UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2005, Número 1, páginas 17 - 35
ISSN: en trámite

Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria

Rafael Escolano Vizcarra y José María Gairín Sallán

Resumen

En la primera parte de este trabajo mostramos los obstáculos didácticos provocados al priorizar la enseñanza de la fracción como relación parte-todo en España. En la segunda parte presentamos una propuesta didáctica alternativa para alumnos de 4º, 5º y 6º de Educación Primaria, propuesta que se apoya en el uso de tres modelos de aprendizaje: medida, cociente y razón.

Abstract

In the first part of this study we present the didactic problems brought about by to prioritize the teaching of the fraction as a part-whole relationship in Spain. In the second part we present an alternative didactic proposal for pupils in the 4th, 5th and 6th levels of Primary Education, this proposal is based on the use of three learning models: measure, quotient and ratio.

Introducción

La instrucción sobre los números racionales positivos ocupa una parte muy destacada de la Aritmética que figura en los currícula oficiales de la Enseñanza Primaria en España. Sin embargo, un estudio del INCE con alumnos españoles de sexto curso de Educación Primaria (12 años) concluye que "son casi tres de cada cuatro los que tienen dificultad para comprender el concepto de fracción y operar con fracciones" (INCE, 2002, pág. 2).

Es cierto que buena parte de las dificultades de comprensión de los escolares se sitúa en el conjunto de conceptos, procedimientos, relaciones y operaciones de la propia estructura numérica de los números racionales; y así se pone de manifiesto en distintas investigaciones (Kerslake, 1986; Bezuk y Bieck, 1993; Mack,1993; Kieren, 1993). Pero también es cierto que existen dificultades de comprensión provocadas por el proceso instructivo.

En la primera parte de este trabajo nos proponemos analizar las dificultades de comprensión que provoca el significado parte-todo puesto que en este significado se sustenta, de forma casi exclusiva, el proceso de enseñanza de la fracción en el sistema educativo español. Es más, este mismo significado también se utiliza para introducir el número decimal como "otra forma" de escribir las fracciones decimales.

En la segunda parte de este trabajo enunciamos una propuesta didáctica alternativa que elude el significado de la fracción como relación parte-todo, y cuyos referentes principales son la fenomenología y la epistemología del número racional. El objetivo principal que ilumina esta propuesta es la de incrementar la comprensión de los alumnos sobre el número racional, entendido tal incremento en el sentido que le otorgan Hiebert y Carpenter (1992). Con esa finalidad hemos caracterizado distintos modelos de aprendizaje para alcanzar objetivos parciales: el modelo de medida para introducir las fracciones, el modelo de cociente para fortalecer las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal, y el modelo de razón para construir ideas sobre proporcionalidad aritmética.

Además de los enunciados generales de la propuesta, solamente podemos incluir una descripción de las características esenciales de la propuesta didáctica en cuarto curso de Educación Primaria (9-10 años), así como el enunciado de algunos de los resultados obtenidos al implementar la propuesta en el aula.

1. Parte I: Consideraciones sobre el significado parte-todo

El número racional positivo sintetiza diversos significados o interpretaciones que han participado en la construcción de este concepto. En estas condiciones parece adecuado que la enseñanza de la representación fraccionaria del número racional se articule alrededor de estos significados. Hay autores como Behr et al. (1993, pág. 14), que admiten cinco significados diferenciados de la fracción: parte-todo, cociente, razón, operador y medida; mientras que otros autores consideran el significado parte-todo incluido en los de cociente y medida (Kieren, 1993), o lo consideran como una razón (Figueras, 1988).

La realidad del sistema educativo español es que la relación parte-todo prioriza el proceso educativo sobre la fracción (Morcote y Flores, 2001); por tanto, resulta pertinente responder a tres cuestiones relacionadas con el proceso instructivo fundamentado desde la relación parte-todo: ¿es un significado diferenciado o está incluido en otros?, ¿por qué se prioriza su utilización?, ¿qué efectos provoca en el aprendiz? Las respuestas a estas cuestiones las buscamos en la práctica docente, en la interpretación de las formas de presentación de las fracciones a través de los manuales escolares que ha utilizado el sistema educativo español.

1.1 La fracción con significado de parte-todo

Al iniciar la enseñanza de las fracciones aparecen tareas similares a la que enunciamos y en la que reconocemos el significado parte-todo.

Tarea 1: Expresa con una fracción la parte pintada de la figura 1:

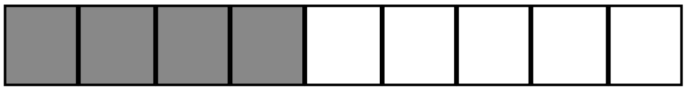

Fig. 1.

La resolución de este tipo de tareas exige del escolar realizar transferencias entre representaciones gráficas y representaciones simbólicas. Para ello, debe actuar del siguiente modo:

1. Interpretar, en la representación gráfica, aquellos aspectos que representan el "todo" y los que representan las partes destacadas.
2. Realizar un doble recuento: el de las partes iguales que forman el "todo" y el de las partes destacadas.
3. Representar, de forma simbólica, el resultado de los dos recuentos: colocar debajo de una raya el resultado de contar el "todo", y escribir, encima de la raya, el resultado de contar las partes destacadas.

Esta tarea resulta representativa de lo que entendemos por el significado parte-todo: la relación simbólica que se establece entre dos números naturales a partir de una representación gráfica. Posteriormente, y desde estas representaciones gráficas, el proceso instructivo formula definiciones sobre los componentes de la fracción: el denominador indica las partes que existen y el numerador las partes que se consideran.

Como características, desde la perspectiva cognitiva, de la construcción del significado parte-todo mediante tareas como la enunciada, cabe señalar las siguientes:

1. Buena parte del conocimiento se adquiere de forma visual. Las tareas se presentan con gráficos, generalmente figuras geométricas regulares, en las que se destaca, mediante recursos gráficos o colores, alguna parte.
2. Se ignora la medida de magnitudes. Al escolar se le oculta la existencia de un proceso de medida, puesto que en la instrucción se producen los siguientes hechos:

    - Omisión de la magnitud utilizada. En el enunciado de las tareas se suele utilizar la magnitud superficie, pero no se hace mención de ella porque la actividad se resuelve sin realizar la medida de ninguna cantidad de superficie, simplemente hay que hacer dos recuentos.
    - Indefinición de la unidad. El "todo" o unidad no necesita que se muestre de forma explícita. Por este motivo las figuras suelen presentarse superpuestas y claramente diferenciadas según el atributo del color de modo que el alumno no tiene la necesidad de reconocer la unidad para resolver la tarea.
    - Irrelevancia de la igualdad de cantidades de magnitud. El alumno debe reconocer el número de regiones que conforman dos figuras planas, pero el énfasis se pone en la cardinalidad, no en la igualdad de las superficies de las regiones que aparecen en el fraccionamiento.

3. Se refuerza el sentido del número natural. La respuesta a la tarea se alcanza realizando un doble recuento y, por lo tanto, el alumno no ve la necesidad de introducir ninguna estructura numérica superior a la del número natural.
4. La fracción no tiene el status de número. Ante el escolar la fracción aparece como la relación simbólica entre dos números naturales, pero para este escolar dicha expresión simbólica no tiene la entidad de número porque la entiende como una situación descriptiva.
5. Promueve el aprendizaje pasivo. La relación entre la parte y el todo presenta una situación estática entre cantidades de superficie; no hay situación problemática porque la tarea está perfectamente preparada para asegurar el éxito de los escolares.

1.2. Origen del significado parte-todo

En la génesis histórica de la fracción hemos buscado aquellas actividades humanas que dieron lugar a la aparición de este concepto. En esta génesis caben situar los significados de medida, cociente (con sentido partitivo) y razón. Brevemente señalamos la diferencia entre estos tres significados y el de parte todo, y lo haremos mostrando cómo la tarea 1 no tiene cabida en ellos:

La relación parte-todo no tiene significado de medida

No es infrecuente que se identifiquen los significados de parte-todo y de medida. Consideramos conveniente establecer las diferencias existentes entre ambos significados, y lo vamos a hacer desde una nueva reformulación de la Tarea 1 (Fig. 2):

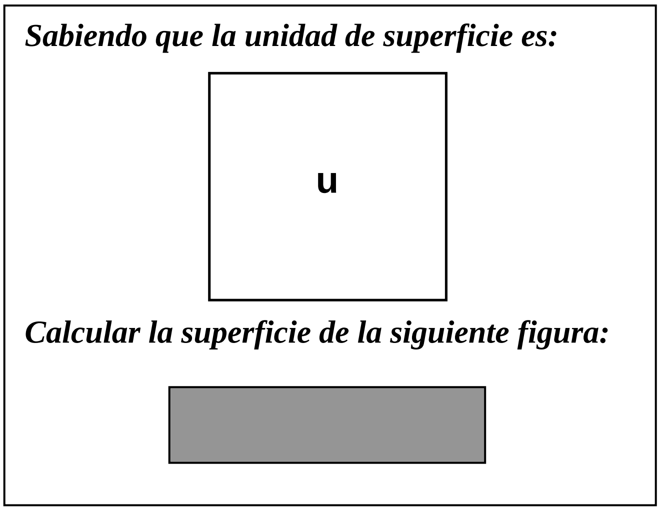

Fig. 2. Reformulación de la tarea 1

Ahora la respuesta a la tarea no es evidente porque nos encontramos ante un problema cuya solución no es inmediata puesto que, ahora, el resolutor debe una tomar decisiones y proceder por ensayo y error:

1. Es evidente que la superficie a medir no contiene un número entero de veces la unidad de medida u; por tanto, hay que decidir sobre el tamaño de una nueva unidad de medida que, necesariamente, ha de ser una parte alícuota de la unidad u. Pero, ¿cuál es esa parte o subunidad?, ¿la mitad de u, la tercera parte de u,...?; no queda otra opción que construir tal subunidad y comprobar que está contenida un número entero de veces en la superficie a medir.
2. Una vez finalizado el proceso, hay que expresar el resultado de la medida. Y este resultado dependerá de la técnica utilizada en el proceso de medida: habrá que mencionar la subunidad o subunidades utilizadas y el tamaño de éstas respecto a la unidad u. En consecuencia, pueden aparecer distintas formas de expresar el resultado de la medida, como 4/9 de u, 1/3 + 1/9 de u, 8/18 de u…

A la vista de estas consideraciones resulta evidente que el significado de medida es muy diferente del significado parte-todo, tanto por las exigencias cognitivas que exige la tarea, como por las ideas matemáticas que se derivan de la resolución de la tarea.

La relación parte-todo no tiene significado de cociente

Entendemos que el significado de cociente se corresponde históricamente con la idea de cociente partitivo, a la expresión del resultado de repartir de forma igualitaria **a** unidades entre **b** personas, o de distribuir **a** unidades en **b** grupos iguales. Por tanto, en esta idea intervienen la cantidad a repartir (que puede ser continua o discreta) y el número de grupos o personas que participan (siempre un número natural). Con estas consideraciones, la expresión a/b indica el resultado del reparto, la cantidad de la magnitud considerada que corresponde a cada uno de los participante. Además, la fracción a/b aparece solamente si se aplica la técnica del reparto en una sola fase: cada una de las **a** unidades a repartir se fraccionan en **b** partes iguales y a cada participante se le entrega una parte de cada una de las unidades previamente fraccionadas.

Por consiguiente hay que considerar a los significados de cociente y de parte-todo como significados diferenciados.

La relación parte-todo no tiene significado de razón

Sostenemos que el significado de razón surge históricamente en actividades comerciales en las que aparece la necesidad de comparar dos cantidades de una misma magnitud o de dos magnitudes diferentes, y que el resultado de la comparación define una nueva magnitud. Posteriormente, se amplió hacia nuevos usos: la probabilidad surge de comparar dos cardinales; el “sabor” o concentración de una mezcla es la razón entre las cantidades de dos ingredientes; la escala es una razón de semejanza; etc.

El significado parte-todo se podría considerar como un caso particular del significado de razón, se interpretaría como la relación entre cantidades de la misma magnitud y medidas con la misma unidad; y, en estas condiciones, el resultado de tal relación sería un número no medida, como ocurre en el caso de las escalas. Ahora bien, desde el enunciado de la Tarea 1 el alumno no puede percibir esta relación; para dicho alumno la fracción 4/9 indicaría que estamos señalando 4 regiones de las 9 en las que está fraccionado el “todo”, y la fracción no pretende expresar una razón entre áreas, no pretende definir una nueva magnitud. Por lo tanto, la relación parte-todo tiene un significado claramente diferenciado del de razón.

Además de los tres significados mencionados anteriormente, las propias matemáticas aportan dos significados de la fracción -operador y cociente indicado- que están presentes en el proceso educativo. Pero estos significados son claramente distintos del significado parte-todo, como mostramos brevemente.

La relación parte-todo no tiene significado de operador

Entendemos que el significado de operador es el de una función racional que produce transformaciones de una cantidad de magnitud, obteniéndose otra cantidad de esa misma magnitud medida con la misma unidad. Esta transformación se logra mediante la realización de dos acciones: multiplicar la cantidad inicial por el número entero del numerador y dividir el resultado por el número entero del denominador. Ahora bien, para poder aplicar estas transformaciones es preciso conocerlas previamente, y tal conocimiento lleva implícito el símbolo **a/b** como convenio que expresa que **a** es el número por el que se multiplica la cantidad y **b** por el que se divide.

Con el significado parte-todo la fracción 4/9 describe una situación estática que es muy diferente de la transformación que impone la función racional: el significado parte-todo es un significado claramente diferenciado del significado de operador.

La relación parte-todo no tiene significado de cociente indicado

Es frecuente que los textos escolares indiquen que la fracción expresa el cociente indicado de dos números. Bajo este enunciado encontramos reminiscencias de la construcción formal del conjunto de los números racionales, aunque los textos escolares solamente se preocupan por mostrar que en este conjunto numérico siempre se pueden dividir dos números enteros. Desde la perspectiva del alumno este significado de la fracción es muy diferente del de parte-todo, pues no tiene sentido el cociente de dividir el número de partes que se consideran entre el número de partes existentes.

A modo de conclusión

A la vista de las consideraciones anteriores, vemos que la fracción con significado parte-todo no surge de las necesidades humanas (en el sentido que nombra Bishop, 1999), puesto que la génesis histórica del número racional se encuentra en la medida de cantidades de magnitud –bien realizada directamente o bien realizada para expresar el resultado de un reparto–, o en la comparación de dos cantidades de magnitud, ya medidas, que da sentido a la idea de razón. Este significado tampoco es un significado generado por las propias matemáticas.

Por tanto, pensamos que el origen del significado parte-todo habría que situarlo en la práctica educativa, habría que ubicarlo entre los recursos didácticos creados por necesidades del proceso de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas. En efecto, en uno trabajo reciente (Escolano, 2004) se pone de manifiesto cómo en los textos escolares españoles se puede detectar la presencia del significado parte-todo desde el primer tercio del siglo XX. Asimismo, señala dos razones que justificarían la introducción y consolidación de este recurso didáctico:

- Eludir el proceso de medida con objetos tangibles (dificultad del propio proceso de medida, gestión del aula por la utilización de material, control de la diversidad de resultados obtenidos, prioridad de la enseñanza del Sistema Métrico Decimal, etc.),
- Abreviar los períodos de instrucción: el significado parte-todo permite una introducción rápida de la representación simbólica de la fracción y, además, con elevados niveles de éxito a corto plazo.

1.3. Consecuencias de la práctica docente

La aparente facilidad, desde el punto de vista docente, con la que se introduce el significado del número racional como relación parte-todo también tiene unos costos en términos de comprensión. Aparecen así los que Brousseau (1983) denomina *obstáculos didácticos*, o dificultades y errores que se originan como consecuencia del modo en que se presentan los conceptos matemáticos. Haremos referencia a tres de estos obstáculos que tienen especial relevancia en la construcción significativa de las fracciones por parte de los escolares españoles:

1º Se obstaculiza la formación de concepciones adecuadas.

Un seguimiento de las actividades que proponen los textos escolares, sustentadas por el significado parte-todo, nos ha permitido identificar en los alumnos las siguientes ideas erróneas:

- *No existen las fracciones impropias*. El alumno se crea la idea de que el número de partes que se toman debe ser menor o igual que las partes del “todo” (Bonotto, 1993).
- *Las fracciones son números no medida*. Las fracciones se presentan al margen de las magnitudes, de modo que, por ejemplo, ante representaciones gráficas de medio cuadrado, o de medio círculo o de media tarta, el alumno escribirá simplemente 1/2. Desde esta creencia, y varios años después de recibir instrucción, no resulta infrecuente que estudiantes para Maestro al enfrentarse a problemas del tipo “encontrar el número de manzanas que había en una cesta sabiendo que después de retirar la mitad de las manzana menos 7 quedan 40”, digan que el

problema no tiene sentido porque el resultado de la operación 1/2 – 7 es un número negativo. (Gairín, 2004a)

- *El "todo" o unidad no es un número*. En el proceso instructivo no se explicita el sentido y funciones de la unidad, lo que provoca la identificación de las fracciones del tipo **a/a** con la unidad, pues los estudiantes tienden a señalar que este tipo de fracciones representa el todo, o que han tomado **a** elementos (Gairín, 2001)

2º Se obstaculiza la separación conceptual del número racional y del número natural.

La instrucción desde el significado de parte-todo no justifica la introducción de una nueva estructura numérica puesto que para la resolución de las tareas basta el recuento de números naturales, lo que provoca ideas erróneas en los alumnos:

- *La fracción está formada por dos números naturales*. La fracción describe una situación estática en la que hay involucrados dos números naturales; por tanto, ni la fracción, ni la expresión decimal, se entienden como un solo ente numérico de naturaleza diferente a la de los números naturales.
- *Las relaciones y operaciones con números racionales tienen el mismo significado que en los números naturales*. Los alumnos extienden los significados y técnicas del número natural a una nueva situación en la que, desde sus creencias, los entes numéricos no cambian de sentido: el orden de los números racionales es igual que el de los naturales, la multiplicación de racionales es una suma reiterada, el resultado del producto de dos números racionales es mayor que cualquiera de los factores, etc.

3º Se obstaculiza la formación de ideas abstractas.

No se sitúa a los alumnos en disposición de buscar estrategias de resolución de situaciones problemáticas que le faciliten el paso del mundo de los objetos al mundo de las ideas; así, los alumnos se forjan creencias como las siguientes:

- *Los conceptos son las técnicas asociadas a los mismos*. Para los alumnos las ideas sobre relaciones y operaciones se limitan al uso de sus técnicas asociadas; por ejemplo, el significado de la suma de fracciones es el algoritmo que proporciona el resultado de dicha suma.
- *Los contenidos útiles son los procedimentales*. Los alumnos memorizan las técnicas de cálculo sin preocuparse de sus fundamentos teóricos, lo que provoca resultados de esta índole: *solo el 33% de los alumnos de 6º curso de Educación Primaria* (12 años) *responde correctamente a la pregunta ¿qué tanto por ciento representan 2/5?* (INCE, 2002, pág.2).

2. Parte II: Propuesta alternativa

Hemos puesto de manifiesto las limitaciones de la enseñanza del número racional basada en el uso casi exclusivo del significado parte-todo. Otros investigadores consideran que el parte-todo es el menos valioso de los significados de la fracción (Lamon, 2001).

Con el propósito de mejorar la práctica docente analizamos la viabilidad de ofrecer a los escolares un proceso instructivo diferente: que eluda el significado parte-todo y que ayude a superar las dificultades de comprensión de las fracciones que ya hemos señalado.

Tras un periodo de análisis y reflexión formulamos una propuesta didáctica genuina para la enseñanza del número racional a lo largo de los tres últimos cursos de Educación Primaria (desde los 10 hasta los 12 años), con tres objetivos principales:

1º Favorecer la construcción de concepciones adecuadas.

Al escolar se le presenta un proceso instructivo sustentado en el uso de modelos de aprendizaje[1] que tienen como característica común la medida de cantidades de magnitud. De este modo disponen de un mundo de objetos físicos en los que justificar los resultados matemáticos.

2º Potenciar la idea de número racional

Se provoca una ruptura entre la idea de número natural y la de número racional a partir de sus diferentes usos: contar y medir son actividades de naturaleza diferenciada que demandan técnicas y procesos distintos. En consecuencia, los números naturales y los números racionales se representan con signos distintos, las relaciones y operaciones entre ellos tienen significados también distintos, y también son distintos los algoritmos de cálculo que se utilizan en los dos campos numéricos.

3º Facilitar la construcción de ideas abstractas.

A través de los modelos de aprendizaje el alumno dispone de una herramienta que, mediante la interacción con el mundo de los objetos, le facilita la construcción mental de los números racionales y le permite la evaluación semántica de cualquier expresión simbólica en la que aparezcan números racionales.

Esta propuesta, que tiene en cuenta la génesis histórica del número racional, se sustenta en una práctica educativa que prioriza el uso de modelos de aprendizaje en tanto en cuanto constituyen soportes físicos estables sobre los que los alumnos construyen sus conocimientos. Ahora bien, como los modelos de aprendizaje tienen unas potencialidades y unas limitaciones que delimitan su utilización en el proceso

[1] Gairín J. M. (2004 b): Números racionales. Modelos y significados.

educativo, hemos optado por utilizar tres modelos distintos con intencionalidades educativas bien diferenciadas:

- Los modelos de medida directa se utilizan en cuarto (10 años). En estos modelos la representación fraccionaria aparece desde la necesidad de comunicar el resultado de una acción de medida de una cantidad de magnitud.
- Los modelos de cociente, basados en la medida del resultado de un reparto igualitario, se utilizan en quinto curso (11 años)[2]. Estos modelos permiten introducir la notación decimal y conectarla con la fraccionaria.
- Los modelos de razón entre cantidades de magnitud en utilizan en sexto curso (12 años). Estos modelos vinculan el número racional con las ideas de proporcionalidad.

El orden seguido en la introducción de estos modelos se ha establecido teniendo en cuenta las capacidades cognitivas que exige cada uno de ellos. En efecto, aún siendo conscientes de que la medida presenta dificultades derivadas de la propia naturaleza del concepto, entendemos que son mayores las dificultades en el caso del cociente (además de las dificultades de la medida se añaden las derivadas de la idea de cociente partitivo), y de la razón (hay que disponer de la medida de dos cantidades de magnitud para después establecer relaciones entre ellas). Con el uso de estos modelos se espera que los escolares integren los diferentes significados del número racional, así como los sistemas de representación asociados, y que se evite la exclusividad de alguno de ellos puesto que cualquiera de los significados destaca alguno de los aspectos del número racional mientras que oscurece otros (Figueras, 1988).

La metodología de la propuesta toma como referente el paradigma constructivista del aprendizaje: prioriza el trabajo personal y en grupo de los alumnos, y potencia el aula como espacio natural para la construcción del conocimiento.

El proceso de instrucción parte del trabajo de los alumnos, de sus respuestas a las situaciones problemáticas que se les proponen y que han sido elaboradas, organizadas y secuenciadas de acuerdo con los modelos de aprendizaje elegidos. Una vez finalizada la tarea (en el aula o en sus casas) hay un proceso de reflexión colectiva en el que los alumnos discuten las respuestas incorrectas y exponen distintas estrategias utilizadas en la resolución de la tarea, siendo el profesor quien institucionaliza el conocimiento matemático. Todos los alumnos disponen, una vez terminado el tema, un pequeño texto encuadernado en el que figuran los conceptos y procedimientos objeto de la instrucción, así como actividades resueltas y propuestas.

Esta propuesta, que forma parte de una investigación en Didáctica de la Matemática, se implementó, durante los cursos 1999-00, 2000-01, 2001-02 y 2003-04 en el colegio público "Tío Jorge" de la ciudad de Zaragoza (España). A lo largo de

[2] Una descripción de las características del modelo puede consultarse en Escolano (2002a y 2002b)

esta experimentación participaron 160 alumnos y se implicaron 5 profesores del colegio.

2.1 Enseñanza de las fracciones con el significado de medida

Por razones de espacio no podemos incluir en este trabajo la propuesta didáctica completa, por lo que nos limitamos a enunciar los aspectos más destacables de dicha propuesta correspondientes a cuarto curso de Educación Primaria (10 años); es decir, la parte de la propuesta didáctica en que los alumnos tienen el primer contacto con la fracción.

El modelo de medida directa

Es el modelo de aprendizaje utilizado en este curso, entendiendo como tal modelo de aprendizaje un entorno físico con el que se esquematiza y recrea una parte del mundo real, con variables bien definidas, estable frente a interacciones con el mundo exterior, y que permite las acciones de los sujetos (Gairín, 1999, pág. 15). En este caso de los modelos de medida las cuatro variables tomaron los siguientes valores:

a) Magnitudes medibles.

Se utilizan las de longitud, superficie y cardinalidad. Se eligen estas magnitudes porque interesa utilizar las que figuran en los currícula oficiales, y porque este tipo de magnitudes facilitan al escolar la obtención del resultado de la medida.

b) Objetos en los que resulta perceptible una cantidad de magnitud.

Los objetos utilizados son listones de madera, tiras de papel, cartulinas, folios, cubos ensamblados, pues se pueden manipular fácilmente, no crean problemas de limpieza o de seguridad, y son agradables al tacto.

c) Acciones realizadas sobre los objetos.

Se propone a los escolares la medida de cantidades de magnitud en diferentes situaciones.

d) La técnica elegida para realizar la acción es la de medir en una sola fase[3].

[3] Existen otras técnicas de medida que no se ha considerado pertinente su utilización por estar alejadas de las capacidades cognitivas de los escolares de 4º curso. Así ocurre, por ejemplo con la técnica de medir en varias fases (utilizar la unidad y sucesivos fraccionamientos de ésta o de las subunidades obtenidas en a partes iguales y cuyo resultado se expresa de la forma $n + n_1\frac{1}{a} + n_2\frac{1}{a^2} + \ \ldots \ + \ n_p\frac{1}{a^p}$ de unidad), o con la técnica de medir por conmensuración (hallar el número de veces (*b*) que hay que reiterar la cantidad a medir y el número de veces (*a*) que hay que reiterar la unidad (u) hasta que las cantidades reiteradas sean iguales; por lo que el resultado a/b expresa la razón entre cantidades de magnitud)

Consiste en fraccionar la unidad de medida con la finalidad de crear una subunidad que esté contenida un número entero de veces en la cantidad a medir. La elección de esta subunidad se logra mediante un proceso de ensayo y error y existen múltiples subunidades para medir una misma cantidad. El resultado de la medida se expresa mediante una fracción.

Consideraciones sobre los contenidos

Una vez concretados los modelos de medida que utilizamos en nuestra propuesta, hay que justificar las decisiones que se han tomado para organizar y secuenciar los contenidos de dicha propuesta:

1º Comenzar con la notación fraccionaria

Una idea esencial para la comprensión de los números racionales es la del fraccionamiento o partición de la unidad en un número finito de partes iguales. Esta idea aparece cuando la unidad de medida es mayor que la cantidad a medir, cuando se necesita establecer una subunidad de medida que quepa un número de veces en la cantidad a medir (Gairín, 2001). La idea de fraccionamiento aparece con la técnica de medir en una fase.

Es más, si la instrucción comenzase por la notación decimal se plantearían algunas cuestiones de difícil respuesta: ¿cómo se realiza una construcción efectiva de la fracción a partir de la notación decimal?, o ¿cómo se justifica la existencia de números racionales no decimales?

2º Trabajar inicialmente con la longitud

Es conveniente que las situaciones problemáticas que sirven para introducir la fracción conlleven la medida de magnitudes realizadas con técnicas lo más sencillas posible; de lo contrario la tarea de medir acapararía toda la atención del escolar en detrimento de la resolución del problema. En este sentido, hemos optado por trabajar inicialmente la longitud porque su carácter unidimensional facilita la percepción de la cantidad y porque facilita la construcción de cantidades de longitud conocida su representación fraccionaria.

Una vez que el alumno está familiarizado con la notación fraccionaria interesa que no asocie esta representación, exclusivamente, a la longitud, sino que la extienda a otras magnitudes. En este sentido proponemos el trabajo con la magnitud superficie porque fortalece el significado de fracción como resultado de la medida de cantidades de magnitud que tienen formas distintas, y desaconsejamos el uso de la magnitud masa porque crea dificultades sobre su percepción visual.

3º Incorporar la magnitud cardinalidad

El modelo basado en la magnitud cardinalidad presenta características diferentes al resto de los modelos construidos con magnitudes continuas porque el fraccionamiento de la unidad no puede hacerse en el número de partes que se desee, tan solo puede hacerse teniendo en cuenta los divisores del cardinal de la unidad. Proponemos el trabajo con esta magnitud porque ofrece al escolar una nueva perspectiva del significado de la fracción y porque es un conocimiento socialmente útil por su amplia presencia en el mundo real.

4º Anteponer la enseñanza de las fracciones a la del Sistema Métrico Decimal

Si se adelanta la enseñanza del Sistema Métrico Decimal a la enseñanza de la fracción resulta muy complejo justificar la necesidad de introducir el conjunto de los números racionales para resolver el problema de la medida; en efecto el Sistema Métrico Decimal se ideó pensando que cualquier cantidad se pueda expresar con un número natural (para lo que basta elegir una unidad lo "suficientemente pequeña"). Es más, la enseñanza de este Sistema lleva asociado el uso de la regla graduada, y esta práctica educativa obstaculiza la aparición de ideas sobre las fracciones.

5º La instrucción se limita a tres bloques de contenido: Construcción del sistema de representación fraccionario con magnitudes continuas, relaciones de equivalencia y orden de fracciones y construcción del sistema de representación fraccionario con la magnitud cardinalidad.

Ejemplificación de la primera tarea de medida

Con la finalidad de ilustrar este discurso, nos parece oportuno incluir la situación inicial, la primera de las tareas que se proponen al alumno, con el fin de que el lector pueda hacerse una idea más precisa de cómo se hace surgir en el alumno la idea de fracción y de qué tipo de tareas se proponen para afrontar los contenidos de este curso.

Deseáis encargar, por carta, una barra para colgar la cortina que tenéis en la pared[4].

¿Qué le escribiríais al vendedor para que os venda una barra que tenga la misma longitud que la de la cortina?

El vendedor nos ha mandado lo que llama una unidad de medida que tiene la misma longitud que las tiras de papel que os entrego.

También os entrego una carta para que solo tengáis que rellenar los espacios en blanco.

En este momento incipiente del proceso de enseñanza los alumnos desconocen la representación simbólica de la fracción; sin embargo, son capaces de medir la longitud de la barra. Mostramos la respuesta que escribe Iratxe que mide correctamente la barra y que está en condiciones de comprender la representación simbólica de la fracción:

[4] En la pared se cuelga una pequeña cortina de papel con una barra de madera que la sujeta

A la atención del Sr. vendedor de barras de cortinas.

Zaragoza, 8-3-04

Estimado Sr. Vendedor:

Deseo recibir en mi domicilio una barra de cortina que mida una longitud de 3 cuartos de unidad.

Atentamente:

Firmado: Iratxe

P.D. Le voy a decir cómo he realizado la medida de la longitud de la barra:
1º He doblado la unidad en 4 partes 2º He colocado la barra encima de la unidad 3º Me he fijado en que la barra medía 3 partes de las que había doblado 4º Por lo que la barra mide 3cuartos de unidad

2.2. Resultados

Nos limitamos a enunciar algunas conclusiones de las obtenidas en la investigación referidas a cuarto curso. Estos resultados provienen de los análisis (cualitativos y cuantitativos) de las 30 tareas que realizan los alumnos de este curso a los largo de las 23 sesiones de clase, de 50 minutos de duración, que se desarrollaron en la fase experimental.

• Comprensión de los alumnos

1º Los alumnos no intuyen la necesidad de fraccionar en partes iguales la unidad de medida cuando intentan resolver la primera situación problemática, lo que obliga al profesor a sugerir esta idea central para dar significado a la fracción.

2º En las tareas de medida los alumnos encuentran con facilidad la fracción que expresa la cantidad longitud, superficie o cardinalidad. Sin embargo, tienen serias dificultades en el trabajo con la magnitud masa.

3º Los alumnos saben construir la cantidad de magnitud a partir del conocimiento de la representación simbólica de la fracción, aunque el porcentaje de acierto desciende si se compara con los de las tareas de medida.

4º No se detectan diferencias significativas en la comprensión de los escolares cuando trabajan con las magnitudes longitud o superficie.

5º Los alumnos aceptan de forma natural la existencias de fracciones mayores, menores o iguales que la unidad.

6º El concepto de equivalencia de fracciones aparece de forma natural, desde las primeras tareas de medida, porque los alumnos expresan la medida de una misma cantidad con distintas subunidades.

7º Los alumnos saben construir fracciones equivalentes a una dada utilizando como recurso didáctico materiales manipulativos. Sin embargo, la mayoría de los alumnos tienen dificultad para formular la regla general de obtención de fracciones equivalentes y para aplicar dicha regla en las tareas de comparación de fracciones.

8º Los alumnos de cuarto curso saben ordenan fracciones utilizando como estrategia básica el significado de fracción como medida, es decir, justifican sus resultados a partir de las cantidades de magnitud que expresan las fracciones. Este es el caso de Abel que al resolver la tarea 24: "*Has comprado dos cartulinas: una tiene una superficie de 5/4 de unidad y otra tiene una superficie de 4/3 de unidad. ¿Qué cartulina tiene menor superficie*?", ofrece estos argumentos (Fig. 3):

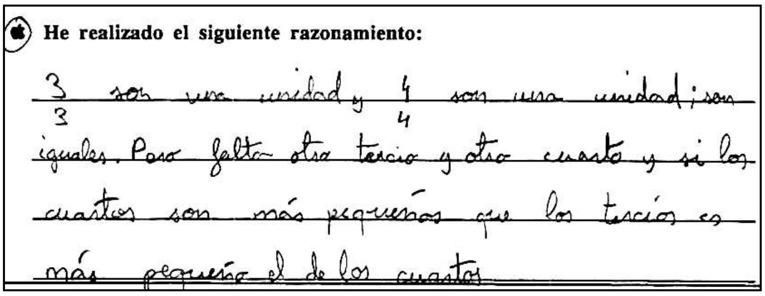
He realizado el siguiente razonamiento:
3/3 son una unidad y 4/4 son una unidad; son iguales. Pero falta otro tercio y otro cuarto y si los cuartos son más pequeños que los tercios es más pequeño el de los cuartos

Fig. 3. Argumentos de Abel en la tarea 24.

•Potencialidades de la propuesta didáctica

1º. Los modelos utilizados han facilitado a los alumnos el paso de las representaciones manipulativas a las representaciones gráficas; y, aunque las representaciones gráficas sean imprecisas, éstas les sirven para fijar los aspectos esenciales de los procesos de medida, como muestra el caso de Silvia que en la tarea 24 (Fig. 4), anteriormente enunciada, utiliza este dibujo:

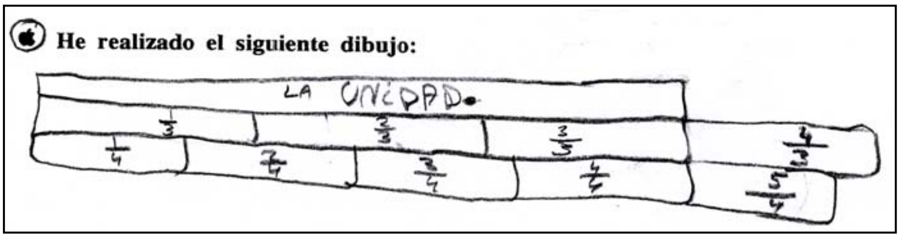

Fig. 4. Respuesta de Silvia en la tarea 24.

2º Los modelos de aprendizaje que se han utilizado son coherentes con la línea metodológica que caracteriza la propuesta de enseñanza, porque:

a) Facilitan el aprendizaje de los alumnos a partir de acciones físicas con objetos manipulables.

b) Respetan los diferentes niveles de comprensión de los alumnos, puesto que el diseño de las tareas les deja libertad para elegir la estrategia más adecuada a su nivel de abstracción para resolver el problema.

c) Potencian la construcción social del conocimiento porque, durante la evaluación conjunta de las tareas, los alumnos exponen las estrategias de resolución puestas en juego.

• Limitaciones de la propuesta

1. La magnitud masa ha causado dificultades asociadas a la complejidad de la percepción visual de cantidades de esta magnitud, así como a las dificultades de realizar el fraccionamiento con una balanza de dos brazos.
2. La mayor parte de los alumnos de cuarto curso no alcanzan a gestionar la equivalencia de fracciones a nivel simbólico: no formulan la técnica de obtención de fracciones equivalentes a una dada y no saben utilizar la equivalencia para comparar fracciones. Estos alumnos saben comparar fracciones manipulando objetos y, sin embargo, al trabajar con los símbolos suman la misma cantidad al numerador y al denominador para encontrar fracciones equivalentes a una dada. Estos hechos nos hacen pensar que la gestión de la equivalencia a nivel simbólico debe ubicarse en un curso posterior, en quinto curso.
3. Se intuye que, a largo plazo, los alumnos de Educación Primaria pueden haberse forjado la idea de que la medida de cualquier cantidad continua puede ser expresada mediante una fracción. Asumimos que esta limitación deberá superarse, en estudios posteriores, cuando los alumnos estén capacitados para entender tanto los procesos infinitos de aproximación en la recta real, como la densidad de los números racionales en los números reales.

3. Parte III: Discusión e implicaciones

La experimentación realizada y los resultados obtenidos ponen de manifiesto que es factible una propuesta didáctica alternativa a la tradicional enseñanza sustentada por el significado parte-todo. Es más, durante cuatro cursos hemos implementado nuestra propuesta respetando la programación y temporalización del área de Matemáticas que figura en el Proyecto Curricular del Centro.

Las respuestas que dan los alumnos a las tareas propuestas indican la desaparición de obstáculos didácticos que, como hemos manifestado, se producen si en la instrucción se utiliza el significado parte-todo: las fracciones propias e impropias tienen el mismo estatus como expresión de cantidades de magnitud; las fracciones son entes numéricos asociados a la medida y la unidad de medida juega un papel esencial para interpretar las fracciones.

Además, los alumnos perciben que la fenomenología asociada a la fracción difiere sustancialmente de la del número natural. Para los alumnos la fracción surge como una necesidad para formular la respuesta a problemas en los que los números naturales se muestran insuficientes, situaciones en las que el resultado de la medida no puede expresarse con un número natural.

Desde sus experiencias previas con los números naturales, para un niño de 9-10 años resulta difícil de admitir que una cantidad se puede representar de formas diferentes. Sin embargo, la constatación personal de las actividades realizadas con materiales manipulativos lleva a los alumnos que han participado en la experimentación a admitir y comprender la existencia de fracciones equivalentes, a admitir que existan formas diferentes de escribir la misma cantidad.

También queremos dejar constancia de que, para estos alumnos, la comparación de fracciones es una idea muy nítida: una cantidad puede ser mayor, menor o igual que otra; mientras que la interpretación y aplicación, a nivel simbólico, de las correspondientes técnicas de cálculo asociadas les resulta bastante dificultoso.

Pero esta propuesta también presenta desventajas respecto a la tradicional enseñanza sustentada en el significado parte-todo: el aprendizaje es más dilatado en el tiempo porque se retrasa la introducción de la representación simbólica de la fracción. No obstante, podemos afirmar que los alumnos que intervienen en las fases experimentales desarrollan ideas adecuadas de la fracción como resultado de una medida cuando interactúan con distintos sistemas de representación (manipulativos, gráficos y verbales). Y, a pesar de que en cuarto curso no son capaces de gestionar correctamente la representación simbólica de la fracción han sentado las bases para hacerlo en el siguiente curso. Hemos constatado que los mismos alumnos, un año después, en quinto curso de Educación Primaria (11 años), han ido gradualmente utilizando la estrategia basada en la equivalencia de fracciones para resolver situaciones problemáticas sobre relaciones y operaciones con fracciones.

Hemos presentado una propuesta que en la fase experimental ha mostrado más ventajas que inconvenientes respecto a la enseñanza tradicional; queda el desafío de que otras investigaciones confirmen la incidencia de dicha propuesta en un incremento de la comprensión de los escolares y, caso de ser así, queda el reto de formar a unos profesores para que enseñen de forma diferente a como aprendieron.

Bibliografía

- Behr, M. J., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1993). “Rational Numbers: toward a Semantic Analysis. Emphasis on the Operator Construct”. En: Carpenter, T.P., Fennema, E. y Romberg, T. A. (Edits): *Rational Numbers. An integration of Research*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, New Jersey.

- Bezuk, N. S. y Bieck, M. (1993). “Current research on rational numbers and common fractions: summary and implications for teachers”. En: Owens, D. T. (Edit.): *Research ideas for the classroom. Middle grades mathematics.* Macmillan Publishing Company, New York.
- Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Paidós, Barcelona.
- Bonotto, C. (1993). “A research project on rational numbers*”.* Department of Pure and Applied Mathematics, University of Padova, Italy*. Paper presented at the International Study Group on the Rational Numbers of Arithmetic*, University of Georgia, Athens.
- Brousseau, G. (1983) *Problemas en la enseñanza de los decimales. Problemas de didáctica de los decimales.* Universidad de Córdoba, Argentina.
- Escolano, R. (2002a). “Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde el modelo cociente”. En Palacián, E y Sancho, J. (Edit.): *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, JAEM*. Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Zaragoza, Volumen II, pp. 593-598.
- Escolano, R. (2002b). “Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde el modelo cociente”. En Moreno, M.F. et al. (Edit.): *Investigación en Educación Matemática*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almeria, pp. 149-158.
- Escolano, R. (2004). “Presencia histórica de la fracción en los libros de texto del sistema educativo español”. *Comunicación presentada al Grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico. VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. La Coruña, 10 al 13 de septiembre de 2004.
- Figueras, O. (1988). *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionale*s. Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzado del IPN (Instituto Politécnico Nacional). México.
- Gairín, J. M. (1999). *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación*. Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza.
- Gairín, J. M. (2001). “Números racionales positivos: reflexiones sobre la instrucción”. *Aula*. *Revista de Enseñanza e Investigación Educativa*, VOL. 10, pág. 41-64
- Gairín, J. M. (2004a). “Estudiantes para Maestros: reflexiones sobre la instrucción en los números racionales positivos”. *Contextos educativos (en prensa).*
- Gairín, J. M. (2004 b) “Números racionales. Modelos y significados”. En: Rico, L. (Edit): *El número, agente integrador del conocimiento*. Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid, pp. 99-124
- Hiebert, J. A. Y Carpenter, T. P. (1992). “Learning and teaching with understanding”. En: Grouws, D. A. (Edit.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics.* Macmillan Publishing Company, New York.
- INCE. Instituto Nacional de Calidad y Evaluación. (2002). *Evaluación de la Educación Primaria 1999. Fallos y dificultades de los alumnos en la prueba de Matemáticas*. Secretaría General Técnica del MEC, Madrid

- Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children´s strategies and errors*. NFER-NELSON, Windsor (England).
- Kieren, T. E. (1993). “Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding”. En: Carpenter, T. P., Fennema, E. y Romberg, T. P. (Edits): *Rational Numbers. An Integration of Research*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, New Jersey.
- Lamon, S. J. (2001). “Presenting and Representing: From Fractions to Rational Numbers” En: Cuoco, A.; Curcio, F. (Edits.): *The Roles of Representations in School Mathematics*, 2001 Yearbok of The National Council of Teachers of Mathematics, Reston VA , pp.146-165.
- Llinares, S. y Sánchez, M. A., (1988). *Fracciones*. Síntesis, Madrid.
- Mack, N. K. (1993). “Learning Rational Numbers with understanding: Case of Informal Knowledge”. En: Carpenter, T. P., Fennema, E. y Romberg, T. P. (Edits): *Rational Numbers. An Integration of Research*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, New Jersey.
- Morcote, O. y Flores, P. (2001). “Análisis del conocimiento didáctico sobre las fracciones en un texto escolar de 1º de ESO”. En: Berenguer, J., Cobo, B. y Navas, J. (Edits.): *Investigación en el aula de matemáticas. Retos de la educación matemática del siglo XXI*. Facultad de Ciencias de la Educación de Granada.

Rafael Escolano Vizcarra es profesor del Área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Zaragoza (España) e imparte docencia en la Facultad de Educación de esta Universidad. Es miembro del grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico de la SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática) e investiga en la didáctica del número racional y en la formación del Profesorado.
E-mail: rescolan@unizar.es
Facultad de Educación de la Universidad de Zaragoza
C/ San Juan Bosco, nº 7
50009-Zaragoza (España)

José María Gairín Sallán es profesor del Área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Zaragoza (España) e imparte docencia en las Facultades de Educación y de Ciencias de esta Universidad. Es miembro del grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico de la SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática) e investiga en la didáctica del número racional, en la formación del Profesorado y en juegos educativos matemáticos.
E-mail: jgairin@unizar.es
Facultad de Educación de la Universidad de Zaragoza
C/ San Juan Bosco, nº 7
50009-Zaragoza (España)