

<http://www.fisem.org/www/index.php>  
<https://union.fespm.es/index.php/UNION>

## Clasificación de tareas con software. Propuesta usando la aplicación GeoGebra para dispositivos móviles en carreras de ingeniería

Betina Williner, Adriana Favieri, Roxana Scorzo

Fecha de recepción: 24/04/2020

Fecha de aceptación: 28/08/2020

<p><b>Resumen</b></p>	<p>En el presente trabajo proponemos una clasificación de tareas para ser realizadas con la aplicación móvil de GeoGebra en carreras de ingeniería. Mostramos el diseño y ejemplos de las categorías de la clasificación con la justificación teórica correspondiente. El objetivo de la propuesta es contar con una guía que favorezca un trabajo matemático rico y diverso por parte de los estudiantes sobre temas de Cálculo. Finalizamos con reflexiones sobre la implementación y la incorporación de la aplicación. Destacamos su gratuidad y facilidad de uso. A su vez el diseño y la clasificación presentada resaltan los beneficios de la visualización de los conceptos, la experimentación y la guía del docente. <b>Palabras clave:</b> GeoGebra, tareas, clasificación, aprendizaje móvil, Cálculo.</p>
<p><b>Abstract</b></p>	<p>In this work we propose a classification of tasks to be done with the mobile app GeoGebra in engineering careers. We show the design and examples of the classification categories corresponding to the theoretical justification. The aim of the proposal is to have a guide that encourages a rich and diverse mathematical work by students on topics of Calculus. We conclude with reflections on the implementation and mainstreaming of the application. We highlight its gratuity and ease of use. At the same time the design of tasks and the classification presented highlight the benefits of visualization of concepts, experimentation and the teacher's guide. <b>Keywords:</b> GeoGebra, tasks, classification, m-learning, Calculus.</p>
<p><b>Resumo</b></p>	<p>Neste trabalho propomos uma classificação de tarefas a serem realizadas com o aplicativo móvel GeoGebra em carreiras de engenharia. Mostramos o design e exemplos de categorias da classificação com a justificativa teórica correspondente. O objetivo da proposta é ter um guia que privilegie um trabalho matemático rico e diversificado dos alunos sobre os tópicos de Cálculo. Terminamos com reflexões sobre a implementação e incorporação do aplicativo. Destacamos seu uso fácil e gratuito. Por sua vez, o design e a classificação apresentados destacam os benefícios de visualizar os conceitos, a experimentação e o guia do professor. <b>Palavras-chave:</b> GeoGebra, tarefas, classificação, aprendizagem móvel, Cálculo.</p>

## 1. Introducción

Uno de los aspectos más importantes en la enseñanza de la matemática es seleccionar o diseñar tareas para llevar al aula. Las tareas son un recurso fundamental que tenemos los docentes para propiciar la construcción de conceptos y desarrollar habilidades matemáticas en nuestros alumnos. Como señalan Watson y Ohtani, (2015, citados en García, 2019) son el fundamento del aprendizaje matemático. Campos y Torres (2018) indican que se pueden considerar como el principal medio que tiene el docente para lograr que sus estudiantes entiendan las ideas matemáticas puestas en juego.

Pensamos que no debemos diseñar o seleccionar las tareas en forma aislada, sino como una secuencia de aprendizaje integrada. Esto es tener en cuenta un orden de complejidad creciente y que el trabajo matemático que demande cada una no sea “siempre el mismo”, sino que haya variedad en cuanto a las habilidades matemáticas que exige cada resolución.

Otro de los aspectos fundamentales en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática es el uso de tecnología, más específicamente el uso de un software. A través de éste podemos proveer a los alumnos de niveles de comprensión en base a la visualización, a la exploración de objetos matemáticos en entornos multimedia y al desarrollo de ciertas habilidades matemáticas (Barahona, Barrera, Vaca e Hidalgo, 2015).

Nuestro contexto es la cátedra de Análisis Matemático I de carreras de ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM), Argentina. Dicha materia consta de un programa tradicional de Cálculo Diferencial e Integral en una variable. Desde hace más de una década estamos utilizando software en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo desde la investigación. A partir de 2007 incorporamos tecnología a través de un trabajo práctico que los alumnos debían hacer con software licenciado en las computadoras de la universidad en horarios extra-clase. Si bien teníamos la ventaja del potencial del software, a través de los años la versión utilizada se convirtió en obsoleta y no pudimos, por razones de presupuesto, actualizarla. Otro problema por el cual transitamos fue la cada vez más escasa posibilidad de utilizar los laboratorios con computadoras que nos brinda la universidad debido al crecimiento de la matrícula.

Durante esos años percibíamos que lograríamos sacar mayor beneficio del uso de la tecnología si la incorporábamos en el aula misma. De esta forma podíamos orientar a los alumnos en diversos momentos de construcción de conocimiento y, paulatinamente, ellos podían adoptarla como una herramienta de apoyo al aprendizaje.

Explorando las posibilidades que nos brinda el mercado y adaptándonos al contexto mencionado, incorporamos el uso del celular en el aula junto con una de las aplicaciones gratuita de GeoGebra. Esto nos permitió incorporar la tecnología en el aula (y no en los laboratorios), aprovechar que todos los alumnos tienen este tipo de dispositivo, no depender de la adquisición de un software pago ni, en esta oportunidad, de acceso a internet.

Existen cantidad de investigaciones que utilizan GeoGebra, en sus diversas formas, en la enseñanza aprendizaje del Cálculo. Entre ellas Jiménez y Jiménez

(2017) realizaron un estudio documental descriptivo relacionado con proyectos y trabajos realizados sobre la problemática del aprendizaje de la matemática y el uso de recursos tecnológicos en su enseñanza. Entre las conclusiones principales los autores proponen usar la mayor cantidad de recursos tecnológicos disponibles para que el alumno desarrolle un pensamiento crítico y reflexivo. Entre dichos recursos recomiendan el uso de GeoGebra para crear clases interactivas y amenas.

Otras muestras del uso de GeoGebra en las clases de matemática se evidencian en: Carrillo (2012); Costa (2011), Fiallo y Parada (2014); García, Martínez y Flores (2018); Garelik y Montenegro (2015); Pabón, Nieto y Gómez (2015); Ruiz, Del Rivero y Valenzuela (2018); Saucedo, Godoy, Fraire, y Herrera (2014). Si bien cada estudio tiene sus propias características, objetivos, metodología, los resultados permiten abordar a conclusiones similares. Por ejemplo, el docente debe tener una idea clara sobre el tipo de tarea que amerita uso de tecnología y qué beneficio puede aportar. A su vez todos los estudios coinciden que es necesaria la orientación del profesor, sobre todo a la hora de formalizar contenidos. Existe una fase de exploración, en la que se usa el recurso tecnológico, predomina la habilidad visual y manipulativa, y el alumno puede realizar conjeturas. Luego es necesario la formalización o institucionalización de los contenidos y acá es primordial la presencia del docente. Otra conclusión común en estas experiencias es la motivación y participación que se logra en el alumno cuando usa este tipo de recursos.

Dentro de todas las aplicaciones de GeoGebra elegimos la Calculadora Gráfica para dispositivos móviles.

El presente artículo pretende mostrar una clasificación propia sobre tareas realizadas con uso de esta App que utilizamos como guía para lograr un trabajo matemático diverso y rico con alumnos de ingeniería en Análisis Matemático I. Brindamos ejemplos de las categorías indicando la fundamentación de su elaboración. Por último, y teniendo en cuenta el carácter de propuesta, enumeramos algunas reflexiones.

## 2. Marco de referencia

### 2.1. Sobre el proceso de enseñanza aprendizaje con telefonía móvil

Considerando el uso de la tecnología en el proceso de enseñanza aprendizaje nos concentramos en el *m-learning* o aprendizaje móvil o integración de tecnologías móviles en el contexto educativo. Permite a los alumnos y profesores la creación de nuevos ambientes de aprendizaje sincrónicos o asincrónicos a través de dispositivos móviles con o sin acceso a internet. Esto es simplemente el uso de notebooks, celulares y tabletas en la educación.

Ramos, Herrera y Ramírez (2010) señalan que el uso aislado de los recursos móviles no desarrolla habilidades cognitivas. Solamente en conjunto con el trabajo del profesor en clase, una correcta planeación de actividades que interrelacione las actividades presenciales con los recursos y la unión del aprendizaje formal con el informal y permanente es como se puede lograr el desarrollo de las habilidades cognitivas superiores en los estudiantes.

---

Henríquez, Organista y Lavigne (2013), Brazuelo y Cacheiro (2010) establecen ventajas del aprendizaje móvil, como ser:

- Interviene el celular que es un dispositivo cotidiano para el alumno.
- Facilita el trabajo en equipo al contar con herramientas de comunicación rápidas e instantáneas que favorecen la ayuda mutua en los alumnos.
- Aumenta la flexibilidad de acceso a los materiales de clase.
- Permite el uso eficaz de los recursos y los contenidos didácticos ya que se pueden bajar aplicaciones, acceder a información vía internet, grabar audios y/o videos, sacar fotos al pizarrón o a apuntes de compañeros.
- Fomenta el sentido de comunidad.
- Aumenta la satisfacción de los estudiantes.
- Permite el aprendizaje en cualquier momento y lugar.
- Mejora la interacción didáctica (en forma sincrónica o asincrónica)
- Potencia el aprendizaje centrado en el alumno.
- Enriquece en forma multimedial el aprendizaje.
- Favorece la comunicación entre alumno e institución.

Y establecen las siguientes desventajas:

- Uso no académico que favorece la distracción.
- Costo alto de conexión.
- Poca duración de la batería.
- Pantalla reducida y memoria limitada.
- Trabajo intenso por parte del docente para que el estudiante visualice dicho dispositivo como una herramienta de apoyo educativo.

## 2.2. Sobre el software GeoGebra

GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas, de código abierto, adaptable a todos los niveles educativos. Incluye geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo, con la posibilidad de incorporar actividades dinámicas. Su interfaz es de fácil uso y cuenta con poderosas herramientas. Ofrece a los docentes la oportunidad de crear materiales de aprendizaje interactivos como páginas web o applets, por lo que se convierte en una herramienta de autoría.

GeoGebra no es solamente un software libre, se ha convertido en una comunidad con millones de usuarios en casi todos los países del mundo en la que comparten sus recursos y experiencias en apoyo a la educación en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas. Esto contribuye a la innovación en la enseñanza y aprendizaje en casi todas las latitudes (GeoGebra, 2020).

Además, GeoGebra brinda una serie de aplicaciones para usar en el celular que son gratuitas y disponibles para iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook y Linux, lo que asegura la utilización en diversos dispositivos.

### 2.3. Sobre tareas con software

Sosa, Aparicio y Tuyub (2008) proponen a la hora de diseñar tareas con software utilizar sus posibilidades para construir tablas, hacer gráficos, construir funciones, controlar cálculos; de manera tal que el alumno lleve a cabo procesos de experimentación y análisis de diferentes situaciones para determinar propiedades y características de los objetos matemáticos en estudio. También aconsejan fomentar el uso de varios registros de representación semiótica de un mismo objeto matemático, ya que no basta “hacer visible” un concepto matemático con el uso de la computadora, sino que se deben plantear procesos de codificación y decodificación que reorganicen la estructura conceptual de los alumnos respecto a los conceptos tratados. Sugieren promover procesos de visualización matemática, contextualizar las propiedades de los conceptos, favorecer la experimentación y la exploración, realizar inferencias, establecer conjeturas y generar argumentos.

Conjugando ideas propias con las de Barrera y Reyes (2013, citados en Campos y Torres, 2018) y Campos y Torres (2018), el diseño de una tarea debe incluir diversas fases:

- Definir el o los objetivos de aprendizaje o las habilidades a desarrollar con la actividad.
- Identificar los conocimientos previos que son requeridos para abordarla.
- Reflexionar si la tarea requiere el uso de tecnología, si se hará sólo con tecnología o una combinación entre ésta y lápiz y papel.
- Redactar el enunciado o consigna que será la forma en la que se presentará a los estudiantes.
- Analizar el contexto: si la tarea será presencial o domiciliaria, en equipos o individual, el papel que tendrá el profesor, etc.
- Hacer una retroalimentación a medida que se realizan las actividades a fin de mejorar las consignas o la forma que se planificó el trabajo en clase.

Arcavi y Hadas (2000) sostienen que una tarea realizada con un software con las características de GeoGebra debe propiciar:

- *La visualización.* Los autores entienden por visualización a la habilidad de representar, transformar, comunicar y reflejar una información visual. Este tipo de programas no sólo permite a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades, sino también transformarlas en tiempo real. El dinamismo que se obtiene puede contribuir a estudiar variaciones, invariantes visuales, y posiblemente sentar las bases intuitivas para justificaciones formales de alguna conjetura.

- *La experimentación.* El hecho de probar o ensayar proporciona al alumno valorar la facilidad de obtener muchos ejemplos sobre alguna situación para luego buscar similitudes, casos extremos o contraejemplos. La información obtenida de esta manera puede contribuir a enunciar alguna generalización que será luego necesario probar.
- *La sorpresa.* La experimentación se puede acompañar con un tipo de pregunta significativa que consiste en que los alumnos hagan predicciones explícitas sobre algún fenómeno estudiado. El reto es encontrar situaciones en las cuales el resultado de la actividad sea inesperado o contra-intuitivo, de tal forma que la sorpresa que esto genera cree una clara diferencia con las predicciones ya realizadas. La sorpresa se convierte en un detonador para que el alumno vuelva a analizar su predicción.
- *La necesidad de pruebas y demostraciones.* Luego de visualizar, experimentar o conjeturar sería conveniente que el estudiante “necesite” una prueba o demostración que provenga de las observaciones realizadas. La tarea debe lograr un ciclo de experimentación-retroalimentación-reflexión para suministrar las bases de la argumentación que ayude a explicar y a demostrar una declaración.

## 2.4. Clasificación de tareas con software

Dentro de las diversas tareas que podemos diseñar, seguimos la tipología brindada en Falsetti, Favieri, Scorzo y Williner (2011) y ampliada en el presente artículo:

- *Tareas de generalización:* son aquellas en las que el alumno debe explorar para poder extraer un resultado, conclusión o propiedad referente al estudio de casos particulares, que luego extenderá (generalizará) a un determinado universo.
- *Tareas de estudio de casos:* en las cuales se trabaja con parámetros o con otro objeto matemático que pueda presentar diferentes situaciones.
- *Tareas de aplicación de resultados teóricos a problemas prácticos:* son las que se resuelven reflejando la teoría estudiada.
- *Tareas de aplicación de algoritmos dados y conocidos:* en las que se realizan cálculos, pasos algebraicos, resoluciones varias aplicando algoritmos conocidos.
- *Tareas de construcción de conceptos:* aquellas que a través de acciones el alumno puede construir un concepto nuevo que luego será formalizado por el profesor.
- *Tareas de construcción de ejemplos:* en las que el alumno debe brindar un ejemplo que él mismo haya inventado, armado o construido.
- *Tareas de visualización:* a través de las cuales el alumno puede entender mejor un problema o una situación planteada.



### 3. Objetivo del artículo

Describir algunas de las tareas diseñadas siguiendo la clasificación propuesta para ser realizadas con la aplicación GeoGebra Calculadora Gráfica para celulares en las clases de Análisis Matemático I de carreras de ingeniería.

### 4. Tareas propuestas con la aplicación GeoGebra Calculadora Gráfica

Diseñamos diversos tipos de tareas siguiendo la clasificación expuesta en el marco de referencia. Consideramos que cada tipología fomenta distinto trabajo matemático por parte del alumno, razón por la cual es conveniente elegir una variedad de éstas para llevar al aula.

Otra cuestión para tener en cuenta es el orden cronológico en el que se dan las diversas tareas. Por un lado, el vinculado con los temas dados. Por el otro, tenemos en cuenta que las primeras tareas constituyen el primer contacto de los estudiantes con la aplicación, razón por la cual están más dirigidas en los pasos a seguir que en las últimas. Las presentamos respetando el orden que fueron pensadas para la experiencia propiamente dicha.

Agregamos que al momento de la redacción del artículo trabajamos con la App versión febrero 2020. Las actualizaciones de la aplicación hacen que varíen los comandos que nos ofrece y por lo tanto esto implica un ajuste en la resolución de las tareas.

#### 4.1. Tarea de generalización

Consigna:

1. Define la siguiente función en GeoGebra  $y = f(x) = \sqrt{x}$  y calcula dominio e imagen
2. Entra la sentencia  $f(x-2)$
3. ¿Qué observas en el gráfico?
4. ¿Cómo te parece que tendrá que ser la expresión analítica si queremos que dicha función se corra dos unidades a la izquierda?
5. Define un deslizador "c" que tome los valores por default.
6. Entra la sentencia  $f(x-c)$  ¿qué puedes observar en el gráfico de f? ¿Se altera dominio, imagen o ambas?
7. ¿Esto vale para cualquier función?
8. Prueba cambiando en la primera sentencia  $\sqrt{x}$  por  $|x|$
9. Completa: Si  $y = f(x)$  es la regla de asignación de una función en forma analítica entonces  $y = f(x-c)$  expresa .....

Fundamentación:

Esta tarea (o similar) está elaborada como la primera para hacer en clase con el celular. A través de ésta presentamos cómo es el trabajo general con la App, los comandos básicos, cómo se definen las funciones y se grafican, cómo guardar

archivos. A su vez introducimos el deslizador que será de gran utilidad en todas las demás tareas.

El objetivo de aprendizaje es que los alumnos puedan generalizar la relación entre la traslación horizontal de una función y su expresión analítica y reflexionar si este tipo de movimientos altera el dominio y/o la imagen de la función original.

Los conocimientos previos son el concepto de función (registros analítico y gráfico), dominio e imagen de una función.

Respecto al trabajo en el aula, la diseñamos para trabajar docente y grupo en su conjunto por ser la primera actividad con el celular. El profesor induce la traslación buscada a través de una sentencia analítica y luego, mediante preguntas, trata de fomentar otro tipo de traslación y una generalización.

La potencialidad de relacionar en forma simultánea los gráficos y las expresiones analíticas de las funciones (puntos 2 y 3), el deslizador que ayuda a observar varios corrimientos a la vez (puntos 5 y 6) y el hecho que al cambiar la primera regla de designación por otra cambian todas las demás funciones en forma automática (punto 8), son los fundamentos que consideramos por los cuales la tarea amerita el uso de tecnología. El software permite ver los movimientos en una determinada función y luego cambiar esa función por otra y volver a analizarlos. A través de la visualización y la experimentación el alumno tiene las herramientas para analizar qué sucede con el dominio y la imagen de la función original cuando se la transforma.

Luego proponemos una tarea similar con traslación vertical para que los alumnos la realicen solos en equipos de dos personas de tal manera de afianzar lo desarrollado en ésta.

Mostramos imágenes desde la pantalla del celular en algunos pasos de la tarea.

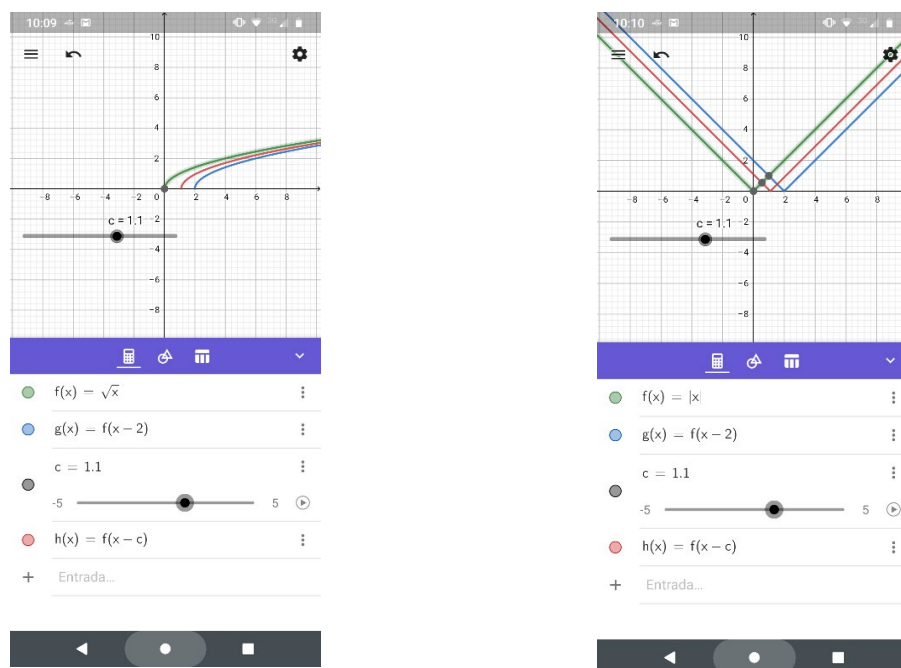


Figura 1. Captura de pantalla del dispositivo móvil en la resolución de la tarea 4.1



## 4.2. Tarea de construcción de conceptos

Consigna:

Realizar las siguientes acciones con GeoGebra (dadas en cursiva) y luego responder lo pedido:

1. Graficar la función  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
2. Crear un deslizador "a" que tome valores en el intervalo  $[0,2]$  con un incremento de 0,01.
3. Marcar un punto fijo  $P(1, f(1))$  y uno móvil  $Q(a, f(a))$ .
4. De acuerdo con estos puntos escribir: la variación de la variable independiente, la de la dependiente y el cociente entre ambas

$$\Delta x = \quad \Delta y = \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

5. Definir esta última expresión en GeoGebra en forma genérica para P y Q.

Completar el siguiente cuadro (usar GeoGebra)

	a = 0	a = 0.5	a = 0.8	a = 0.9	a = 0.95
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$					
	a = 2	a = 1.5	a = 1.2	a = 1.1	a = 1.11
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$					

Tabla 1. Cuadro para completar por el alumno en la tarea del punto 4.2.

6. Utilizando el comando Recta (P, Q) trazar la recta que pasa por P y Q. A esta recta se la llama recta secante. ¿Qué significado geométrico tiene?

Al mover el deslizador a ¿qué efecto produce sobre la recta secante?

Comparar las pendientes de las rectas secantes a medida que "a" se acerca a 1 y estimar a qué valor se acercan y completar resolviendo cada límite

$$\lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$\lim_{a \rightarrow 1} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$\lim_{a \rightarrow 1^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

¿Qué sucede con la recta cuando "a" es igual a 1? ¿Por qué creen que sucede esto?

.....  
.....  
.....  
.....

Se define recta tangente a una función en un punto P de la misma como la posición límite de las rectas secantes trazadas desde un punto móvil Q a P, a medida que Q se acerca a P. Teniendo en cuenta esta definición ¿cuál sería el significado del límite recién calculado?

.....  
.....  
.....  
.....

Fundamentación:

En esta tarea el objetivo de aprendizaje es que el alumno por sí mismo construya el concepto de recta tangente a una función en un punto y asocie su pendiente con el límite del cociente incremental.

Los conocimientos previos que necesita son los conceptos de función, límite, recta y pendiente de ésta.

Está diseñada para trabajar en equipos de dos alumnos, con una duración de 40 minutos. Luego el docente, con el grupo completo, recupera las ideas y define derivada de una función en un punto y formaliza la interpretación geométrica. En este caso la intervención del docente es de suma importancia.

La tarea es adecuada para hacer con uso de tecnología ya que el deslizador promueve el proceso de visualizar el movimiento de las rectas secantes que tienden a una posición límite. El efecto sorpresa que produce la App es que no grafica recta alguna cuando el valor del parámetro es igual a 1, cuestión que el alumno debe responder cuál es su opinión sobre lo que está sucediendo. Esto luego es retomado por el docente cuando explica la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.

En este caso la App no posee un comando que calcule límites, razón por la cual se necesita la combinación con acciones en lápiz y papel. Esto enriquece el trabajo y revaloriza el cálculo por parte del alumno.

### 4.3. Tarea de estudio de casos

Consigna:

Analizar para los diferentes valores del parámetro c si la siguiente función tiene o no asíntotas. En caso afirmativo dar sus ecuaciones. Justificar todos los pasos realizados.

$$f : D_f \rightarrow R / f(x) = \frac{1}{x^2 - c}$$

Fundamentación:

En esta tarea el objetivo de aprendizaje es que el alumno mediante el análisis de las diversas situaciones que posee el denominador de la función racional proponga distintos casos sobre las asíntotas.

Los conocimientos previos que necesita son el concepto de función, raíces de un polinomio, límite y asíntotas a una curva.

Es una actividad diseñada para ser realizada individualmente o en equipos de dos personas, en forma domiciliaria y luego entregarla al docente para su evaluación.

El uso de la tecnología permite la exploración de las distintas situaciones. El estudiante puede analizarlas con uso de deslizador (ya introducido en tareas previas) o dando distintos valores al parámetro  $c$ . Cualquiera sea la estrategia que use luego debe justificar todos los casos encontrados y generalizar qué pasa en cada uno de ellos. Algunas justificaciones se tendrán que hacer en lápiz y papel debido a que no se pueden calcular los límites a través de la App.

#### 4.4. Tarea de visualización

Consigna:

Demostrar que la función  $f : (0, +\infty) \rightarrow R / f(x) = x + \ln x$  tiene una recta tangente que pasa por el origen.

Fundamentación:

Enfatizamos para esta tarea la acción de visualizar como “entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del problema” (Hitt, 2003, p. 215). El objetivo es visualizar el problema solicitado.

Por experiencia de varios años de docencia sabemos que los alumnos cuando se enfrentan a esta consigna calculan la ecuación de la recta tangente en el origen de coordenadas, algo imposible de realizar ya que  $x = 0$  no pertenece al dominio de dicha función. Entonces consideramos que usar la App para que puedan visualizar la situación, es decir comprender lo que se busca, es esencial para tal fin.

Los conocimientos previos necesarios son el de recta tangente a una curva en un punto y el de recta.

El docente guía al grupo completo en la secuencia de comandos para usar GeoGebra: la entrada de la función, la designación de un deslizador “a” con valores entre 0,1 y 4 (con incremento de 0,01) y el cálculo de la ecuación de una recta tangente genérica a la función en un punto  $P(a, f(a))$ . Aclaramos que en versiones anteriores existía el comando Tangente. Al mover el deslizador pretendemos que el alumno entienda qué significa la consigna del problema. Asimismo, puede encontrar una solución aproximada en forma gráfica que luego tendrá que demostrar analíticamente usando lápiz y papel.

Mostramos cómo se ve la pantalla del celular. La Figura 2 (parte izquierda) muestra el punto de la curva y su recta tangente que van variando junto con el deslizador. En la Figura 2 (parte derecha) vemos cómo podemos obtener la solución

gráfica, haciendo pasar la tangente por el origen y mostrando en la pantalla el resultado.

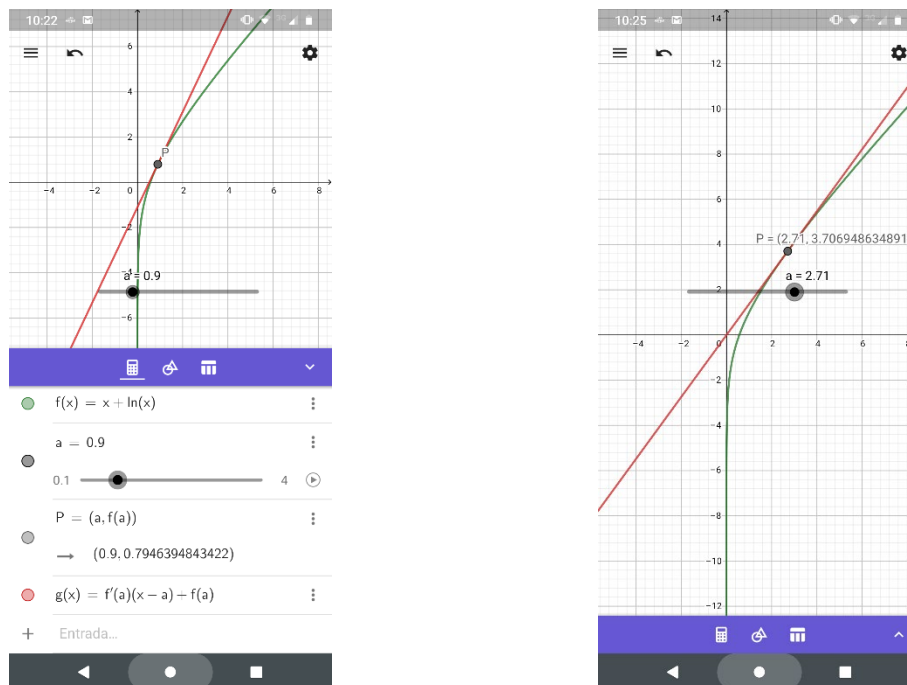


Figura 2. Capturas de pantalla del dispositivo móvil en la resolución de la tarea 4.4.

#### 4.5. Tarea de construcción de ejemplos

Consigna:

Inventar una función con dominio en  $\mathbb{R}$ , definida por partes en tres tramos: uno en el intervalo  $(-\infty, -2]$ , otro en  $(-2, 3/2)$  y el último en  $[3/2, +\infty)$  que tenga las siguientes características:

- En la regla de asignación debe figurar al menos en una rama una función trascendente.
- Sea continua en todo su dominio salvo en  $x = 3/2$  con discontinuidad de salto 3.
- Sea derivable en todo su dominio salvo en  $x = 3/2$ .

Justificar cada elección.

Fundamentación:

El objetivo es que el alumno pueda relacionar los conceptos de continuidad y derivabilidad en una función con la exigencia que la construya él mismo.

Los conocimientos previos para realizarla son el de función (algebraica y trascendente), continuidad y derivabilidad de una función.

Está pensada para hacer en el aula en equipos de dos personas con una duración de 45 minutos para luego ser entrega al docente para la evaluación.

El uso de tecnología permite, por ejemplo, mediante la movilización de cada parte lograr la discontinuidad con un salto determinado o la continuidad en  $x = -2$ . A su vez en este punto se pueden mover las pendientes de cada regla de asignación a derecha e izquierda del punto hasta ser la misma. Esta cuestión luego deberá ser probada en forma analítica. El docente actúa como guía teniendo en cuenta cada caso en particular.

#### 4.6. Tarea de aplicación de resultados teóricos a problemas prácticos

Consigna:

Resolver la ecuación  $\arctg x = x^2$  usando un polinomio adecuado de Mac Laurin.

Fundamentación:

El objetivo de esta tarea es aplicar el concepto de polinomios de Mac Laurin al cálculo de raíces de una ecuación trascendente. Utilizamos el potencial gráfico de la aplicación para que el alumno visualice las dos funciones que se intersecan, el polinomio que aproxima a la función trascendente y la aparición de una raíz extraña cuando se resuelve la ecuación polinómica. Es necesario combinar con acciones en lápiz y papel ya que la aplicación no resuelve ecuaciones de este tipo. Es esta razón por la que se termina eligiendo un polinomio de grado 3.

Los conocimientos previos necesarios para abordarla son el de ecuaciones, función arco tangente, parábola y polinomio de Taylor o Mac Laurin.

El trabajo en el aula es en forma conjunta: docente y grupo de alumnos. En una primera instancia el docente los ayuda a interpretar la consigna. Para esto usa la aplicación graficando las dos funciones para las cuales hay que buscar los puntos de intersección. Luego el profesor explica que se pueden utilizar polinomios de aproximación para resolverla y, con el grupo entero, se van intentando distintas aproximaciones hasta llegar a la de grado 3. En todo momento se utiliza el dispositivo móvil para calcular los distintos polinomios de Mac Laurin, graficar y observar las intersecciones. En versiones anteriores contábamos con el comando PolinomioTaylor. En esta actualización es necesario calcularlo en forma manual y luego darle entrada en la App.

La tarea tiene un efecto sorpresa cuando al calcular las intersecciones entre el polinomio de grado 3 y la función cuadrática encontramos una raíz extraña. Uno de los mayores beneficios de la aplicación es que la visualización favorece la comprensión de la aparición de la raíz.

Mostramos la pantalla del celular. En la Figura 3 (lado izquierdo) las dos funciones que se cortan, el polinomio de Mac Laurin de la función trascendente y los puntos que la aplicación resalta (puntos de intersección, extremos relativos de las curvas). En la Figura 3 (lado derecho) se ve la solución extraña que aparece al realizar la aproximación. La aplicación indica el punto si uno “se para” en el mismo.

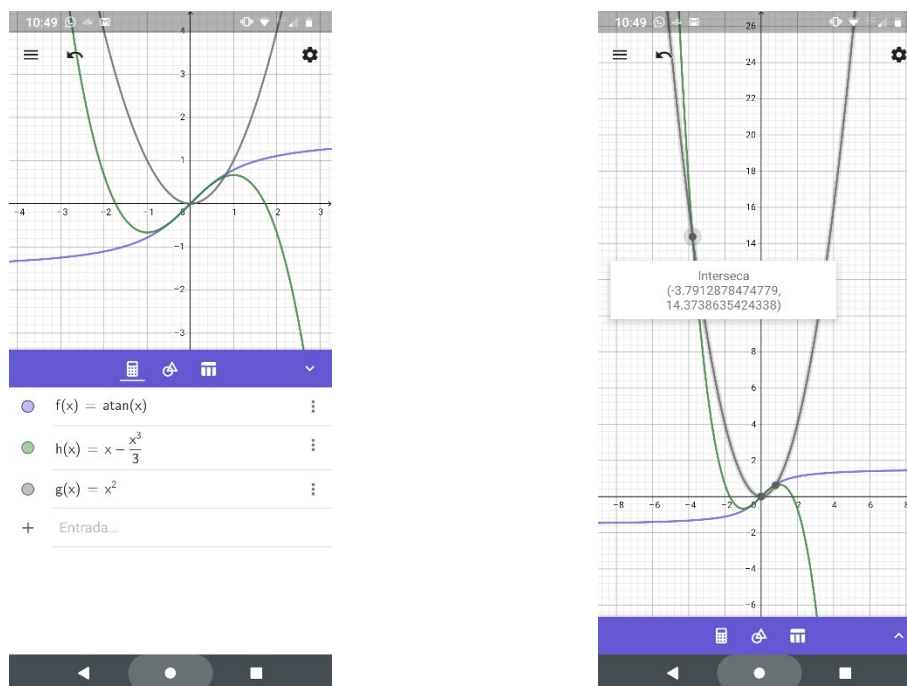


Figura 3. Capturas de pantalla del dispositivo móvil en la resolución de la tarea 4.6.

## 5. Reflexiones finales

La utilización de la App de GeoGebra para celular nos permite incorporar la tecnología al aula sin costos de implementación. Todos los alumnos tienen celular, es una aplicación gratuita que tiene un gran potencial y no necesita conexión a internet. Estas razones nos invitan a sacar de ella un máximo provecho.

Tener una clasificación sobre tareas con software nos posibilita elaborarlas con el objetivo de promover un trabajo matemático diverso y rico. En los diseños tuvimos en cuenta establecer el objetivo del aprendizaje a lograr, determinar los conocimientos previos necesarios para realizarla, reflexionar sobre el uso de tecnología y planificar la forma de llevarla al aula. Luego de realizar la experiencia propiamente dicha seremos capaces de efectuar la fase de retroalimentación.

El software adquiere importancia a la hora de visualizar, acción que se manifiesta en todas las tareas propuestas. Como indican Arcavi y Hadas (2000) consiste en representar, entender y comunicar una información visual y también poder transformarla en tiempo real. En la tarea de generalización los estudiantes pueden construir y transformar en tiempo real las traslaciones solicitadas, lo que promueve el estudio de propiedades que varían y otras no. En las tareas de visualización y estudio de casos, la visualización propicia las bases intuitivas para la justificación formal. En la tarea de construcción de conceptos la visualización del movimiento de las rectas secantes a su posición límite contribuye a la comprensión del concepto de recta tangente.

La experimentación que definen Arcavi y Hadas (2000) se manifiesta en la tarea de generalización al permitir al estudiante la facilidad de obtener, cambiando la regla de asignación de la función original, muchos ejemplos sobre una misma situación. La



información obtenida de esta manera favorece a enunciar la generalización solicitada. En la tarea de estudio de casos la experimentación se presenta cuando el estudiante analiza las diversas situaciones sobre el denominador de la función racional y las asocia con las asíntotas de la curva. El cambiar de una forma sencilla los diferentes valores del parámetro y observar lo que sucede respecto del gráfico facilita la resolución de la tarea.

El efecto sorpresa que definen los autores mencionados se revela en la tarea de construcción de conceptos ante la “desaparición” de la recta secante cuando los dos puntos coinciden y en la tarea de aplicación de resultados teóricos cuando aparece una raíz extraña de la ecuación original.

Por último, la necesidad de pruebas formales luego de experimentar está presente en las tareas de generalización, estudio de casos, construcción de conceptos y de visualización.

Este pedido explícito de pruebas formales promueve la habilidad de comunicar y demostrar lo que “se ve”. Al respecto Costa (2011) manifiesta que en una primera etapa los estudiantes desarrollan sin mayores inconvenientes las habilidades de visualización y manipulación que el entorno de GeoGebra les ofrece. Pero cuando deben desplegar su habilidad de comunicación para trasladar su trabajo al lenguaje simbólico, el reto es mayor y el rendimiento desciende. Por esta razón en la mayoría de las tareas promulgamos que se complementen con lápiz y papel y con las justificaciones correspondientes.

No queremos dejar de reflexionar sobre el trabajo del profesor. Coincidimos con Costa (2011) y, lo dejamos explícito en el diseño de las tareas, que la generalización de los resultados o la demostración de los mismos, demandan un posterior trabajo en el cual la intervención del docente como suministrador de contenidos es fundamental.

Por último, no olvidarnos que, una vez llevadas las tareas al aula, es necesario reflexionar sobre lo sucedido y hacer una retroalimentación acerca de los elementos que se pueden potenciar para mayor provecho de los alumnos, así como también plantear alternativas o mejoras. Como indican Saucedo et. al (2014) el profesor juega un papel fundamental ya que debe convertirse en observador y ayudante de los alumnos. En estos roles descubre cosas nuevas en el desarrollo de cada una de las tareas que le permiten mejorarlas para que el material utilizado sea realmente un facilitador del aprendizaje.

## Bibliografía

- Arcavi A. y Hadas, N. (2000). El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque. Recuperado el 20 de agosto de 2010, de <http://www.scribd.com/doc/15782300/LA-PC-COMO-MEDIO-DE-APRENDIZAJE>Arcavi2000
- Barahona, F., Barrera, O., Vaca, B e Hidalgo, B. (2015). GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. *Revista Tecnológica ESPOL (RTE)*, 28 (5), 121-132. Recuperado de <http://www.rte.espol.edu.ec/index.php/tecnologica/article/view/429>

- Brazuelo, F. y Cacheiro, M. (2010). Diseño de páginas web educativas para teléfonos móviles. *EduTec. Revista electrónica de tecnología educativa*, 32. Recuperado de <https://www.edutec.es/revista/index.php/edutec-e/article/view/437>
- Campos, M. y Torres, A. A. (2018). Diseño de Tareas de Aprendizaje Matemático con GeoGebra: Mecanismos Articulados. *Pädi. Boletín Científico del Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería*, 10, 80-85. Recuperado de <https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/article/view/2939>
- Carrillo, A. (2012). El dinamismo de GeoGebra. *UNION: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 29, 9-22. Recuperado de <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/29/archivo5.pdf>
- Costa, J. (2011). Plataforma de matematización en un entorno GeoGebra dentro de un planteamiento didáctico «desde abajo hacia arriba». *Enseñanza de las Ciencias*, 29 (1), 101–114. Recuperado de <https://pdfs.semanticscholar.org/fd66/ea3ece99897c5c43600b8f9e29b3bd4bd060.pdf>
- Falsetti, M., Favieri, A., Scorzo, R. y Williner, B. (2011). Actividades de Cálculo Diferencial con computadora: Estudio de habilidades matemáticas desarrolladas. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 13 (2), 1-22.
- Fiallo, J. y Parada, S. (2014). Curso de precálculo apoyado en el uso de GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Revista Científica* 20, 56-71. Recuperado de <https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/revcie/article/view/7689>
- García, D., Martínez, M y Flores, J. (2018). Genesis instrumental de la razón de cambio instantánea mediada por GeoGebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31 (2), 1876-1883.
- García, F. J. (2019). Introducción a “Diseño de tareas en educación matemática: Una diversidad de marcos teóricos”. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 1-4.
- Garelik y Montenegro (2015). Un problema de movimiento parabólico en Cálculo con uso de GeoGebra. *VI Congreso Virtual Iberoamericano de Calidad en Educación Virtual y a Distancia*.
- GeoGebra. (2020). *¿Qué es GeoGebra?* Recuperado de <https://www.geogebra.org/about>
- Henríquez P., Organista, J. Lavigne, G. (2013) Nuevos procesos de interactividad e interacción social: uso de smartphones por estudiantes y docentes universitarios. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, 13 (3), 1-21. Recuperado de [https://www.scielo.sa.cr/scielo.php?pid=S1409-47032013000300012&script=sci\\_abstract&tlng=es](https://www.scielo.sa.cr/scielo.php?pid=S1409-47032013000300012&script=sci_abstract&tlng=es)
- Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de objetos matemáticos en ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10 (2), 213-223.
- Jiménez, J. y Jiménez, S. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista Electrónica sobre Tecnología, Educación y Sociedad*, 4 (7). Recuperado de <http://www.ctes.org.mx/index.php/ctes/article/view/654/736>
- Pabón, J., Nieto, Z., Gómez C. (2015). Modelación matemática y GEOGEBRA en el desarrollo de competencias en jóvenes investigadores. *Revista Logos, Ciencia y Tecnología*, 7 (1), 64-70. Recuperado de

<https://pdfs.semanticscholar.org/c0fe/40089e49f0a91fda74351ccc917727e24776.pdf>

Ramos, A., Herrera, J. y Ramírez, M. (2010). Desarrollo de habilidades cognitivas con aprendizaje móvil: un estudio de caso. *Revista Comunicar*, 34, 201-209.

Ruiz, L., Del Rivero, S. y Valenzuela, H. (2018). Geogebra: auto regulador del aprendizaje en conocimientos previos en cálculo diferencial. *Revista Entorno Académico* 20, 15-2. Recuperado de [http://www.itesca.edu.mx/publicaciones/entorno/Entorno\\_Academico\\_20\\_Enero\\_2018.pdf](http://www.itesca.edu.mx/publicaciones/entorno/Entorno_Academico_20_Enero_2018.pdf)

Saucedo, R., Godoy, J., Fraire, R. y Herrera, H. (2014). Enseñanza de las integrales aplicadas con Geogebra. *El Cálculo y su Enseñanza* 5 (5), 125-138. Recuperado de [http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el\\_calculo/data/docs/P8.bbf0a982b7788f.pdf](http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/P8.bbf0a982b7788f.pdf)

Sosa, L., Aparicio, E. y Tuyub, J. (2008). Diseño de actividades de matemáticas con uso de tecnología. En P. Leston (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21, 1036-1045. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

**Williner Betina:** licenciada en Matemática Aplicada, Magister y Doctora en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Experimentales (orientación Matemática). Profesora Asociada en la Universidad Nacional de La Matanza en carreras de ingeniería; profesora titular en la Universidad de Morón y profesora adjunta en la Universidad Tecnológica Nacional. Docente – investigadora en Educación Matemática con dedicación especial en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo. [bwilliner@unlam.edu.ar](mailto:bwilliner@unlam.edu.ar) Sarachaga 3334 Castelar, provincia de Buenos Aires, Argentina. Teléfono: +5491123273436

**Favieri Adriana:** profesora de Matemática y Astronomía, Lic. en Administración de la Educación Superior y Magister en Docencia Universitaria. Profesora Adjunta en la Universidad Nacional de La Matanza en carreras de ingeniería y Asociada en la Universidad Tecnológica Nacional. Docente – investigadora en Educación Matemática especialidad incorporación de TIC en enseñanza de la matemática, habilidades matemáticas y metacognición. [afavieri@unlam.edu.ar](mailto:afavieri@unlam.edu.ar)

**Scorzo Roxana:** profesora de Matemática y Astronomía, Licenciada en Gestión Educativa. Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas (orientación Matemática). Profesora Adjunta, en la Universidad Nacional de La Matanza en carreras de ingeniería y en la Universidad Tecnológica Nacional. Docente Investigadora en Educación Matemática especialmente en la incorporación de TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje. [rsorzo@unlam.edu.ar](mailto:rsorzo@unlam.edu.ar)