazando la paralela a OK por J se obtiene el segmento TI , que es el radio de las circunferencias tangentes.

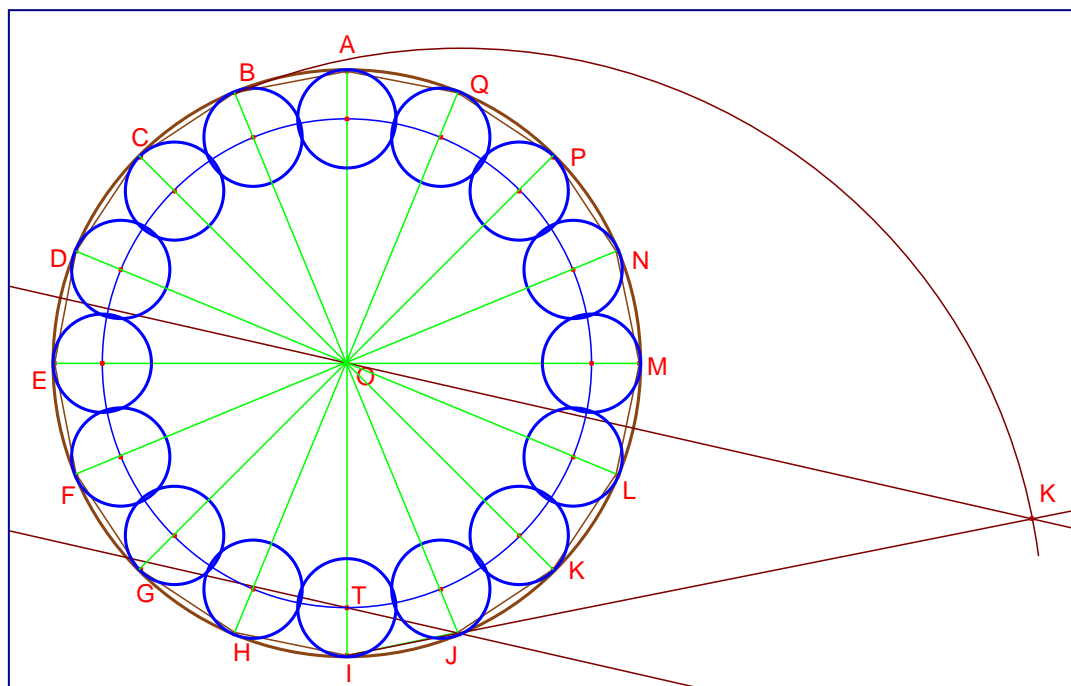


Figura 8. Rosetón de 16 construido por el procedimiento métrico general.

Rosetones gaussianos

Los rosetones que más abundan en las catedrales son los de tres, cuatro y seis pétalos, porque son los más fáciles de construir; también son frecuentes los de ocho y doce pétalos, que se obtienen fácilmente a partir de los anteriores; los de cinco y diez pétalos están menos presentes, sin duda porque la construcción del pentágono regular, que es el polígono básico, no es tan evidente; los rosetones de mayor tamaño tienen dieciséis, veinte o veinticuatro pétalos, son muy ornamentales, suelen estar ubicados en las fachadas principales, y se obtienen a partir de los polígonos regulares de ocho, diez y doce lados duplicando este número. No aparecen rosetones con mayor número de pétalos y la razón es la siguiente: al aumentar el número, el radio de la circunferencia de centros, R_c , está muy cercano al radio de la circunferencia exterior, R_e , y, en consecuencia, las circunferencias de los pétalos se tornan diminutas, son difíciles de tallar y, además, pierden belleza, aunque se suelen combinar con rosetones interiores concéntricos y con la mitad de pétalos.

Como señala Crespo Crespo (2005), el radio de la circunferencia de centros, R_c , se puede determinar de forma aproximada a partir del radio exterior, R_e , mediante la siguiente relación:

$$R_c = \frac{R_e}{1 + \text{sen}(\pi/n)}$$

Sin embargo, las posibilidades matemáticas no son las mismas que las del dibujo geométrico y, además de las limitaciones impuestas por el número de pétalos,

la imposibilidad de dibujar ciertos polígonos regulares de forma exacta con regla y compás, sin duda, ha impedido que se construyeran rosetones basados en polígonos regulares no construibles de forma exacta. El teorema de Gauss especifica qué polígonos regulares se pueden diseñar con regla y compás de forma exacta, y cuáles no. El enunciado es éste:

Un polígono regular de M lados se pueden construir “de forma exacta” con regla y compás sí y sólo sí:

- $M=2^k$
- M es un número primo de la forma $M=2^k+1$

M es un número compuesto de factores diferentes del tipo anterior, es decir, $M=2^k \cdot (2^r+1) \cdot (2^s+1) \cdot \dots$, siendo $2^r+1, 2^s+1, \dots$ números primos diferentes.

Nosotros denominamos rosetones gaussianos a aquellos que se construyen sobre un polígono regular que se puede dibujar con regla y compás de forma exacta, y teniendo en cuenta el teorema de Gauss el número de pétalos de estos rosetones tiene que ser alguno de los de la siguiente sucesión: 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24,... Salvo un rosetón de siete pétalos, que se encuentra en Notre Dame de París, no aparecen rosetones de 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22 y 23 pétalos, y la razón es obvia: No se pueden construir de forma exacta los polígonos regulares de este número de lados. Sin embargo, los rosetones de 15 y 17 pétalos, que son gaussianos y, por tanto, se pueden construir, tampoco aparecen en las catedrales góticas, aunque por razones diferentes. Por una parte, es casi seguro que los pitagóricos ya supieran construir el pentadecágono regular, ya que su ángulo central es 24° , y este se obtiene como la diferencia entre el doble de la amplitud del ángulo central del pentágono y el ángulo central del triángulo equilátero, pero seguramente, lo mismo que sucede hoy en día, esta construcción, que se reproduce en la figura 9, no era lo suficientemente popular como para aplicarla, y aunque los canteros de la época la conocieran, también es razonable pensar que no lo hicieron porque el trazado del rosetón de 16 pétalos es mucho más sencillo, y las diferencias del efecto ornamental y luminoso se considerarían inapreciables. Un rosetón de 15 pétalos aparece en la fachada principal de la iglesia de St. Saviour's de Dublín, pero esta iglesia se construyó a finales del siglo XVIII.

Por otra parte, la razón de que no aparezcan rosetones de 17 lados es otra, pero también muy simple: En esa época no se sabía construir estos polígonos regulares de forma exacta con regla y compás. Así, por ejemplo, la primera piedra de la catedral de Burgos se puso el 20 de julio de 1221, mientras que el primer polígono regular de 17 lados lo construyó Gauss en 1796.

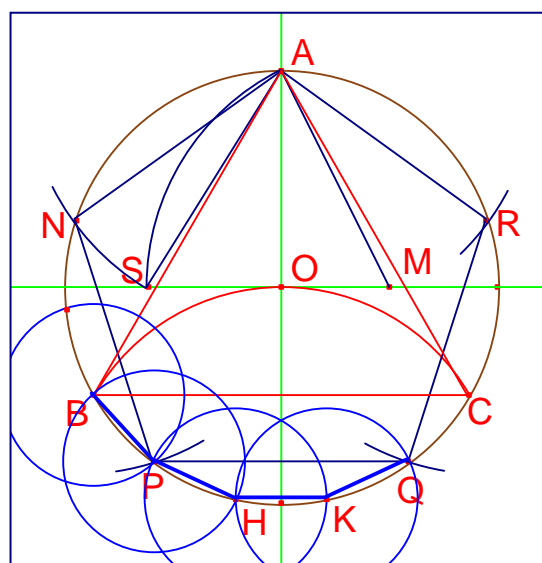


Figura 9. Pentadecágono regular.

Tomando como referencia esta catedral (una de las más bellas del mundo, que tiene un esquema de cruz latina con unos 108 metros de longitud y 61 de anchura, y un claustro de planta cuadrada de unos 40 metros de lado) en ella se encuentran rosetones de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, y 20 pétalos distribuidos por: la fachada principal (Puerta de Santa María), las fachadas laterales (Puerta del Sarmental, de la Coronería y de la Pellejería) y el claustro; la nave principal, las dos naves laterales y el crucero; el transepto (crucero) y varias de las 19 capillas que están incrustadas de forma radial en el cuerpo de la cruz latina y en el claustro. De ellos hay dos que se distinguen por su tamaño y belleza:

- El de la fachada principal es un rosetón compuesto, que consta de dos coronas circulares de 12 pétalos cada una, y que da luz a la nave central: los pétalos de la exterior son a su vez rosetones de cuatro pétalos y la interior de tres pétalos, de los que salen unos nervios que forman una estrella de David, en la que se inscribe un rosetón de 6 pétalos.
- En la fachada de la Puerta del Sarmental aparece otro rosetón compuesto, que tiene dos coronas de 20 pétalos y otras dos de 10.

En la fotografía de la figura 10 se puede apreciar el gran rosetón que está situado bajo la bóveda del crucero, en la fachada de la Puerta del Sarmental. Este rosetón es muy ornamental e ilumina la nave del transepto sur, mide seis metros de diámetro y aporta una intensa iluminación al interior del crucero, como se puede apreciar en la fotografía. Debajo del gran rosetón se muestran dos arcadas, de las 38 que tiene el triforio y que circundan la nave central y el crucero, que están decoradas con tres rosetones de tres pétalos y cuatro rosetones de cuatro pétalos. En esta fotografía también se pueden apreciar dos de las trompas que transforman la planta cuadrada en la base octogonal sobre la que se apoya el cimborrio, el arranque de éste y la suntuosidad del templo. Esta catedral es Patrimonio de la Humanidad y se pueden ver imágenes suyas, que sin duda serán motivadoras por su belleza, en muchas webs, ésta es una de ellas:

www.archiburgos.org/catedral/visita.htm

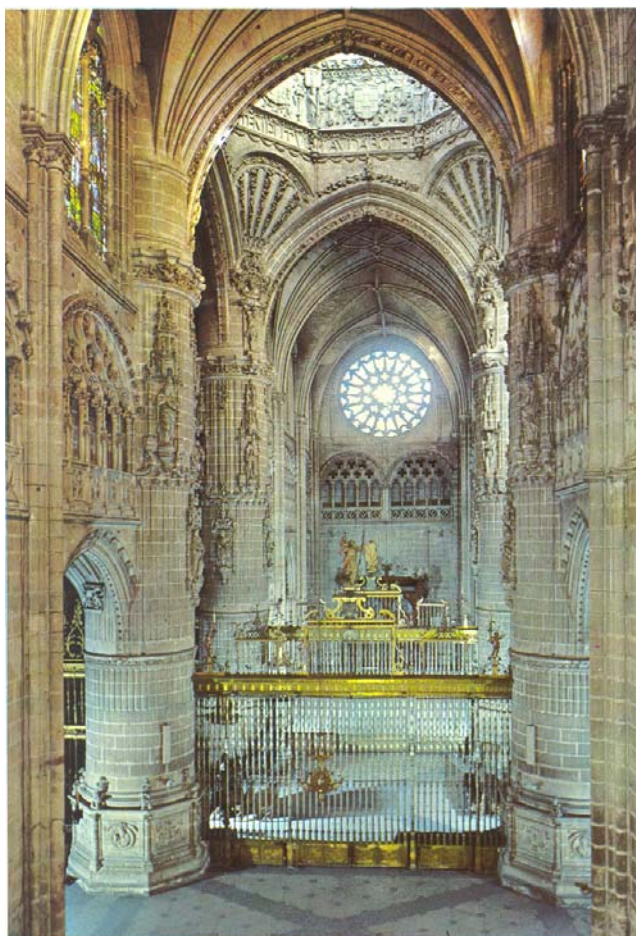


Figura 10. Rosetón en la fachada de la Puerta del Sarmental. Catedral de Burgos.

Conclusiones

Tras la descripción que se acaba de realizar sobre la construcción de los rosetones gaussianos y de las razones históricas e impedimentos de construcción, cabe destacar la importancia que tienen estas construcciones geométricas dentro de la instrucción formativa que se lleva a cabo tanto en Dibujo Técnico como en Matemáticas, ya que las dimensiones histórica, artística y aplicada implican que estos contenidos sean motivadores por sí mismos y, en consecuencia se puedan producir aprendizajes de Geometría más significativos. Por otra parte, se descubren y se describen dos procedimientos generales de construcción de rosetones (el método de las tangencias y el método métrico de la proporción) que son aplicables a polígonos regulares de cualquier número de lados. La aplicación de cualquiera de ellos es muy sencilla, si bien la obtención del segundo método requiere establecer unas relaciones métricas un poco más complicadas, y la dificultad intrínseca de la obtención del método estaría en el cuarto nivel de Van Hiele como indican Gutiérrez y Jaime (1990). Finalmente, se establece el concepto de rosetones gaussianos y se describe una discusión explicativa sobre las posibles causas de la construcción real de estos rosetones en las catedrales góticas.

Bibliografía

- Boyer, C.B. (1999): *Historia de la matemática*. Alianza Universidad Textos. Madrid.
- Brousseau, G. (1986): Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.2, 33-115.
- Castelnuovo, E. (1981): *La Geometría*. Barcelona: Ketres Editora.
- Clemens, D.H. y Battista, M. T. (1992): *Geometry and Spatial Reasoning*. En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Douglas A. Grows Edt. Macmillan Publishing COMPANY. NEW YORK.
- Crespo Crespo, C. (1999): La historia de la geometría como elemento motivador y ejemplificador en la enseñanza. Panel presentado en CAREM I (I Conferencia Argentina de Educación Matemática) Buenos Aires.
- Crespo Crespo, C. (2005): La geometría en el arte: los vitrales de las catedrales góticas. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 18). México. (En prensa)
- Euclides (1991): *Elementos*. Libros I-IV. Madrid: Gredos.
- Gieseck, F.E. (1995): *Dibujo Técnico*. Limusa. México
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1990): Una propuesta de fundamentación para la Geometría: el modelo de Van Hiele. En *Teoría y práctica en Educación Matemática*. S. Llinares y M.V. Sánchez. Alfar. Utrera, Sevilla.
- Heilbron, J. L. (1998): *Geometry Civilized*. Oxford: Claredon Press.
- Ibañes, M. y Ortega, T. (2002): Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*. ISSN0212-4521, Nº 21 (1), pp. 49-63. Barcelona.
- Ibañes, M. y Ortega, T. (2004): Textos argumentativos. *UNO*. Vol. 35, Graó. ISSN: 1133-9853. Barcelona.
- Lozano, R. L. (1987): El problema de Apolonio. *Bol. Soc. Cast.* Nº 14, pp. 13-41.

- Madrid.
- Ortega, I. y Ortega, T. (2004): Los diez problemas de Apolonio. SUMA. Vol. 46 pp. 59-70 Madrid. ISSN:1130-488X
 - Ortega, T. (2005): Conexiones Matemáticas y dinamizadores de aprendizajes. Grao. Barcelona (En prensa).
 - Pérez, J. (1985): La catedral de Burgos. Artes Gráficas Santiago Rodríguez, S.A. Burgos (España).ISBN: 84-7138-436-1.
 - Puig, P. (1976): Curso de Geometría Métrica. Herederos de Pedro Puig Adam. Editor: Biblioteca MATEMÁTICA, S.L. MADRID. ISBN 84-7029-024-X.
 - Ramos, C. M. (2004, junio): Félix Bunge: El Señor de los vitrales. En Revista de La Nación. (pp.67-70) Buenos Aires, Argentina: La Nación.
 - Rodríguez, F. J. y Álvarez, V. (1990): Dibujo Técnico. Editorial Donostiarra. San Sebastián.
 - Socas, M. (1997): Dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria. En La Educación Matemática en Enseñanza Secundaria. Edit. Rico, L. y otros. Cap. V, pp. 125-154 Hórsori Editorial. Barcelona.

Tomás Ortega del Rincón, es Licenciado y Doctor en Matemáticas y Catedrático de Institutos Nacionales de E. Media.

Desde 1975 hasta 1990 ha trabajado en Institutos Nacionales de Enseñanza Media y, a partir de ese año en la Universidad de Valladolid en las titulaciones de: Físicas, Educación y Psicopedagogía.

Ha participado en más de 20 cursos de posgrado, en 14 proyectos subvencionados y asistido a más de 30 congresos.

Ha dirigido tres Tesis Doctorales, impartido más de 20 conferencias, cursos o Seminarios y es miembro de doce tribunales de tesis y emisión de informes de experto.

Ha sido miembro de Comisiones, en tres casos al cuerpo de Titulares de Escuela Universitaria y en otros tantos al cuerpo de Catedráticos de Escuela Universitaria.

Tiene más de 90 publicaciones y trabajos de Investigación y reviewer de artículos de 20 trabajos. Ha ejercido numerosos cargos en la dirección de Sociedades, miembro de la Comisión de Educación de la RSME, director del IICE de la Universidad de Valladolid y miembro del Comité Científico de varios Simposios.

Dpto. Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática.

Facultad de Educación.

Campus Miguel Delibes.

47011-Valladolid. Tfno. 983.184.472.

Email: ortega@am.uva.es

Inés Ortega Cubero, es Licenciada en Bellas Artes e Historia del Arte por la Universidad de Salamanca y Profesora de Educación Secundaria.

Master en Museología (Fundación Carolina y Universidad de Valladolid).

En la actualidad está desarrollando la investigación de su tesis doctoral en Didáctica de la Educación Plástica. Ha publicado cuatro artículos.

IES Giner de los Ríos (Segovia).

Didáctica de la expresión musical. Plástica y corporal.

E. U. Virgen de la Fuencisla (Segovia).

Email: inesplicable@hotmail.com

Elena Ortega Cubero, es Arquitecto Superior por la Univesidad de Valladolid.
Tiene dos publicaciones
C/ San Luis 7, 8º Izq. 47004-Valladolid
Email: elenao@usuarios.retecal.es

Cecilia Crespo Crespo, es Profesora titular de Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires (Argentina). Ha asistido a numerosos congresos nacionales e internacionales presentando comunicaciones y talleres de matemáticas. Tiene numerosos ensayos y artículos de investigación.
Email: ccrespo@sinectis.com.ar