UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 68. Agosto 2023
Páginas 1-16

La enseñanza de la derivabilidad de una función en un punto. Sistemas de representación y conocimiento especializado del contenido

Ensinando a diferenciabilidade de uma função em um ponto. Sistemas de representação e conhecimento especializado do conteúdo

Luis Dubarbie, Arantxa García Gallo

Fecha de recepción: 08/11/2022
Fecha de aceptación: 21/06/2023

Resumen	El objetivo de este trabajo es profundizar en la enseñanza de la derivabilidad de una función en un punto. Para ello, se ha diseñado un cuestionario que ha sido contestado por 17 profesores de matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, cuyas respuestas han sido analizadas tanto cualitativa como cuantitativamente de manera descriptiva. Las conclusiones obtenidas nos permiten afirmar que el profesorado se decanta por el uso del sistema de representación algebraico de la derivada y, además, se han identificado diversos aspectos que deberían de formar parte del “Conocimiento especializado del contenido” del profesorado de matemáticas en la enseñanza de la derivabilidad de una función en un punto. **Palabras clave**: Derivabilidad, sistemas de representación, conocimiento matemático, bachillerato.
Abstract	The aim of this work is to deep into the teaching of the derivability of a function at a point. For this purpose, a questionnaire has been designed and answered by 17 mathematics teachers of Compulsory Secondary Education and Baccalaureate, whose answers have been analyzed both qualitatively and quantitatively in a descriptive way. The conclusions obtained allow us to affirm that the teachers opt for the use of the algebraic representation system of the derivative and, in addition, several aspects have been identified that should be part of the "Specialized content knowledge" of mathematics teachers in the teaching of the derivability of a function at a point. **Keywords**: Derivability, representation systems, mathematical knowledge, high school.
Resumo	O objetivo deste trabalho é aprofundar o ensino da derivabilidade de uma função em um ponto. Para tal, foi elaborado um questionário que foi respondido por 17 professores do Ensino Secundário Obrigatório e Ensino Médio, cujas respostas foram analisadas qualitativa e quantitativamente de forma descritiva. As conclusões obtidas permitem

afirmar que os professores optam pela utilização do sistema de representação algébrica da derivada e, além disso, foram identificados vários aspectos que devem fazer parte do "Conhecimento de conteúdo especializado" dos professores de matemática o ensino da derivabilidade de uma função em um ponto.
Palavras-chave: Derivabilidade, sistemas de representação, conhecimento matemático, ensino médio.

1. Introducción

El estudio de la derivada dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en Bachillerato ha sido abordado desde diversos puntos de vista. En este trabajo, estamos interesados en la manera en la que los docentes abordan esta noción matemática en el aula y, en concreto, en los métodos que utilizan para el estudio de la derivabilidad de una función en un punto, en el uso de distintos sistemas de representación y en el conocimiento del profesorado de matemáticas en este contexto.

En el estudio de García et al. (2012) se observa cómo el profesor hace uso de los sistemas de representación algebraico y gráfico, apoyándose en el uso de la tecnología, para el desarrollo de una unidad didáctica dedicada a la introducción de la noción de derivada. Por otro lado, en el trabajo de Gavilán-Izquierdo et al. (2021) se constata el hecho de que el uso de la tecnología en el proceso de enseñanza favorece la construcción de la noción de derivada entre el alumnado, ya que pueden dedicar más tiempo a la reflexión sobre los nuevos contenidos sin la necesidad de realizar excesivos cálculos.

Por otro lado, para la identificación del conocimiento que posee el profesorado de matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato sobre la derivabilidad de una función en un punto, vamos a utilizar el modelo del “Conocimiento matemático para la enseñanza” (Ball et al., 2008). En concreto, dentro de este modelo, la categoría más relevante para el desarrollo de nuestro estudio es la que recibe el nombre de “Conocimiento especializado del contenido”, es decir, aquel conocimiento tanto matemático como didáctico que es propio únicamente del profesor de matemáticas.

Así pues, atendiendo a lo mencionado anteriormente, para la presente investigación llevada a cabo con profesores de matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato de la Comunidad Autónoma de Cantabria (España), nos proponemos los siguientes objetivos:

- Conocer los distintos procedimientos utilizados por el profesorado participante en este estudio para la enseñanza en el aula de la derivabilidad de una función en un punto.
- Analizar la predisposición del profesorado hacia la utilización de más de un sistema de representación en la enseñanza de la derivada en el aula.
- Identificar las posibles carencias dentro del “Conocimiento especializado del contenido” del profesorado de matemáticas en la enseñanza de la derivabilidad de una función en un punto.

A continuación, encontraremos el marco teórico, en el que se incluyen algunos de los estudios más relevantes relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción de derivada, así como la descripción de algunos de los modelos que establecen el conocimiento que debe poseer el profesor de matemáticas. Posteriormente, se describe la metodología seguida en este estudio, incluyendo el cuestionario utilizado. En el apartado de resultados, se mencionarán los datos más representativos que se pueden extraer de las respuestas dadas por los profesores participantes en esta investigación y, finalmente, se expondrán las principales conclusiones con la finalidad de dar respuesta a los objetivos mencionados anteriormente.

2. Marco teórico

La derivada se ha convertido en los últimos años en una noción con gran presencia en el ámbito de la investigación en educación matemática. Diversos son los contextos en los que esta noción matemática ha sido analizada. A continuación, profundizaremos en aquellos que guardan un estrecho vínculo con nuestra investigación.

En primer lugar, existen diversos estudios que analizan las pautas que rigen la enseñanza de la derivada en Educación Secundaria y la manera en que estas estrategias didácticas pueden influir en el aprendizaje del alumnado. Así, en (Font, 2005) se identifican las dificultades para pasar de la derivada de una función en un punto a la función derivada. Para complementar este estudio, Gavilán et al. (2007a) profundizan en dichas dificultades y las relacionan con las distintas maneras de conocer estas nociones, haciendo uso de una herramienta denominada “modelización de mecanismos de construcción de conocimiento”. Finalmente, Badillo et al. (2011) describieron el esquema que construyen varios profesores de matemáticas de Colombia tratando de coordinar la derivada de una función en un punto con su función derivada.

Además, en (Gavilán et al., 2007b) podemos encontrar el análisis de la práctica docente de dos profesores de Bachillerato a través de una herramienta de nombre “modelización de la descomposición genética de una noción”, cuya finalidad es describir cómo el profesor diseña las distintas situaciones de aula para que los estudiantes puedan llegar a organizar la colección de procesos y objetos que constituyen la concepción esquema de la noción de derivada según establece la teoría APOE. Por otro lado, García et al. (2012) analizaron la manera de abordar en el aula una unidad didáctica dedicada a la introducción de la noción de derivada por parte de un profesor de matemáticas de Educación Secundaria haciendo uso de las dos herramientas mencionadas anteriormente (“modelización de un mecanismo de construcción de conocimiento” y “modelización de una descomposición genética de la derivada”). Recientemente, y tratando de profundizar en el vínculo que se establece entre el modelo de enseñanza que utiliza el profesor y el aprendizaje que genera entre su alumnado, Gavilán-Izquierdo et al. (2021) ilustraron la manera en la que dos profesores de Educación Secundaria abordan la enseñanza de la derivada de una función en un punto y de la función derivada, uno de ellos haciendo uso de la tecnología y el otro sin usarla. Para caracterizar el proceso de aprendizaje del alumnado se utilizó la teoría APOE, llegando a la conclusión de que el uso de la tecnología favorece la construcción de la noción de derivada.

En el ámbito universitario, en (Garcés, 2021) se puede encontrar un estudio sobre las pautas que rigen la enseñanza de la derivada a través de los criterios de idoneidad didáctica que establece el Enfoque Ontosemiótico (EOS), en el que se tienen en cuenta los preceptos que sobre este enfoque proponen Font et al. (2010) y Godino et al. (2007, 2019). Por último, Vargas et al. (2020) realizaron un estudio con 98 futuros profesores (estudiantes del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato de la Universidad de Granada) y se observó que los docentes en formación recurren principalmente a aspectos algebraicos relativos a la derivada y a elementos y resultados básicos.

Por otro lado, son numerosos los estudios que han tratado de profundizar en la comprensión y el conocimiento que adquieren los estudiantes sobre la derivada. Por ejemplo, en (Sánchez-Matamoros et al., 2006) se describe el esquema que construyen los alumnos de Bachillerato de la noción de derivada a través de la caracterización de los niveles Intra, Inter y Trans, quedando este estudio contextualizado dentro de la teoría APOE. Una profundización en los niveles descritos en el estudio anterior se puede encontrar en (Fuentealba et al., 2019), aunque este trabajo está realizado con alumnos universitarios en posesión de conocimientos de cálculo diferencial. Continuando en el ámbito universitario, es posible encontrar también un estudio sobre la descripción que realizan los estudiantes de los puntos de no-derivabilidad (Fuentealba et al., 2018). Finalmente, ahondando en la manera en la que los estudiantes interiorizan la noción de derivada, Vega Urquieta et al. (2014) proponen una descomposición genética de la noción de derivada según la teoría APOE atendiendo a los conocimientos previos de dos alumnas que inician su etapa universitaria.

La identificación de dificultades de aprendizaje asociadas a la noción de derivada también ha sido abordada con frecuencia. En (Contreras de la Fuente et al., 2003) se obtiene como principal conclusión que el abuso del tratamiento algebraico de la noción de derivada por el profesorado se convierte en el factor fundamental para una comprensión parcial de esta noción por parte del alumnado. Además, Sánchez-Matamoros et al. (2008) llevaron a cabo una revisión de la literatura relacionada con la comprensión de los alumnos de Bachillerato y del primer año universitario del concepto de derivada y observaron que, para poder dar forma a la derivada de una función en un punto, es fundamental manejar de manera eficiente los conceptos de razón de cambio y cociente incremental, y que el uso de distintos sistemas de representación enriquece la construcción del esquema conceptual de la noción de derivada. Finalmente, en (González-García et al, 2018) se observa que los estudiantes cometen menos errores a la hora de realizar procedimientos sistemáticos, adquieren con menos dificultades el concepto de derivada en el ámbito algebraico que en el geométrico y fallan con mucha asiduidad en la interpretación y en la comprensión de la noción de derivada.

Por otro lado, uno de los primeros modelos en el que se propuso una caracterización del conocimiento que debe poseer el profesorado para llevar a cabo su práctica docente en el aula fue el diseñado por Shulman (1987). Este modelo se basa en aspectos como la comprensión, el razonamiento, la transformación y la reflexión y, a su vez, descompone el conocimiento del profesorado en varias categorías, destacando aquella en la que se mezclan los conocimientos de la materia que se imparte con los conocimientos didácticos.

- General pedagogical knowledge, with special reference to those broad principles and strategies of classroom management and organization that appear to transcend subject matter
- Knowledge of learners and their characteristics
- Knowledge of educational contexts, ranging from workings of the group or classroom, the governance and financing of school districts, to the character of communities and cultures
- Knowledge of educational ends, purposes, and values, and their philosophical and historical grounds
- Content knowledge
- Curriculum knowledge, with particular grasp of the materials and programs that serve as "tools of the trade" for teachers
- Pedagogical content knowledge, that special amalgam of content and pedagogy that is uniquely the province of teachers, their own special form of professional understanding

(Shulman, 1987, p. 8)

Figura 1. Categorías del modelo de Shulman. Fuente: Ball et al. (2008).

La concreción del modelo anterior para el profesorado de matemáticas se llevó a cabo con el desarrollo del modelo denominado "Conocimiento matemático para la enseñanza" (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT) descrito en el trabajo de Ball et al. (2008), en el que se desgrana el conocimiento del profesor de matemáticas en varias categorías, siendo la más relevante para nuestra investigación la que recibe el nombre de "Conocimiento especializado del contenido" (Specialized Content Knowledge, SCK), es decir, aquel conocimiento matemático y didáctico que es propio únicamente del profesorado de matemáticas.

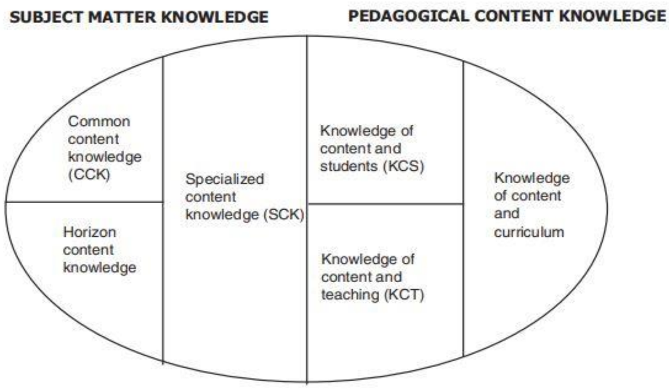


Figura 2. Categorías del modelo "Conocimiento matemático para la enseñanza". Fuente: Ball et al. (2008).

3. Metodología

Se trata de una investigación tanto cualitativa como cuantitativa de carácter descriptivo (Leavy, 2017) llevada a cabo con una muestra formada por 17 profesores de matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato de la Comunidad Autónoma de Cantabria (España). Para la recolección de los datos, se ha hecho uso del siguiente cuestionario, en el que los participantes en la investigación deben mostrar los argumentos y los procedimientos empleados en el aula para afrontar el estudio de la derivabilidad de tres funciones distintas en un mismo punto:

CUESTIONARIO - Derivabilidad

Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones en el punto $x = 0$:

1. $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ \dfrac{\ln(1+2x)}{x} & x > 0 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

[1] Se solicita el análisis de la derivabilidad de las tres funciones propuestas en el punto indicado siguiendo el mismo procedimiento que en el aula de Bachillerato.

Figura 3. Cuestionario. Fuente: Elaboración propia.

Las funciones 1) y 3) pertenecen a sendos exámenes de la EBAU (Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad) de la Comunidad Autónoma de Cantabria (junio 2011 y junio 2008, respectivamente). En concreto, la función 3) es el “clásico” ejemplo de función que es derivable en un punto, pero cuya función derivada es discontinua en dicho punto (Klippert, 2000, p. 282; Spivak, 1992, p. 280).

Así pues, atendiendo a los objetivos propuestos para esta investigación, llevaremos a cabo un análisis, tanto cualitativo como cuantitativo, de las respuestas dadas al cuestionario de la Figura 3 por el profesorado de matemáticas participante en este trabajo, cuya finalidad es identificar los procedimientos que emplean en el aula para estudiar la derivabilidad de una función en un punto, así como su predisposición hacia la utilización de distintos sistemas de representación en el proceso de enseñanza. Además, trataremos de identificar posibles carencias dentro del “Conocimiento especializado del contenido” vinculadas a la enseñanza de la derivabilidad de una función en un punto.

4. Resultados

Para obtener los resultados de este trabajo, hemos considerado oportuno realizar el análisis de las respuestas dadas por el profesorado en cada una de las funciones que forman parte del cuestionario, debido a las distintas características que presentan. Obviamente, con este análisis se pretende dar respuesta a cada uno de los objetivos propuestos para la presente investigación.

4.1. Función 1

Antes de comenzar el estudio de la derivabilidad de esta función, 16 profesores eliminaron el valor absoluto sustituyendo dicha función por una equivalente definida a trozos. Dos de ellos han mencionado expresamente que esto se realiza por la presencia de la función valor absoluto, mientras que tan solo uno de los participantes en este estudio utilizó argumentos sobre la derivabilidad de la función valor absoluto para deducir que dicha función no es derivable en el punto x = 0, aunque finalmente también llevó a cabo un procedimiento algebraico para su comprobación.

① $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$

Podemos deducir que la función no es derivable en $x=0$ porque en el denominador tenemos un valor absoluto, que sabemos que no es derivable en los puntos en los que se anula.

Figura 4. Argumento utilizado para deducir que la función 1 no es derivable en x = 0. Fuente: Profesor participante en el estudio.

Posteriormente, de nuevo 16 docentes, analizaron la continuidad de la función como paso previo al estudio de la derivabilidad, mientras que uno de ellos optó por obviarlo y abordar directamente el análisis de la derivabilidad de la función. Entre los que estudiaron la continuidad, 9 de ellos lo hicieron exclusivamente en el punto x = 0, mientras que los 7 restantes, además de deducir la continuidad en x = 0, también lo hicieron en todo su dominio.

A continuación, 9 profesores se decantaron por el estudio de la derivabilidad de la función en el punto indicado haciendo uso de la definición de la derivada en un punto. Sin embargo, 10 de ellos optaron por un procedimiento alternativo, que consiste en estudiar la derivabilidad de la función en el punto a través del cálculo de la función derivada y el estudio de su límite en dicho punto (dos de los profesores participantes en el estudio llevaron a cabo ambos procedimientos).

Derivabilidad en $x=0$:

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1-x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{(1-x)\cdot x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x} = 1.$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{1+x} = -1$$

$$f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow \boxed{f \text{ no derivable en } x=0}$$

De otra forma: $$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & x<0 \\ \dfrac{-1}{(1+x)^2} & x>0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = \frac{1}{(1-0)^2} = 1 \;;\; f'(0^+) = \frac{-1}{(1+0)^2} = -1 \;;\; \boxed{\begin{array}{c} f'(0^-) \neq f'(0^+) \\ \Downarrow \\ f \text{ no derivable en } x=0 \end{array}}$$

Figura 5. Estudio de la derivabilidad de la función 1 en x = 0. Fuente: Profesor participante en el estudio.

Por último, cabe destacar que tres docentes recordaron la idoneidad del uso de programas informáticos para obtener la representación gráfica de la función y realizar el posterior análisis de su derivabilidad en x = 0 a través de la identificación de un "pico" o "punto anguloso" en dicho punto. Dos de estos profesores se decantaron por el uso de GeoGebra, mientras que el otro propuso la utilización del programa Desmos.

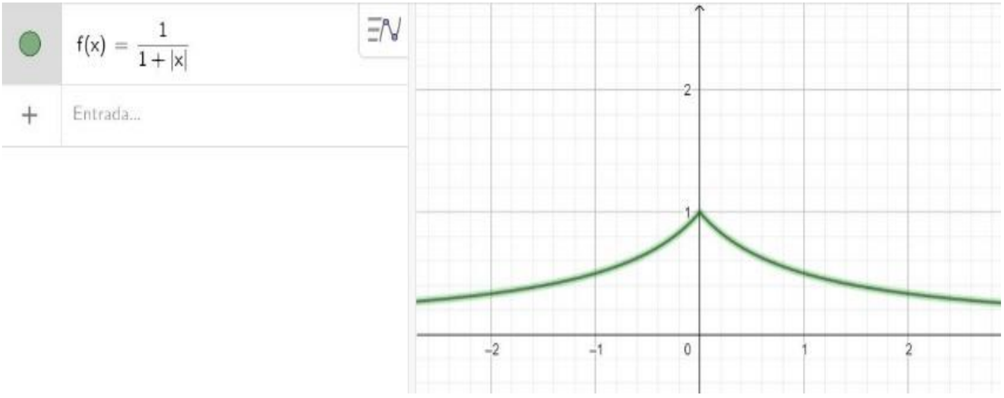


Figura 6. Representación gráfica de la función 1 con GeoGebra. Fuente: Elaboración propia.

Una vez obtenidos los resultados vinculados a la función 1, merecen ser mencionadas un par de observaciones sobre lo expuesto. En primer lugar, hay que indicar que, la sustitución de la función inicial por otra equivalente definida a trozos y que no contiene la función valor absoluto, ha simplificado el estudio de su continuidad y el de su derivabilidad, tanto a través de la definición de la derivada en un punto como a través del estudio de la continuidad de la función derivada. Y, por otro lado, cabe destacar que el argumento utilizado en la Figura 4 para deducir que la función 1 no es derivable en el punto x = 0 es adecuado en este caso particular pero no es válido en general (basta considerar la función f(x) = x|x|, derivable en el punto x = 0 a pesar de que la función valor absoluto no lo es).

4.2. Función 2

De nuevo, al igual que en el caso anterior, se observa que todos los participantes en el estudio, a excepción de uno de ellos, estudiaron inicialmente la continuidad de la función. Para ello, 11 profesores se centraron exclusivamente en analizar la continuidad de la función en el punto x = 0 (uno de ellos propone hacer uso del programa GeoGebra), mientras que los otros 5 profesores, además de analizar la continuidad en el punto indicado, también concluyeron que la función es continua en todo su dominio.

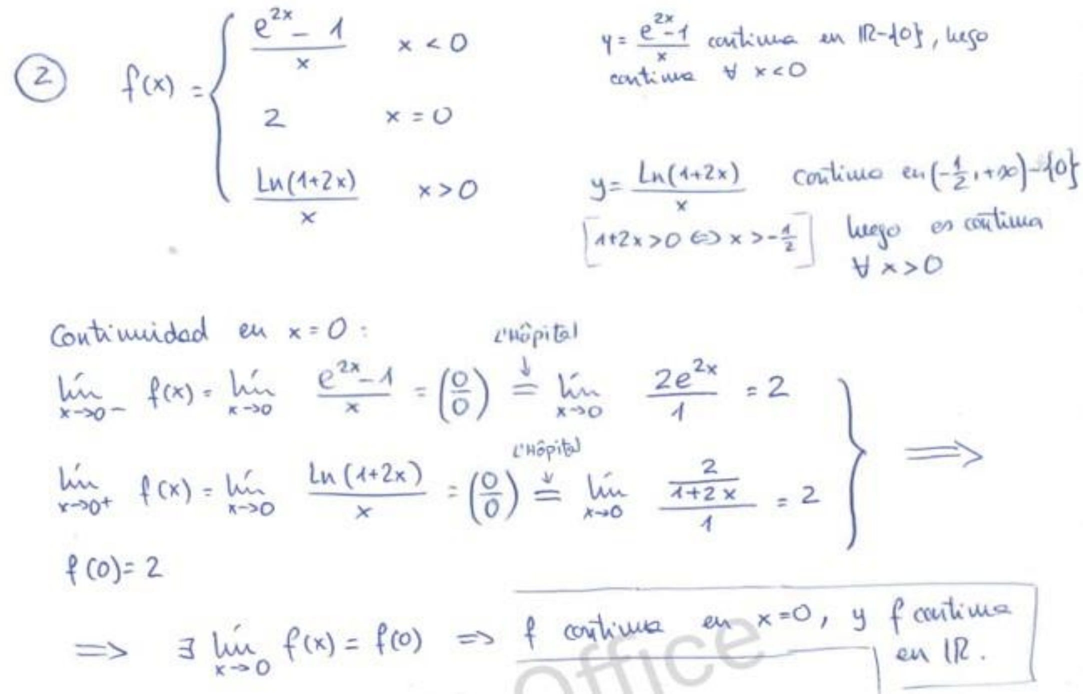


Figura 7. Estudio de la continuidad de la función 2. Fuente: Profesor participante en el estudio.

En esta ocasión, para el estudio de la derivabilidad de esta función en el punto indicado, de nuevo 9 docentes optaron por el procedimiento en el que se hace uso de la definición de derivada en un punto, llegando dos de ellos a la utilización de este método después de comprobar la dificultad del cálculo de los límites laterales en el punto x = 0 de la función derivada. Por otro lado, el estudio del límite de la función derivada fue abordado por 8 docentes. Sin embargo, debido a la complejidad de las operaciones algebraicas involucradas en este segundo procedimiento, se han identificado 3 erratas (2 de ellas asociadas al cálculo de los límites y otra asociada al cálculo de la función derivada), lo que ha tenido como consecuencia que la conclusión obtenida sobre la derivabilidad de la función en x = 0 haya resultado errónea en una ocasión.

De nuevo, hay que mencionar que, en tres ocasiones se propuso la utilización del programa GeoGebra para el estudio de la derivabilidad de la función en dicho punto a través de su representación gráfica, mientras que un profesor se decantó por hacer uso del programa Desmos.

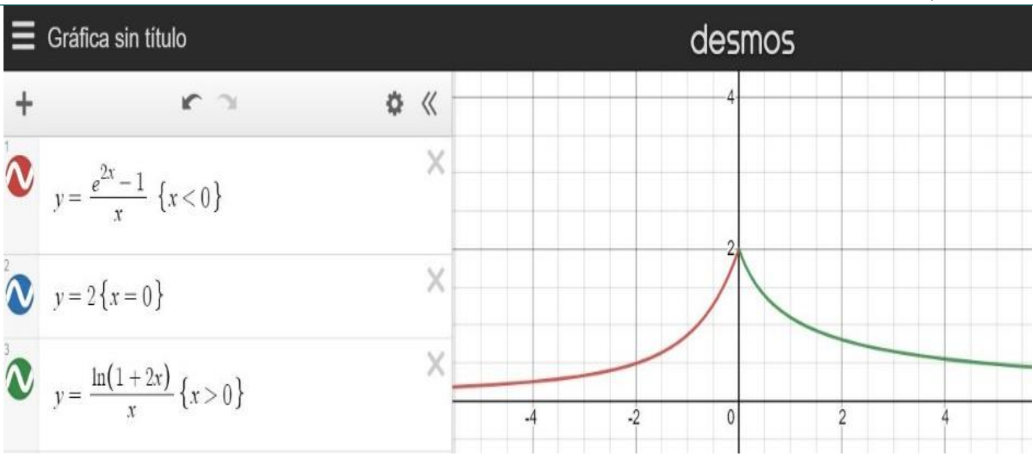
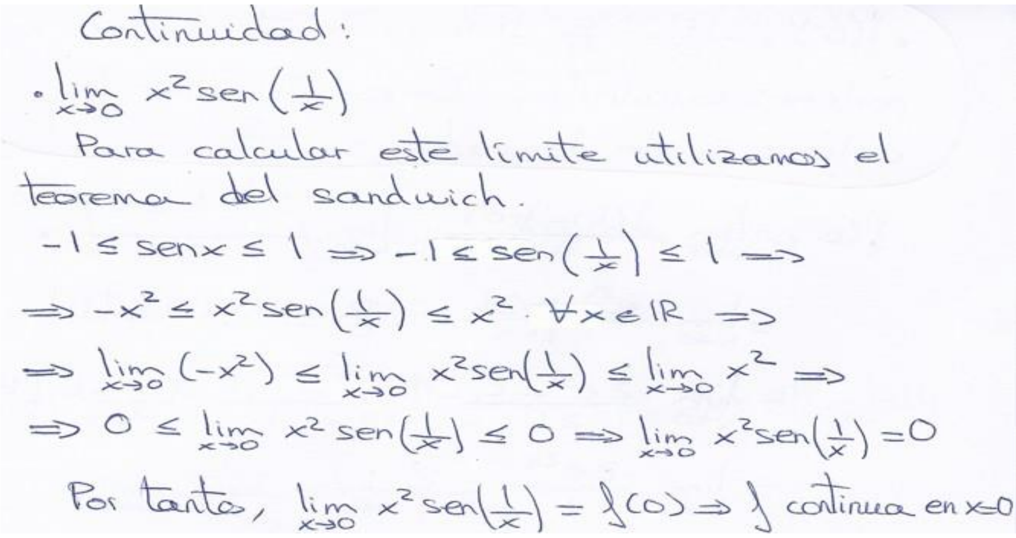


Figura 8. Representación gráfica de la función 2 con Desmos. Fuente: Elaboración propia.

4.3. Función 3

Continuando con la tendencia de las funciones anteriores, tan solo un docente optó por no analizar la continuidad de la función como paso previo al estudio de la derivabilidad. De esta manera, 12 profesores estudiaron su continuidad exclusivamente en el punto x = 0, mientras que los otros 4 docentes, además de deducir su continuidad en dicho punto, también lo hicieron en todo su dominio. Cabe mencionar que un docente propuso el uso de Desmos para la realización de un análisis gráfico sobre la continuidad de esta función y que otros dos docentes utilizaron el Teorema del Sandwich (Stewart, 2012, p. 105) para poder determinar el valor del límite de la función en x = 0.



Continuidad:

• $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

Para calcular este límite utilizamos el teorema del sandwich.

$-1 \le \operatorname{sen} x \le 1 \Rightarrow -1 \le \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \le 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x^2 \le x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

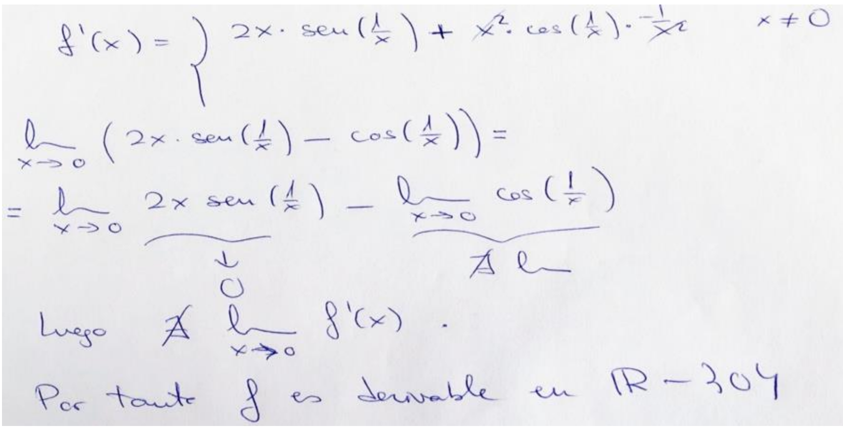
$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(-x^2) \le \lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \le \lim_{x\to 0} x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \le \lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \le 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Por tanto, $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) \Rightarrow f$ continua en $x=0$

Figura 9. Aplicación del Teorema del Sandwich para el estudio de la continuidad de la función 3 en x = 0. Fuente: Profesor participante en el estudio.

En este caso, el estudio de la derivabilidad resulta sensiblemente más complejo que en los anteriores. Así pues, 14 profesores optaron por aplicar la definición de derivada en un punto, de los cuales 6 se decidieron por este método después de comprobar que no se podía calcular el valor del límite en x = 0 de la función derivada. Sin embargo, ante esta misma situación, 3 profesores han determinado que la función es no derivable en x = 0, obteniendo así una conclusión errónea, ya que nos encontramos ante una función que, a pesar de que su función derivada no es continua en x = 0, resulta ser derivable en dicho punto (Klippert, 2000, p. 282; Spivak, 1992, p. 280).



$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(2x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to 0} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{\downarrow \, 0} - \underbrace{\lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\nexists \lim}$$

Luego $\nexists \lim_{x \to 0} f'(x)$.

Por tanto f es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

Figura 10. Argumento erróneo en el estudio de la derivabilidad de la función 3. Fuente: Profesor participante en el estudio.

Finalmente, dos docentes propusieron utilizar las representaciones gráficas de la función 3 y de su función derivada a través de GeoGebra y Desmos, respectivamente, para poder estudiar el comportamiento de ambas en el entorno del punto x = 0, mientras que otro profesor decidió incluir estas representaciones gráficas como complemento al análisis algebraico de la derivabilidad que había realizado previamente.

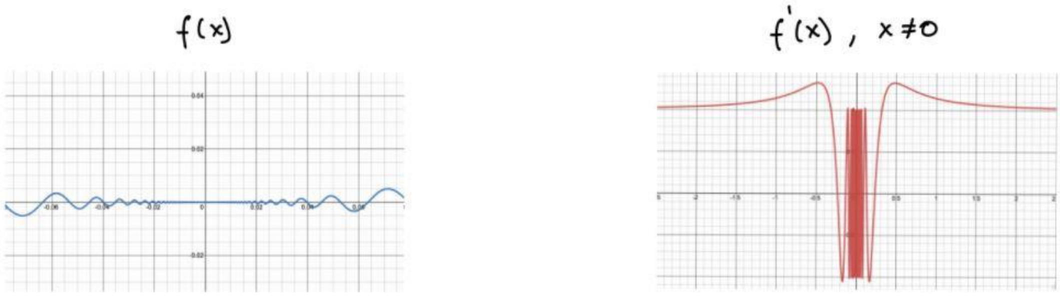


Figura 11. Representación gráfica de la función 3 y de su función derivada. Fuente: Profesor participante en el estudio.

5. Discusión y conclusiones

Tras el análisis de las respuestas dadas por los 17 profesores de matemáticas al cuestionario propuesto sobre el proceso de enseñanza de la derivabilidad de una función en un punto, trataremos de extraer algunas conclusiones que nos permitan analizar la consecución de los objetivos que nos planteamos al inicio del trabajo.

En cuanto a los métodos utilizados por el profesorado participante en este estudio sobre la enseñanza de la derivabilidad de una función en un punto, se observa una clara predisposición por el uso de procedimientos algebraicos. En concreto, por un lado, se hace uso de la definición de la derivada de una función en un punto y, por otro lado, se realiza el cálculo del límite de la función derivada en el punto indicado. De hecho, en las dos primeras funciones que forman parte del cuestionario, ambos procedimientos fueron utilizados prácticamente en la misma proporción, mientras que, en la última función, el profesorado se decantó claramente por el primer procedimiento ante la imposibilidad de determinar el límite de la función derivada en el punto solicitado. Además, este hecho llevó a que algunos profesores cometieran el error de suponer que la función no era derivable puesto que su función derivada no era continua en dicho punto, argumento que resulta inadecuado atendiendo al Teorema 2.1 demostrado por Klippert (2000, p. 283). Finalmente, si a este resultado le añadimos el Teorema 7 que encontramos en (Spivak, 1992, p. 280), es posible diseñar el siguiente esquema que ilustra el vínculo existente entre los dos procedimientos algebraicos seguidos por los participantes en esta investigación:

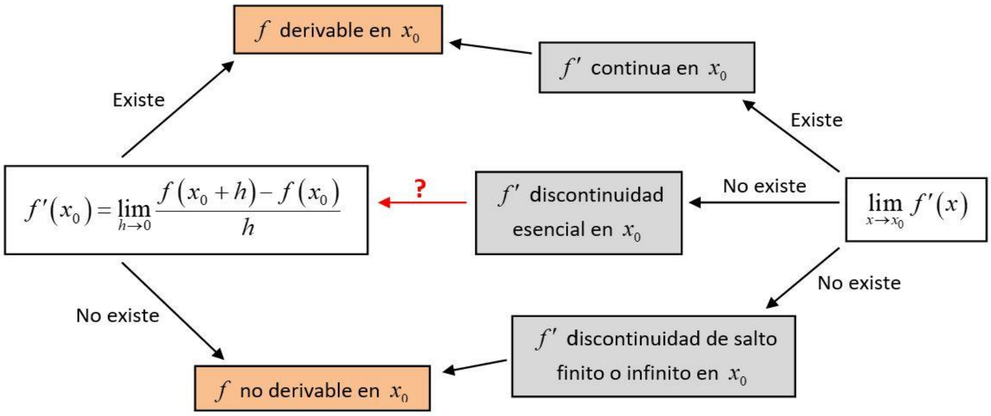


Figura 12. Estudio de la derivabilidad de una función f en un punto x_0. Fuente: Elaboración propia.

Así pues, teniendo en cuenta este esquema, podemos mostrar de manera gráfica la cantidad de profesores que se han decantado por cada uno de los procedimientos utilizados en el proceso de enseñanza de la derivabilidad de una función en un punto (ilustrando parte de la información obtenida en el apartado anterior). Para ello, a continuación, se elabora un esquema para cada una de las funciones que forman parte del cuestionario propuesto en esta investigación:

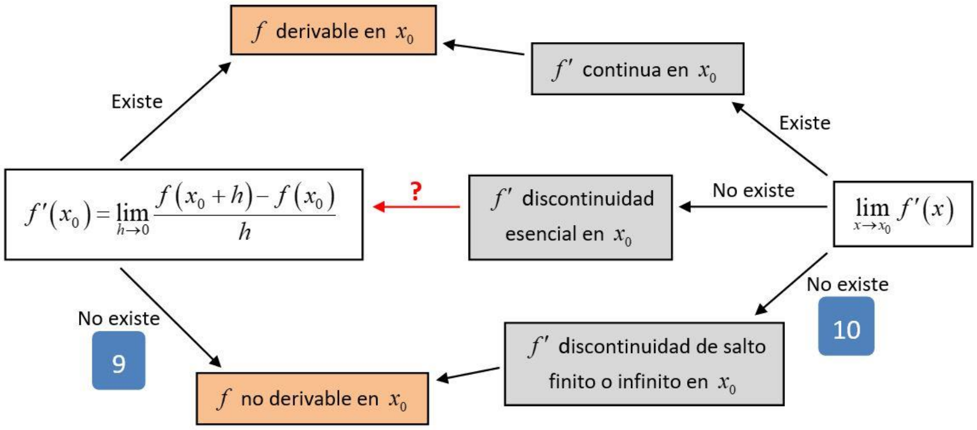


Figura 13. Estudio de la derivabilidad de la función 1. Fuente: Elaboración propia.

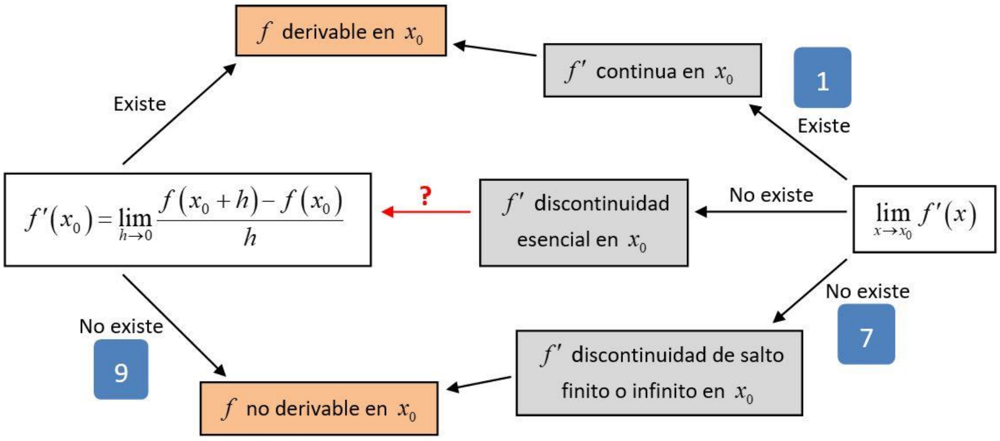


Figura 14. Estudio de la derivabilidad de la función 2. Fuente: Elaboración propia.

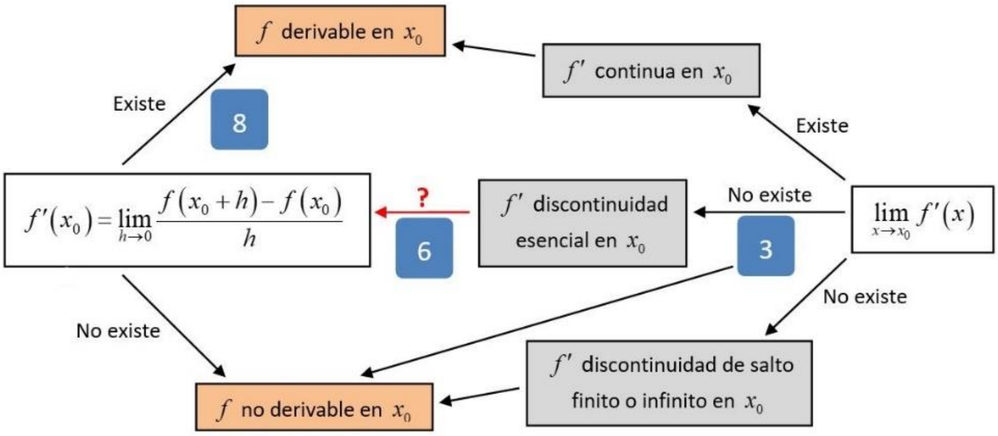


Figura 15. Estudio de la derivabilidad de la función 3. Fuente: Elaboración propia.

Por otro lado, a la vista de los resultados obtenidos, se aprecia una escasa predisposición por parte del profesorado hacia el uso del sistema de representación gráfico, ya que menos del 25% de los docentes participantes en este trabajo ha propuesto el estudio de la derivabilidad de las funciones del cuestionario a partir de su representación gráfica y de la presencia de posibles “picos” o “puntos angulosos”. De esta manera, en esta investigación se han identificado algunos de los factores propios de la enseñanza de la derivada que favorecen una construcción parcial del esquema conceptual por parte del alumnado, como son el abuso de los procedimientos algebraicos y la escasa variedad en los sistemas de representación de la derivada utilizados en el aula (Contreras de la Fuente et al., 2003; Gavilán-Izquierdo et al., 2021; Sánchez-Matamoros et al., 2008). Obviamente, esta conclusión debe pasar a formar parte del “Conocimiento especializado del contenido” (Ball et al., 2008) de todo profesor de matemáticas a la hora de abordar la enseñanza de la derivabilidad en el aula.

Además, para tratar de completar el conocimiento que debe poseer el profesorado de matemáticas, hemos observado en los razonamientos empleados para estudiar la derivabilidad de la función 3 del cuestionario, que el desconocimiento del vínculo existente entre los dos procedimientos algebraicos utilizados (Figura 12), ha llevado a algunos profesores a obtener conclusiones que no son correctas (véase la Figura 15). Esto nos debe hacer reflexionar sobre dos aspectos fundamentales; por un lado, acerca de la continua actualización del “Conocimiento especializado del contenido” que debe realizar el profesorado de matemáticas y, por otro lado, sobre la importancia del uso de contraejemplos en los procesos de enseñanza de algunas nociones matemáticas, lo que Tall (1991) describió como “if an individual works in a restricted context in which all the examples considered have a certain property, then, in the absence of counter-examples, the mind assumes the known properties to be implicit in other contexts” (p. 10).

Finalmente, se ha observado que, al inicio del estudio de la derivabilidad de una función en un punto, todos los profesores participantes en esta investigación, a excepción de uno de ellos, comenzaron analizando la continuidad de la función. Pues bien, el estudio de la continuidad como paso previo al de la derivabilidad, se convierte en una condición necesaria para evitar argumentos erróneos como el que se presenta a continuación:

2. ( ) La función $h(x) = \begin{cases} -x^2 - 1 & si \quad x < 0 \\ x^2 + 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ cuya gráfica se muestra en la figura 2, satisface que $\lim_{x \to 0^-} h'(x) = \lim_{x \to 0^+} h'(x) = 0$. Por lo tanto $h'(0) = 0$.

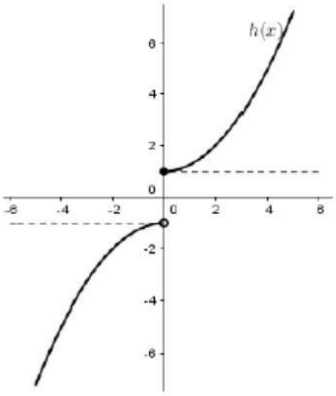


Figura 2. Gráfica de h

Figura 16. Función no derivable en x = 0 por no ser continua en dicho punto. Fuente: Vargas et al. (2020).

Así pues, el estudio de la continuidad de la función como paso previo al de su derivabilidad, debe ser otro aspecto que también se debe incorporar al “Conocimiento especializado del contenido” de todo profesor de matemáticas.

Agradecimientos

Al profesor de matemáticas Francisco Javier González Ortiz, por su contribución en el desarrollo de esta investigación, así como a los revisores del artículo, por sus valiosas propuestas de mejora.

Referencias bibliográficas

Badillo, E., Azcárate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f’(a) y f’(x) en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(2), 191-206. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n2.546

Ball, D. L., Hoover Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Contreras de la Fuente, A., Luque Cañada, L. y Ordoñez Cañada, L. (2003). Una perspectiva de la enseñanza-aprendizaje de la continuidad y la derivada de una función en Bachillerato y Universidad. *Revista de Educación, 331*, 399-419.

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En Maz, A., Gómez, B. y Torralbo, M. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática* (pp. 111-128). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Fuentealba, C., Badillo, E. y Sánchez-Matamoros, G. (2018). Puntos de no-derivabilidad de una función y su importancia en la comprensión del concepto de derivada. *Educação e Pesquisa, 44*, 1-20. https://doi.org/10.1590/S1678-4634201844181974

Fuentealba, C., Badillo, E. y Sánchez-Matamoros, G. (2019). Identificación y caracterización de los subniveles de desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(2), 63-84. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2518

Garcés, W. (2021). Análisis de las pautas que rigen la práctica del profesor en la enseñanza de derivadas en ciencias básicas en carreras de ingeniería. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, *10*(3), 239-268. https://doi.org/10.17583/redimat.7957

García, M., Gavilán, J. M. y Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(3), 219-235. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n3.684

Gavilán, J. M., García, M. y Llinares, S. (2007a). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *25*(2), 157-170. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3768

Gavilán, J. M., García, M. y Llinares, S. (2007b). La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje potencial de los estudiantes. *Educación Matemática*, *19*(2), 5-39.

Gavilán-Izquierdo, J. M., García, M. y Martín-Molina, V. (2021). Characterizing the role of technology in mathematics teachers' practices when teaching about the derivative. *Computers in the schools, 38*(1), 36-56. https://doi.org/10.1080/07380569.2021.1882211

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 39*, 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 38-43.

González-García, A., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2018). Un estudio exploratorio sobre los errores y las dificultades del alumnado de Bachillerato respecto al concepto de derivada. *Aula Abierta, 47*(4), 449-462. https://doi.org/10.17811/rifie.47.4.2018.449-462

Klippert, J. (2000). On a discontinuity of a derivative. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(2), 282-287. https://doi.org/10.1080/00207390050032252

Leavy, P. (2017). *Research design: Quantitative, qualitative, mixed methods, arts-based, and community-based participatory research approaches*. The Guilford Press. https://doi.org/10.1111/fcsr.12276

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(1), 85-98. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3816

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *RELIME*, *11*(2), 267-296.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-23. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Spivak, M. (1992). *Cálculo infinitesimal* (2ª ed.). Editorial Reverté.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* (7ª ed.). Cengage Learning.

Tall, D. (1991). The psychology of Advanced Mathematical Thinking. En Tall, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Kluwer Academic Publishers.

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2020). Análisis de los argumentos dados por docentes en formación a una tarea sobre derivadas. *PNA, 14*(3), 173-203. https://doi.org/10.30827/pna.v14i3.12229

Vega Urquieta, M. A., Carrillo Yañez, J. y Soto Andrade, J. (2014). Análisis según el modelo cognitivo APOS del aprendizaje construido del concepto de la derivada. *Boletim de Educação Matemática, BOLEMA, 28*(48), 403-429. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a20

Luis Dubarbie: Licenciado y Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Cantabria. Profesor del área de "Didáctica de las Matemáticas" de la Universidad Internacional de La Rioja (UNIR). Miembro del grupo de investigación DIMACE (Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales) de UNIR.
luis.dubarbie@unir.net ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9133-1128

Arantxa García Gallo: Licenciada en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Cantabria. Profesora de Matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Jefa del Departamento de Matemáticas del I.E.S. Valle de Piélagos (Cantabria). arantxamatematicas@iesvalledepielagos.es