

Creación y resolución de problemas a partir de una situación de descuento

Uldarico Malaspina

Fecha de recepción: 14/12/2022

| | |
|-----------------|--|
| Resumen | <p>Se presenta una situación de descuento porcentual en una tienda de abarrotes y un problema creado a partir de ella, que implica un manejo – implícito o explícito – de una función afín por tramos y un reparto proporcional. Se evidencia la interrelación entre la creación de problemas por elaboración y por variación, pues se crean nuevos problemas a partir del problema creado, que se consideran como problemas pre o problemas pos, respecto a tal problema. Se destaca que en uno de los problemas el requerimiento es cualitativo: examinar gráficos de funciones y determinar cuál de ellos representa mejor la función de pago correspondiente a la situación de descuento dada.</p> <p>Palabras clave: creación de problemas, resolución de problemas, descuento, porcentaje, funciones, reparto proporcional.</p> |
| Abstract | <p>A percentage discount situation in a grocery store is presented and a problem is created from it, which implies handling – implicit or explicit – of a piecewise affine function and a proportional distribution. The interrelation between the creation of problems by elaboration and by variation is evidenced, since new problems are created from the problem created, which are considered as pre problems or pos problems, with respect to the said problem. It is emphasized that in one of the problems the requirement is qualitative: to examine function graphs and determine which of them best represents the payment function corresponding to the given discount situation.</p> <p>Keywords: problem posing, problem solving, discount, percentage, functions, proportional distribution.</p> |
| Resumo | <p>Uma situação de desconto porcentual em uma mercearia é apresentada e um problema criado a partir dela, o que implica um tratamento – implícito ou explícito – de uma função afim por partes e uma distribuição proporcional. A inter-relação entre a criação de problemas por elaboração e por variação é evidenciado, pois novos problemas são criados a partir do problema criado, os quais são considerados como pré-problemas ou pós-problemas, em relação a tal problema. Ressalta-se que em um dos problemas a exigência é qualitativa: examinar gráficos de funções e determinar qual deles melhor representa a função de pagamento correspondente à situação de desconto dada.</p> <p>Palavras-chave: criação de problemas, resolução de problemas, desconto, percentagem, funções, distribuição proporcional.</p> |

1. Problema

En la tienda de abarrotes de don Alberto, venden el kg de arroz a 4 soles y para promocionar su venta, don Alberto ofrece que, por compras mayores a 5 kg, descontará 20% por el pago correspondiente a lo que exceda (sobrepase) a 5 kg.

Zoila quiere comprar 5 kg de arroz y Yolanda quiere comprar 3 kg de arroz. Ellas son amigas, y para beneficiarse con la oferta de don Alberto, una de ellas compró los 8 kg y luego se repartieron los kg de arroz e hicieron las cuentas correspondientes por el pago.

¿Cuánto ahorró Zoila y cuánto ahorró Yolanda, en relación a lo que hubieran pagado individualmente en la tienda de don Alberto?

Este problema surgió, cuando con el equipo docente¹ que ofrecemos talleres de profundización de conocimientos disciplinares y didácticos para profesores de Educación Básica Regular – por encargo de la Academia Nacional de Ciencias del Perú – preparábamos un taller de creación y resolución de problemas de matemáticas para profesores de secundaria en ejercicio. Fue luego de una conversación con algunos profesores, acerca de la importancia de crear y resolver problemas de matemáticas vinculados con situaciones cotidianas. La idea fue configurar una situación en el equipo docente, crear un problema a partir de ella, pedir que algunos docentes en ejercicio lo resuelvan y me envíen sus soluciones, examinarlas en el equipo docente y luego, con una visión amplia de lo que podría ocurrir al resolver el problema, presentarlo en el taller de creación y resolución de problemas. Así, una de las situaciones que se presentó fue la compra-venta de arroz con los descuentos que suelen hacerse, según la cantidad de kilogramos que se compre, y se configuró la siguiente situación:

Situación

En la tienda de abarrotes de don Alberto, venden el kg de arroz a 4 soles y para promocionar su venta, don Alberto ofrece que, por compras mayores a 5 kg, descontará 20% por el pago correspondiente a lo que exceda a 5 kg.

Ciertamente, la situación se presta para crear muchos problemas y veremos algunos de ellos. Comenzaremos examinando algunas soluciones del problema que ya hemos enunciado, como una muestra de las potencialidades didácticas y matemáticas de la situación planteada.

A continuación, muestro lo enviado por tres docentes en ejercicio:

Docente 1

Si compran por separado:

Zoila ----- 5 Kg x 4 soles = 20 soles

Yolanda ----- 3 kg x 4 soles = 12 soles

Si compra una de ellas los 8 Kg

¹ En el equipo docente me acompañan la profesora Maritza León y los profesores Carlos Torres, Enrique Piñeyro y Max Ponce.

$$8 \text{ Kg} \times 4 \text{ soles} = 32 \text{ soles}$$

$$32 \times 20\% = 6,4 \text{ soles}$$

$$\text{Se pagaría } 32 - 6,4 = 25,6 \text{ soles}$$

$$25,6 : 8 = 3,2 \text{ soles, les costó el kilo de arroz finalmente.}$$

De esta manera, Zoila y Yolanda pagaron:

$$\text{Zoila} \text{ ---- } 5 \times 3,2 = 16 \text{ soles}$$

$$\text{Yolanda} \text{ ----- } 3 \times 3,2 = 9,6 \text{ soles}$$

Y el ahorro para cada una fue:

$$\text{Zoila} \text{ ----- } 20 - 16 = 4 \text{ soles}$$

$$\text{Yolanda} \text{ ----- } 12 - 9,6 = 2,4 \text{ soles}$$

En el taller, durante los trabajos grupales con este problema, no fueron pocos los docentes en ejercicio que presentaron una solución parecida a esta; sin embargo, al pedirles que lean con más atención el problema, pronto reconocieron su error: considerar – por compras mayores a 5 kg – el descuento del 20% por el total de la compra, en lugar de considerarlo solo por lo que sobrepase de 5 kg.

Docente 2

Individualmente

Zoila $\frac{4 \text{ soles}}{\text{kg}}$ $\frac{5 \text{ kg}}{}$ $\text{Pago} = 4(5) = 20$

Yolanda $\frac{4 \text{ soles}}{\text{kg}}$ $\frac{3 \text{ kg}}{}$ $\text{Pago} = 3(4) = 12$

Juntos

$\frac{4 \text{ soles}}{\text{kg}}$ $\frac{0,2(4) \text{ soles}}{\text{kg}}$

$\frac{5 \text{ kg}}{}$ $\frac{3 \text{ kg}}{}$

$\text{Pago Total} = 4(5) + 3(3,2) = 29,6$

Ahorro grupal $(20 + 12) - (29,6) = 2,4$

Ahorro Individual Zoila = $\frac{5}{8}(2,4) = 1,5$

Yolanda = $\frac{3}{8}(2,4) = 0,9$

Pago Final Individual con oferta Zoila = $20 - 1,5 = 18,5$

Yolanda = $12 - 0,9 = 11,1$

En el taller, los intercambios de ideas en los trabajos grupales, luego de leer detenidamente el problema, contribuyeron a proponer soluciones correctas, similares a esta. Puede percibirse que implícitamente se está haciendo uso de una función de pago, que es diferente para compras de 5 kilos o menos de arroz y para compras de arroz mayores a 5 kilos. También, aunque no se dice, para determinar el ahorro individual, se hace uso de un reparto proporcional del ahorro grupal, respecto a 5 y a 3, que son las cantidades de arroz que corresponden a Zoila y Yolanda.

Docente 3

Se construye una función pago, de dominio partido:

$$f(x) = \begin{cases} 4x & ; 0 \leq x \leq 5 \\ 4(5) + 0,8(4)(x - 5); & x > 5 \end{cases}$$

O sea

$$f(x) = \begin{cases} 4x; & 0 \leq x \leq 5 \\ 4 + 3,2x & ; x > 5 \end{cases}$$

Así,

Pagos individuales (sin usar la oferta): $f(3) = 12$ y $f(5) = 20$.

Total: $f(3) + f(5) = 32$

Pago conjunto (usando la oferta): $f(8) = 29,60$

Ahorro total: $(f(3) + f(5)) - f(8) = 32 - 29,60 = 2,40$

Ahorro individual:

Zoila ahorra:

$$\frac{2,40}{8} \times 5 = 1,50$$

En consecuencia, paga $f(5) - 1,50 = 20 - 1,50 = 18,50$ soles

Yolanda ahorra:

$$\frac{2,40}{8} \times 3 = 0,90$$

En consecuencia, paga $f(3) - 0,90 = 12 - 0,90 = 11,10$ soles

Esta fue una correcta solución singular, presentada por un docente con muy buena formación matemática. Otros profesores hicieron algunos intentos de construir una función de pago, pero no llegaron al nivel de formalización mostrado en la propuesta del Docente 3, en la que es explícito el uso de una función afín por tramos, con un tramo de función lineal.

Considerando que el problema podría ser propuesto a estudiantes de secundaria, y la importancia de que los docentes tengan criterios claros al examinar las soluciones que los estudiantes presenten, más allá de los cálculos específicos, una pauta para examinar tales soluciones podría ser la siguiente:

- Calcular los pagos por compras individuales (no se puede usar la oferta).
- Calcular el pago, comprando los 8 kg una sola persona (para usar la oferta)
- Determinar los ahorros, comparando los pagos obtenidos usando y sin usar la oferta
- Repartir el ahorro total, proporcionalmente a 5 y 3.

Ciertamente, esta pauta no es una secuencia lineal de pasos a seguir y la forma de concretarlos no es única, como puede verse en las soluciones correctas, anteriormente mostradas, de los docentes 2 y 3.

2. Creación de otros problemas por elaboración

Las soluciones mostradas y los criterios de análisis para las soluciones, permiten tener una mayor claridad sobre las potencialidades didácticas y matemáticas del problema, creado a partir de la situación dada; o sea, creado por *elaboración* (Malaspina, 2017). Una forma de explotar tales potencialidades es creando nuevos problemas por elaboración, usando la situación y relacionándolos con el problema dado. Resulta interesante usar criterios didácticos y matemáticos para considerar algunos de los problemas creados como problemas *pre* o problemas *pos*, respecto al problema original. (Malaspina, 2017 y Malaspina, Mallart y Font, 2015).

Veamos más de cerca la creación de problemas por elaboración, a partir de la situación dada:

Situación:

En la tienda de abarrotes de don Alberto, venden el kg de arroz a 4 soles y para promocionar su venta, don Alberto ofrece que, por compras mayores a 5 kg, descontará 20% por el pago correspondiente a lo que exceda a 5 kg.

Sabemos que, para crear problemas por elaboración, debemos usar la situación dada para explicitar los 4 elementos fundamentales de un problema: *Información, Requerimiento, Contexto y Entorno matemático* (Malaspina, 2017). En este caso, tenemos como *información* básica:

- Se vende cada kg de arroz a 4 soles.
- Por compras mayores a 5 kg, hay un descuento del 20% por el pago correspondiente a lo que exceda a 5 kg.

Obviamente, esta información básica puede modificarse y según ella hacer los requerimientos. Por ejemplo, en el problema de Zoila y Yolanda, se ha añadido información.

El *contexto* de la situación dada es claramente extra-matemático y podemos usarlo tal cual, para crear un problema. Parece lo más natural, pero también podría pensarse en considerar un contexto intra-matemático, con una situación general de compra-venta y un descuento porcentual q para compras de más de n kilos de la mercadería.

¿En qué entorno matemático podemos crear un problema, usando la información y el contexto dados? Algunas posibilidades: Porcentajes; funciones;

reparto proporcional. Esto depende, en términos prácticos, del grado de secundaria en el que se usaría el problema que se cree.

¿Qué requerimientos podría hacerse, considerando los elementos anteriores y específicamente los entornos matemáticos explicitados? Por ejemplo, considerando porcentajes, se puede pedir algunos cálculos concretos, la construcción de tablas que expresen los pagos por la venta de diferentes cantidades de kilos de arroz mayores a 5 kg, etc. Considerando funciones, se puede pedir el esbozo del gráfico de una función que exprese los pagos por las compras de diversas cantidades de arroz; o expresiones algebraicas de funciones de pago; etc. Considerando reparto proporcional, se puede pedir – como en el problema de Zoila y Yolanda – cómo repartirse el ahorro de dos o más personas que se unieron para hacer una compra conjunta, usando la oferta, al no poder usarla individualmente.

Con este marco, veamos algunos otros problemas creados a partir de la situación dada:

Problema 1

En el puesto de abarrotes de don Alberto, venden el kg de arroz a 4 soles y para promocionar su venta, don Alberto ofrece que, por compras mayores a 5 kg, descontará el 20% por todo lo que exceda (sobrepase) a 5kg.

Si Carmen compra 10 kg de arroz, ¿cuánto deberá pagar?

Problema 2

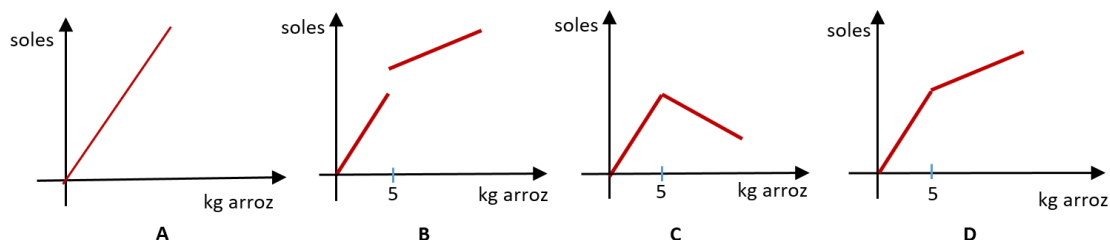
En el puesto de abarrotes de don Alberto, venden el kg de arroz a 4 soles y para promocionar su venta, don Alberto ofrece que, por compras mayores a 5 kg, descontará el 20% por todo lo que exceda (sobrepase) a 5kg.

Haz una tabla en la que se muestre lo que se debe pagar por las siguientes cantidades de arroz (en kilogramos): 4,5; 5; 5,25; 8,75; 15.

Problema 3

En el puesto de abarrotes de don Alberto, venden el kg de arroz a 4 soles y para promocionar su venta, don Alberto ofrece que, por compras mayores a 5 kg, descontará el 20% por todo lo que exceda (sobrepase) a 5kg.

¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor a la función f que expresa la cantidad $f(x)$ soles que se debe pagar por la compra de x kg de arroz? Justifica.



Problema 4

En el puesto de abarrotes de don Alberto, venden el kg de arroz a 4 soles y para promocionar su venta, don Alberto ofrece que, por compras mayores a 5 kg, descontará el 20% por todo lo que exceda (sobrepase) a 5kg.

Llama x al número de kg de arroz que se compra y $f(x)$ a la cantidad de soles que corresponde pagar.

- Escribe la expresión algebraica para $f(x)$, cuando $0 \leq x \leq 5$
- Escribe una expresión algebraica para $f(x)$, cuando $x > 5$

Problema 5

En el puesto de abarrotes de don Alberto, venden el kg de arroz a 4 soles y para promocionar su venta, don Alberto ofrece que, por compras mayores a 5 kg, descontará el 20% por todo lo que exceda (sobrepase) a 5kg.

Haz una representación gráfica de la función f que expresa la cantidad $f(x)$ soles que se debe pagar por la compra de x kg de arroz. Expresa las coordenadas de los puntos del gráfico de f , de abscisas 5 y 8.

Teniendo en cuenta que – respecto a un problema determinado – un *problema pre* es el que facilita la comprensión y solución del problema dado y un *problema pos* es más retador que el problema dado (Malaspina, 2017), con los profesores participantes se suscitó una entusiasta deliberación sobre el calificativo de pre o de pos a los problemas del 1 al 5, respecto al problema de Zoila y Yolanda propuesto inicialmente. Finalmente, considerando la importancia de los conocimientos previos de los estudiantes y que los problemas se trabajarían con estudiantes de tercer grado de secundaria, los problemas 1 y 2 se calificaron como problemas pre y los problemas 3, 4 y 5 como problemas pos respecto al problema inicial.

Destacamos, una vez más, la importancia de las emociones positivas que se generan en los trabajos colaborativos, en las distintas fases de creación de problemas; de manera especial en las indagaciones y en los refinamientos, así como en las discusiones para identificar los problemas como pre o como pos respecto a un problema dado.

Como para resolver el problema de Zoila y Yolanda debe usarse un razonamiento de reparto proporcional y este no está presente en ninguno de los problemas anteriormente creados, sería pertinente crear un problema pre en esta línea de pensamiento. Por ejemplo:

Problema 6

Julián y Rufino tienen sus puestos de venta en el mismo mercado. En el mercado mayorista ellos han comprado 3 y 5 sacos de arroz, respectivamente, para llevarlos a sus puestos de venta y – para ahorrar gasto de transporte – deciden contratar una sola camioneta para el traslado. Si por el traslado del total de sacos de arroz comprados les cobran 40 soles, ¿Consideras equitativo que cada uno pague 20 soles? ¿Por qué? ¿Qué alternativa propones?

Notar que este problema no usa la situación inicialmente planteada (la tienda de abarrotes de don Alberto y el descuento porcentual que hace), pero esto no es esencial para que sea un problema pre del problema de Zoila y Yolanda, sino que su solución ayude a resolver tal problema; en este caso, conduciendo a tener en cuenta un reparto directamente proporcional. Más aún, como vemos, para un problema dado, se pueden crear varios problemas pre y varios problemas pos.

3. Comentarios

En lo expuesto, podemos percibir la interrelación que se da entre la creación de problemas por elaboración y por variación; así, a partir de la situación presentada en la tienda de abarrotes de don Alberto, se creó el problema de Zoila y Yolanda; y, teniendo en cuenta algunas soluciones de este, se crearon otros 6 problemas, que se caracterizaron como problemas pre o problemas pos respecto al de Zoila y Yolanda. En general, a partir de una situación se crea un problema (por elaboración) – pasando por las fases de indagación, propuesta, resolución y refinamiento – y a partir del problema creado se pueden crear otros problemas (por variación) – pasando también por las mismas fases mencionadas – que pueden ser problemas pre o problemas pos respecto al problema creado inicialmente.

Entre los problemas propuestos en este caso, cabe destacar que los tres problemas pos respecto al problema de Zoila y Yolanda (3, 4 y 5), son relacionados con funciones y que en el problema 3 hay un requerimiento cualitativo, enfocando un manejo del concepto de función poco usual en la secundaria y muy importante en el pensamiento matemático, más allá de las formalizaciones algebraicas, que es en lo que muy frecuentemente se focaliza en las clases, y a veces exageradamente.

Las funciones y sus gráficos están muy presentes en la realidad cotidiana y son base fundamental para la modelización. Muestras de ello son las tablas y gráficos orientativos que relacionan la edad y la talla de los niños, así como la edad y el peso; los gráficos de la evolución en el tiempo de los casos infectados por la pandemia; la aplicación de impuestos a la renta, etc. Con las funciones se puede reflejar gráfica o algebraicamente diversos supuestos sobre la realidad; así, otro problema a partir de la situación dada en la tienda de abarrotes de don Alberto, podría ser considerar que el descuento que ofrece es solo por compras de hasta 30 kg y que, si se hacen compras mayores a esta cantidad, el descuento ya es del 25% por el total de la compra. ¿Cómo sería el gráfico de la función pago en este caso?

Se evidencia la interrelación entre dos competencias consideradas en el Currículo Nacional de Educación Básica Regular, vigente en el Perú: la competencia de resolver problemas de cantidad y la competencia de resolver problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

Exhortamos una vez más a los encargados de la formación de docentes y de los programas de fortalecimiento de competencias didácticas y matemáticas de docentes en ejercicio, a ofrecer experiencias de trabajos colaborativos en la creación y resolución de problemas, que generen emociones positivas – tan importantes para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas – y que sean oportunidades tanto para estimular su pensamiento matemático como para evidenciar interrelaciones entre las competencias consideradas en los currículos de educación secundaria.

Bibliografía

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/malaspina.pdf>

Malaspina, U., Mallart, A. y Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. Konrad Krainer; Naďa Vondrova. CERME9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Feb 2015, Prague, Czech Republic. pp.2861-2866, *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. <hal-01289630>
https://www.researchgate.net/publication/305619452_Development_of_teachers'_mathematical_and_didactic_competencies_by_means_of_problem_posing.