UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 67. Abril 2023
Páginas 1-20

Aproximación al conocimiento especializado de maestros de ciencias que enseñan Matemática en Educación Primaria en torno a la noción de reconfiguración para determinar la medida de área de figuras planas

Melissa Castillo Medrano, Miguel Montes

Fecha de recepción: 14/02/2023
Fecha de aceptación: 15/03/2023

Resumen	En este trabajo se presenta una aproximación acerca del conocimiento especializado de dos profesores que enseñan matemáticas que consideramos podría favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de la medida de área de figuras planas mediante la reconfiguración. La información se ha obtenido de dos profesores de sexto de primaria a través de entrevistas. Dicha información ha sido analizada con el modelo analítico Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). Si bien se han obtenido indicios acerca del conocimiento sobre algunas categorías del modelo en torno a la reconfiguración, es necesario realizar la misma exploración con un profesor experto. **Palabras clave**: Reconfiguración, Medida de área, Conocimiento especializado del profesor de matemática (MTSK), Composición y descomposición.
Abstract	This paper presents an approximation about the specialized knowledge of two teachers who teach mathematics that we consider could favor the teaching and learning process of the area measurement of plane figures through reconfiguration. The information has been obtained from two sixth grade teachers through interviews. This information has been analyzed with the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) analytical model. While insights into knowledge of some of the model categories around reconfiguration have been gained, the same exploration needs to be done with an expert teacher. **Keywords**: Reconfiguration, Area measurement, Mathematics Teacher Specialized Knowledge (MTSK), Composition and decomposition.
Resumo	Este artigo apresenta uma aproximação sobre o conhecimento especializado de dois professores que ensinam matemática que consideramos poder favorecer o processo de ensino e aprendizagem da medida de área de figuras planas por meio da reconfiguração. As informações foram obtidas de dois professores da sexta série por meio de entrevistas. Esta informação foi analisada com o modelo analítico Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK). Embora tenham sido obtidos insights sobre o conhecimento de algumas categorias de modelos em torno da reconfiguração, a mesma exploração precisa ser feita com um professor especialista.

Palavras-chave: Reconfiguração, Medição de Área, Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK), Composição e Decomposição.

1. Introducción

Diversas investigaciones han planteado las dificultades que tienen los estudiantes al momento de resolver problemas de cálculo de áreas (Montserrat et al., 2016; Caviedes et al., 2019). Estas dificultades responden, entre otras razones, a la forma de enseñanza en la escuela, una enseñanza basada en el uso de fórmulas y memorización, con el énfasis en la manipulación numérica y algebraica en lugar de la exploración de las relaciones geométricas de las figuras (García y Carrillo, 2006; Popoca y Acuña, 2011; Ng y Sinclair, 2015). Frente a esto, distintos autores plantean la posiblidad de explorar el concepto de área mediante la composición y decomposición de las figuras. De hecho, es posible calcular la medida del área de un polígono mediante la reconfiguración (Duval, 2012; Castillo, 2018).

En la investigación de Castillo (2018), ya se habían identificado las dificultades de los estudiantes peruanos con respecto al cálculo de medidas de áreas y se propuso trabajar la reconfiguración como una forma de obtener las medidas de figuras planas sin necesidad de usar fórmulas.

Sin embargo, a partir de nuestra experiencia vemos que no es suficiente trabajar este enfoque con los estudiantes, sino que además es necesario abordarlo con los docentes pues las dificultades que se presentan en los estudiantes muchas veces son originadas por la forma de enseñanza en las aulas (Caviedes et al., 2019). No solo porque presentan las mismas dificultades al abordar el área de figuras planas (Alguacil et al., 2016) sino porque hay una tendencia generalizada por parte de los docentes por utlizar fórmulas para encontrar el área de figuras planas o utilizar instrumentos de medición cuando no encuentran números en la figura (Caviedes et al., 2019).

Por otro lado, la reconfiguración no es la única forma de abordar la medida de áreas de figuras pues existen otras propuestas como el uso del geoplano que permiten también el éxito en las tareas de cálculo de áreas (Bjørkås y Van den Heuvel-Panhuizen, 2019; Tomova (2017)).

Actualmente hay mucho interés por caracterizar el conocimiento profesional del docente de matemáticas pues este nos permite analizar el conocimiento vinculado a la enseñanza y las conexiones entre los conocimientos necesarios para la enseñanza de la matemática (Carrillo et al., 2013a). Al hacer dicho análisis, podremos también reflexionar sobre el conocimiento especializado que nos permitiría una mejor gestión de la enseñanza del cálculo de medida de áreas mediante la reconfiguración en el aula (Barrera et al., 2016). Sin embargo, no hemos encontrado aún investigaciones que describan o caractericen el conocimiento docente con respecto a la reconfiguración.

Creemos que este tema es relevante porque en el Perú existen documentos curriculares que sustentan la importancia de la enseñanza de este concepto matemático en la escuela. En ese sentido, el Ministerio de Educación (Minedu, 2017) menciona que todo estudiante al finalizar el V ciclo de la Educación Básica Regular (EBR), es decir, sexto grado de educación primaria (11 – 12 años), debería ser capaz de emplear estrategias heurísticas, estrategias de cálculo, la visualización y procedimientos de composición y descomposición para construir formas desde perspectivas y desarrollo de sólidos, entre otros. Este documento nos muestra los estándares de aprendizaje que un estudiante de sexto grado de Educación Primaria debe lograr desarrollar al finalizar el V ciclo de la EBR. Sin embargo, estas expectativas no se están llevando a cabo en la actualidad pues en el Perú menos del 50% de estudiantes a nivel nacional puede responder de forma correcta tareas que impliquen el cálculo de medida de área de una figura plana (Minedu, 2016).

Por todas estas razones nos planteamos la siguiente pregunta de investigación ¿Qué conocimiento especializado moviliza un profesor de primaria al enseñar mediante la estrategia de reconfiguración? Con el fin de dar respuesta a esta pregunta nos planteamos el objetivo de analizar el conocimiento especializado del profesor de sexto de primaria sobre a la noción de reconfiguración. Para esto, haremos una aproximación al conocimiento de dos profesores de sexto grado de primaria mediante entrevistas semiestructuradas y luego haremos un análisis de contenido utilizando como categorías de análisis las categorías de los subdominios del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK) para luego establecer conclusiones sobre la naturaleza de su conocimiento.

2. Marco teórico

2.1. Conocimiento Especializado del profesor de matemática

Shulman (1986) propuso la existencia de un conocimiento exclusivo de los maestros que les permite tomar decisiones con respecto a qué enseñar, cómo representar y resolver problemas para un determinado contenido. A partir de la propuesta de Shulman se crearon diversos modelos para analizar el conocimiento del profesor. Uno de ellos fue el de Ball et al. (2008), quienes plantearon un modelo conocido como Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés) que permite analizar el conocimiento del profesor de matemática en relación al proceso de enseñanza – aprendizaje.

Algunos autores identificaron ciertas dificultades en el modelo de Ball (Montes et al., 2013; Carrillo et al., 2013b; Carrillo et al., 2018) y presentaron un nuevo modelo llamado Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés) (Carrillo et al., 2013a). Este modelo adopta la propuesta de Schoenfled quien define al conocimiento como la información disponible para resolver problemas, alcanzar metas o resolver una tarea.

El MTSK considera dos grupos de conocimientos: el conocimiento matemático (MK) que tiene que ver con el conocimiento que tiene el profesor de matemática como disciplina y el conocimiento didáctico del contenido (PCK) que tiene que ver con los conocimientos relacionados con el contenido matemático como objeto de enseñanza - aprendizaje (Carrillo et al., 2014). Cada grupo de conocimientos está subdividido a su vez en tres subdominios y cada subdominio en categorías que permiten profundizar más en los conocimientos que el profesor posee. El MK tiene como subdominios:

- El Conocimiento de los Temas (KoT), que considera el conocimiento de las matemáticas en sí mismas. Incluye cuatro categorías: Procedimientos; Definiciones, propiedades y fundamentos; Registros de representación; y Fenomenología y aplicaciones. Por ejemplo, conocer las aplicaciones del área en la vida real.
- El Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM) engloba el conjunto de conexiones que permite establecer relaciones entre los elementos que se están considerando al momento de enseñar (Montes y Climent, 2016). Tiene cuatro categorías: Conexiones de simplificación, Conexiones de complejidad, Conexiones auxiliares y Conexiones transversales. Por ejemplo, establecer relaciones entre las formas planas y tridimensionales.
- El Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) que contempla los modos de producción y funcionamiento matemático. Consta de cuatro categorías: el conocimiento sobre la desmostración de funciones y utilidades, sobre la práctica de definir, sobre la práctica de resolver problemas y el papel del lenguaje matemático. Por ejemplo, el lenguaje simbólico y el lenguaje coloquial.

Por otro lado, el PCK tiene como subdominios:

- El conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) que es el conocimiento sobre las características del contenido matemático y tiene relación con las posibilidades de enseñanza. Se divide en tres categorías: Teorías de la enseñanza; Recursos didácticos; y Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. Por ejemplo: conocer las posibilidades que puede ofrecer el tangram para trabajar la reconfiguración.
- El Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) que considera el conocimiento sobre las características inherentes a la matemática. Consta de cuatro categorías: Teorías del aprendizaje, Fortalezas y dificultades, Formas de interacción con el contenido matemático, e Intereses y espectativas. Por ejemplo, que el profesor conozca las dificultades que presentan los estudiantes con respecto al área y perímetro.
- El Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS) que corresponden a los conocimientos sobre lo que debería aprender un estudiante según el grado de escolarización. Incluye tres categorías: Expectativas del aprendizaje, Nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental y Secuenciación de temas. Por ejemplo, saber que desde tercero de primaria el estudiante puede desarrollar estrategias de composición y descomposición de figuras.

Todos estos subdominios nos permiten tener una amplia mirada sobre los diferentes aspectos que componen el conocimiento especializado del profesor de matemática y mediante ellos podremos hacer el anàlisis para presentar los resultados de esta investigación.

2.2. Teoría de Registros de Representación Semiótica

Utilizamos también aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval como marco teórico, centrándonos en el registro figural y la aprehensión operatoria de reconfiguración. Para Duval (2011) es fundamental que en la actividad matemática se puedan movilizar muchos registros de representación semiótica. Según el autor, existen cuatro tipos de registros: el registro de lenguaje natural, algebraico, figural y gráfico.

Segùn Duval (2011), el registro de lenguaje natural consiste en la designación de objetos mediante enunciados, puede ser oral o escrita. El registro algebraico consiste en la escritura algebraica y el lenguaje formal. El registro figural tiene que ver con la construcción y deconstrucción de formas a mano libre o mediante el uso de instrumentos. Y el registro gráfico tiene que ver con el uso de esquemas, ejes de coordenadas e interpolación.

En esta investigación, nos centramos en el registro figural. Según Duval (2004) las figuras juegan un papel fundamental en la comprensión de los problemas de Geometría ya que forman un soporte intuitivo para las actividades a través de la exploración. Duval (2012) considera a la figura como una aprehensión cognitiva y menciona que existen cuatro formas diferentes de aprehender el registro figural, según su rol son: aprehensión perceptiva, operatoria, discursiva y secuencial; cada uno de ellas independiente de las demás. Cabe resaltar que para el autor, aprehender vendría a ser la comprensión total de un objeto mediante sus representaciones y propiedades.

En esta investigación trabajaremos con tres tipos de aprehensión: La aprehensión perceptiva, aquella que permite identificar o reconocer inmediatamente una forma o un objeto matemático en el plano o en el espacio; la aprehensión discursiva, que corresponde a la explicación de otras propiedades matemáticas de la figura no indicadas de manera explícita; y la aprehensión operatoria, que tiene que ver con las modificaciones o transformaciones que podemos hacer a las figuras por lo que se distinguen tres tipos: la modificación mereológica, la modificación óptica y la modificación posicional. La modificación óptica consiste en aumentar, disminuir o deformar la figura inicial transformándola en una nueva figura llamada imagen. Y la modificación posicional, por su parte, consiste en el desplazamiento de una figura mediante movimientos de rotación, traslación y simetría.

Duval (2012) menciona que la reconfiguración es un tipo de modificación mereológica que consiste en la descomposición en unidades figurativas de la misma dimensión que la inicial, para luego ser recombinadas en otra nueva figura. Existen tres tipos de reconfiguración: heterogénea, cuando se divide en partes diferentes; homogénea, cuando se divide en partes iguales; y estrictamente homogénea, cuando se divide en partes iguales y las partes son iguales además a la figura inicial.

2.3. Medida de área

Diversos autores enfatizan que una gran cantidad de alumnos presentan dificultades al resolver problemas vinculados a la medida de área (Corberán, 1996). Estas dificultades pueden estar relacionadas con una baja comprensión del significado del concepto de área y que muchas veces resulta confusa entre los autores y los textos escolares. Por ello, consideramos necesario iniciar diferenciando los conceptos de superficie y área. Douady y Perrin-Glorian (1987) definen a la superficie plana como la parte acotada de un plano cuyo interior no vacío está limitado por una o más curvas cerradas de longitud finita. Con respecto al área, los autores la definen como la función de medir la ocupación del plano independientemente de la forma. Con base en lo descrito, utilizaremos los siguientes términos: superficie como parte limitada del plano; área como magnitud física, cualidad o propiedad de la superficie; y medida de área como número asociado al área cuando se ha hecho la elección de la unidad de medida.

Con respecto a las dificultades, Tan-Sisman y Aksu (2009) mencionan que las más persistentes son las que se vinculan con el uso de fórmulas y con la idea de que el área permanece inalterable aun cuando la figura es dividida en partes y reorganizada en una figura diferente. La literatura menciona que existen dos formas de aprender a calcular la medida de área de una figura: mediante procedimientos geométricos y mediante procedimientos numéricos. Las investigaciones demuestran que la exploración geométrica tiene mejores resultados en la comprensión del estudiante (Tomova, 2017) y existen factores que pueden favorecer el cálculo de la medida de área como la hoja cuadriculada (Pessoa, 2010). Sin embargo, los estudiantes tienen más arraigado el pensamiento numérico que el geométrico (Montserrat et al., 2016) pues esta es la forma en la que se suele introducir la noción de área en la escuela, mediante el uso de fórmulas (Caviedes et al., 2019).

3. Metodología

Esta investigación se enmarca en el paradigma interpretativo porque busca comprender, describir e interpretar el conocimiento del docente de Educación Primaria (Muñoz Catalán, 2009). Además, tiene un enfoque cualitativo porque se quiere analizar a profundidad un fenómeno desde la perspectiva interpretativa. Esta exploración tiene un diseño con rasgos de estudio de casos pues no verifica todas las condiciones que tienen las investigaciones de este tipo.

Los informantes son dos profesores con más de 10 años de experiencia, de pseudónimos Ana y Juan. Se seleccionaron porque ambos enseñan matemática en sexto grado de Educación Primaria y se mostraron dispuestos a participar de este trabajo. Cabe mencionar que si bien ambos tienen más de 10 años trabajando y actualmente enseñan matemática, son profesores especialistas en el área de ciencias. Uno de ellos (Ana) ha tenido experiencia enseñando matemática en cuarto grado de primaria (9-10 años) muchos años atrás. El periodo de recogida de datos se realizó durante el primer bimestre del curso escolar 2022.

Se construyó una entrevista semiestructura con algunas preguntas tomadas de la investigación de Castillo (2018). Se realizó dicha entrevista a ambos docentes por separado con el objetivo de identificar aspectos relevantes y característicos sobre los conocimientos que movilizan. Para llevar a cabo el análisis de contenido, es decir, el proceso de recoger y resumir datos escritos, se realizó una transcripción literal de las entrevistas con el propósito de identificar aquellos episodios que nos permitan visualizar indicios sobre los conocimientos movilizados por los maestros en torno a la enseñanza y aprendizaje del cálculo de medida de áreas mediante la reconfiguración. La revisión de las entrevistas se realizó de forma lineal, a cada episodio con información relevante se le asignaba uno o algunos de los subdominios del MTSK

4. Resultados

Nos centraremos en analizar aquellos episodios que consideramos importantes a la hora de abordar la reconfiguración para determinar la medida de área de figuras bidimensionales. Para ello, hemos decidido organizar el análisis de la siguiente manera. Primero hablaremos sobre el dominio Conocimiento pedagógico del contenido (PCK) y en él, analizaremos indicios que hablen sobre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), luego de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y después de los conocimientos sobre los estándares de aprendizaje de la matemática (KMLS), pues es el dominio del que más hemos obtenido información. Acto seguido abordaremos el dominio Conocimiento Matemático (MK) con sus tres subdominios: Conocimiento de los temas (KoT) Conocimiento de la estructura matemática (KSM) y Conocimiento de las prácticas en matemática (KPM).

Los siguientes episodios corresponden a extractos de la entrevista realizada al profesor Juan.

- Invest.: *Permíteme que lo dibuje, ¿estás mencionando que esto de acá (señalando el triángulo rectángulo) es un cuadrado?*

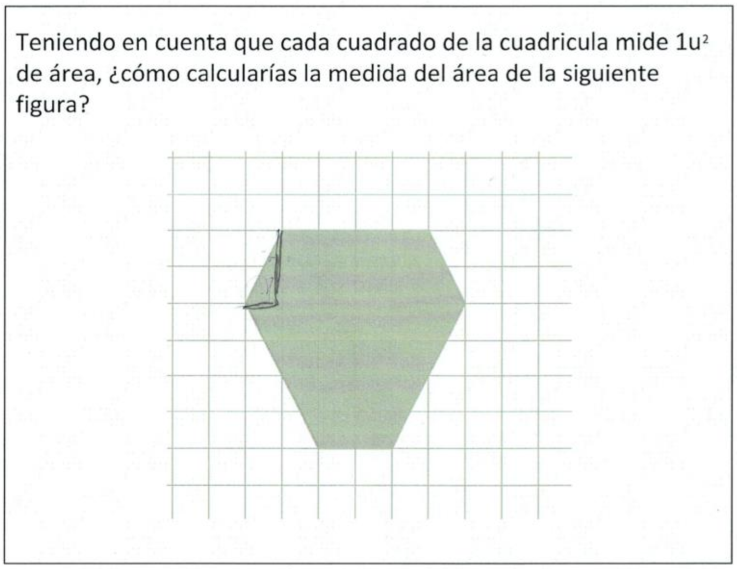


Figura 1. Respuesta del profesor Juan a la pregunta 5 de la entrevista

- Juan: O sea si ellos asumen que esto es un cuadradito entonces este de acá (señalando una parte del triángulo rectángulo) se complementa con este cuadradito, yo diría que son 1 solo. Entonces estos dos forman un cuadradito completo. Entonces, ellos asumen que podría ser de esta forma tratando de entender que lo único que piden es unir los cuadraditos, acá igual (señalando el otro extremo). De tal forma que así poco a poco van encontrando las dimensiones. (Episodio 1.J.)

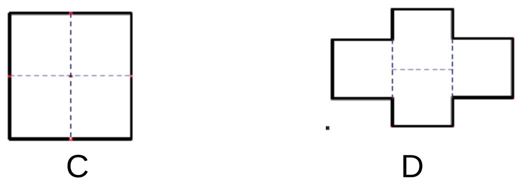
- Juan: Bueno, como te decía, pensando en cómo actúan mis alumnos, ellos utilizarían este sistema de complementar los cuadrados para hacer una sola unidad y luego poder contar cuántos cuadrados al final han tenido. Y poder de esta manera calcular la medida del área. Entendiendo que tienen que completar, yo sí veo que ellos podrían hacer eso. Y de esa manera encontrar el área. (Episodio 2.J.)

En estos episodios observamos indicios del KMT del profesor Juan. En el primer episodio 1.J. encontramos indicios sobre la categoría estrategias, técnicas, tareas y ejemplos para la enseñanza pues en él, Juan explica cómo el triángulo rectángulo de la esquina izquierda superior tiene 1 de área justificando que ambos pedazos de cuadrícula se complementan. Mientras que en el segundo episodio 2.J. el docente afirma que el recurso de la cuadrícula y la reconfiguración permite a los estudiantes calcular la medida del área de la figura aduciendo que las partes incompletas se pueden complementar formando la unidad. Estos episodios también nos dan indicios sobre el KMT del profesor en la categoría de Recursos didácticos pues observamos que el profesor conoce al menos un recurso, la cuadrícula, que permite a los estudiantes calcular la medida de área de una figura bidimensional.

Los siguientes episodios corresponden a extractos de la entrevista realizada a la profesora Ana.

- Ana: *Lo primero y más importante es ver cuál es el concepto de qué es área. Antes de introducir cualquier fórmula, a qué se refiere el área. Poder trabajar con el concepto de área en diferentes contextos lo más reales posibles. Se me ocurre pensando en el área de la clase, contando cuántos cuadraditos hay en el piso. Trabajar ese concepto con cosas que tenemos a la mano, más concretas y luego pasar a lo más abstracto. Y luego que ellos puedan inferir o deducir cuál es la fórmula para el cuadrado y para rectángulo y no sé si llegamos al triángulo. (Episodio 1.A.)*
- Invest.: *¿Cómo resolverías el siguiente problema?*

Si a la figura C le hacemos dos cortes sobre las líneas punteadas y con las piezas formamos la figura D, ¿son iguales las áreas de C y D? ¿por qué?



C D

Figura 2. Pregunta 4 de la entrevista semiestructurada

- Ana: *Sí porque sólo estás redistribuyendo el área que está ocupada. Sólo estás cambiando de sitio, pero estás usando la misma área. O sea, cambio el "layout" pero el área es la misma. No se ha aumentado el papel. Se* *podría hacer con medidas o también se podría demostrar de una forma concreta, teniendo una hoja y cortándola. (Episodio 2.A.)*

Estos dos episodios nos dan indicios del KMT en relación con la categoría estrategias, técnicas, tareas y ejemplos que la profesora usa al momento de abordar la enseñanza del área. En el episodio 1.A. menciona que partiría del concepto de área y luego lo aplicaría a diferentes contextos de la vida real como por ejemplo calcular el área del salón de clases contando el número de baldosas. La maestra conoce una estrategia de resolución de problemas bajo un enfoque tradicional.

El episodio 2.A. nos da indicios sobre el KMT de la profesora en la categoría de Recursos didácticos, la profesora nos explica el uso de la hoja como recurso para facilitar la comprensión de la reconfiguración, cortando la hoja en partes iguales y reorganizándolas. Esto hace referencia a la importancia de trabajar con material concreto para luego trabajar con representaciones gráficas. Desde la teoría de registro de representación semiótica, nos estaría dando un ejemplo de reconfiguración de tipo homogénea. Con respecto a este mismo subdominio, observamos que la docente conoce el procedimiento de descomposición de la superficie en unidades congruentes. A continuación, otro extracto de la entrevista a la profesora.

- Invest.: *¿Qué beneficios tiene la estrategia que está utilizando?*
- Ana: *Yo creo que un poco de lo que comentaba antes, que un alumno pueda aplicar o hacer dos figuras geométricas y luego sumar las áreas, da indicios o evidencias de que el alumno comprende lo que es el área, que si yo sumo las áreas es igual al área buscada. Nuevamente esta idea de entender el concepto de área para poder aplicarlo a utilizarlo de una manera distinta. (Episodio 3.A.)*
- Invest.: *Sí, ¿le encuentras alguna desventaja o no?*
- Ana: *Eventualmente quizás tengas una figura que no está compuesta, o que los pedazos faltantes o sobrantes no son regulares, de repente no son medios cuadrados y eventualmente puedes tener una situación en la que no vas a poder aplicar esto de recomponer. Por ejemplo, figuras circulares o como te digo no, triángulos no llega hasta acá sino hasta acá [haciendo referencia a las secciones en donde la figura no cubre completamente la cuadrícula]. Alguna manera en donde el triángulo no esté a la mitad. (Episodio 4.A.)*
- Invest.: *En dónde le pidan por ejemplo calcular el área de una isla (ver figura 3)*

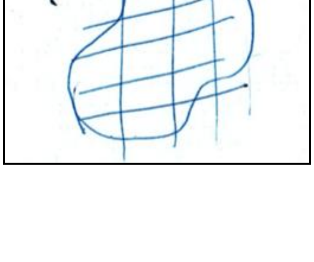


Figura 3. Representación de la respuesta de la profesora Ana a la pregunta 14 de la entrevista

- Ana: *Por ejemplo ¿no?, o en donde tengas un triángulo acá pero que sea así [haciendo referencia a un triángulo que ocupa la mitad de un cuadrado de la cuadrícula]. Aquí tengo un pedacito y no voy a poder calcular el área precisa o exacta porque no todo completa hacia una unidad cuadrada. (Episodio 5.A.)*

En estos últimos episodios también encontramos indicios sobre el KMT de la profesora Ana en la categoría de recursos didácticos. La docente conoce los beneficios del uso de la cuadrícula como medio que favorece la composición y descomposición de figuras (episodio 3.A.). Por otro lado, también reconoce las limitaciones de su uso para figuras con superficies curvas o cuyos lados no coincidan con las líneas de la cuadrícula. (Episodio 4.A. y 5.A.)

Con respecto al subdominio del conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas, encontramos indicios en los episodios 1.J, y 2.J. Juan indica que los alumnos asumen que las partes incompletas de la cuadrícula podrían unirse formando un cuadrado completo. Esto nos da indicios del KFLM de Juan en la categoría de Formas de interacción con el contenido, pues él sabe lo que los alumnos tienden a pensar con respecto a este tipo de tareas. En los siguientes episodios también identificamos aspectos del KFLM del profesor Juan:

- Juan: *Bueno en primer lugar la primera dificultad que suelen tener ellos es comprender exactamente lo que están calculando. Luego, cuando se trata de hallar matemáticamente el área, el poder recordar las fórmulas que tienen que utilizar. Entonces la idea de poder conseguir qué mecanismo es mucho más sencillo, y que les permita deducir la fórmula. (Episodio 3.J.)*
- Juan: *Yo creo que es muy importante en el aspecto visual o como te decía los muchachos siempre van de menos a más. Entonces si partimos de lo abstracto que podría ser simplemente la elaboración de una fórmula, para ellos no tiene mucho sentido más que algo operativo. Pero si parten de un hecho así visual, de nociones muy elementales entonces si la encuentran un sentido. (Episodio 4.J.)*

En estos episodios observamos indicios del KFLM del profesor Juan en la categoría de Fortalezas y dificultades. En el episodio 3.J. el docente sabe que los estudiantes tienen dificultades al comprender el concepto de área en el sentido de que lo asocian a un número, pero no saben qué significa ese número. Por otro lado, valora la importancia del uso de representaciones gráficas pues el uso de fórmulas sólo permite la exploración del área desde el punto de vista numérico y algebraico más no desde el punto de vista geométrico. Esto nos da indicios sobre la categoría de fortalezas en el aprendizaje de las matemáticas. En el siguiente episodio encontramos indicios del KFLM de la profesora Ana.

- *Ana: La verdad es que es mi primer año enseñando matemáticas después de mucho tiempo, casi 11 años y todavía no trabajamos el tema de áreas. El único acercamiento que hemos tenido ha sido tangencial sobre áreas y la* *reacción de los chicos ha sido como que "áreas no por favor". La dificultad que podría tener si fuéramos a desarrollar ese tema, la verdad es que no sabría qué específicamente voy a encontrar. (Episodio 6.A.)*

En este episodio 6.A. la profesora Ana no logra identificar algunas de las dificultades en los estudiantes con respecto al aprendizaje del área (Categoría de Fortalezas y debilidades del subdominio KFLM). Sin embargo, sí hace referencia al aspecto emocional mencionando que el tema de áreas genera ansiedad en los estudiantes. Es interesante notar que cuando se le hizo la pregunta directa a la profesora Ana sobre las dificultades de sus estudiantes con respecto al área en el curso de matemática no logró dar respuesta, pero al final de la entrevista cuando se le preguntó sobre las dificultades en el cálculo de área dentro del curso de ciencias sí lo logró hacer como lo muestra el siguiente extracto de la entrevista.

- Invest.: *Una última pregunta, ¿en ciencias han usado el concepto de área?*
- Ana: *Ay qué difícil tu pregunta. En algún momento cuando hemos trabajado la fotosíntesis, sí vemos cómo ha quedado el área de la hoja. También en el medio ambiente. (Episodio 7.A.)*
- Invest.: *¿y los chicos tienen dificultades?*
- Ana: *Lo que pasa es que no necesariamente nos enfocamos en la parte matemática sino en el concepto de área entonces no es que estén midiendo, pero tienen que entender el concepto de área para hacer comparaciones, para hacer aplicaciones, para definir un método para levantar información. Entonces no es operativo sino más conceptual. Y dificultades sí las hay. Hay algunos que solo se van a la parte mecánica y no a la conceptual. (Episodio 8.A.)*

En el episodio 8.A. observamos indicios sobre el KFLM de la profesora Ana con respecto a las dificultades en el aprendizaje de los estudiantes. Ella menciona que los estudiantes calculan la medida del área de una figura de una manera mecánica pero que no logran comprender lo que está haciendo, es decir, tienen dificultades a nivel conceptual. A continuación, otro extracto de la entrevista al profesor Juan.

- *Invest.: La estrategia utilizada por el estudiante se llama reconfiguración, ¿usarías esta estrategia para enseñar a calcular áreas de figuras geométricas? ¿Por qué?*

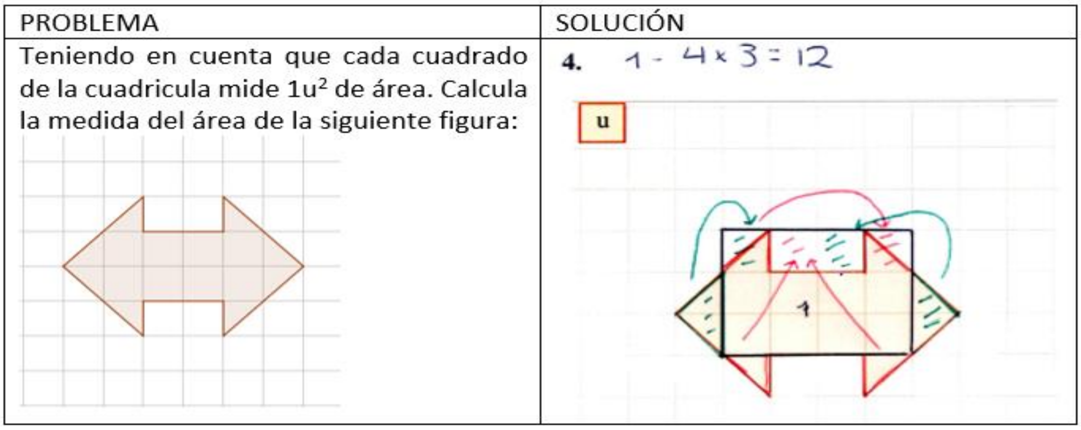


Figura 4. Pregunta 6 de la entrevista semiestructurada

- Juan: *Bueno como un primer paso sí, ellos visualmente lo ven más claro Ahora, definitivamente ya más adelante van a poder calcular el área de figuras de mayor complejidad. Pero inicialmente sí, creo que es la mejor manera de poder desarrollarlo (Episodio 5.J.)*
- Invest.: *Entonces para ti eso sería como el primer paso*
- Juan: *Ahora, una de las dificultades que estamos trabajando en sexto grado es la capacidad de poder comunicar las ideas. Entonces para muchos esto está clarísimo (ver Figura 4). Sin embargo, para alguien que por primera vez lo ve, no lo va a entender, o sea tiene un problema de comunicación. (Episodio 6.J.)*
- Invest.: *Entonces para ti no es muy claro el proceso.*
- Juan: *O sea solamente si lo presentan, así como está, viene un chiquito de sexto grado y lo mira, a primera vista no lo va a entender, así como está. Él va buscar evidencias en la imagen y sobre esta imagen va a poder desarrollar su resultado, pero así como está pienso que hay un problema de falta de comunicación. El que lo ha hecho sí lo entiende, pero el que lo ve por primera vez o un chiquito de sexto grado no lo va a entender. (Episodio 7.J.)*

En los episodios 5.J. y 7.J., tenemos indicios sobre el KFLM del profesor en cuanto a la categoría de formas de interacción, pues Juan conoce la forma de proceder de sus alumnos frente a este tipo de tareas. Por ejemplo, en el episodio 5.J., él menciona que usaría la estrategia de reconfiguración como un primer paso al cálculo de áreas pues permitiría visualizar mejor y facilitar la comprensión de sus alumnos. Mientras que en el episodio 7.J. menciona que sus estudiantes a primera vista no entenderían el proceder del estudiante pues el procedimiento debería ir acompañado de una explicación (aprehensión discursiva).

Ahora continuaremos con el subdominio Conocimientos sobre los estándares de aprendizaje de la matemática (KMLS).

En el episodio 1.A., tenemos indicios sobre el KMLS de la profesora Ana con respecto a la categoría de secuencia de temas. Observamos que ella no tiene claridad sobre los aprendizajes esperados para sexto grado de primaria pues no logra identificar cuáles son las figuras bidimensionales que se abordarán en el grado.

Por otro lado, en el episodio 5.J. también encontramos indicios sobre el KMLS del profesor Juan en la categoría de nivel esperado de desarrollo procedimental. El docente menciona que usaría la estrategia de reconfiguración para calcular la medida de áreas de figuras simples como la mostrada en el gráfico, pero para figuras de mayor complejidad ya no le sería de utilidad. Probablemente Juan se esté refiriendo a figuras en las que las todos los lados no coincidan con las líneas de la cuadrícula o en figuras de superficie curva. A continuación, otro extracto de la entrevista al profesor Juan.

- *Invest.: ¿En qué crees que puede aportar esta estrategia en el aprendizaje de los estudiantes?*
- *Juan: Yo creo que es muy importante en el aspecto visual o como te decía los muchachos siempre van de menos a más. Entonces si partimos de lo abstracto que podría ser simplemente la elaboración de una fórmula, para ellos no tiene mucho sentido más que algo operativo. Pero si parten de un hecho así visual, de nociones muy elementales entonces si la encuentran un sentido. (Episodio 8.J.)*

En este episodio 8.J. también observamos indicios sobre el KMLS del profesor Juan con respecto a la categoría de Nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental, cuando menciona que la capacidad de abstracción todavía no está muy bien desarrollada en los estudiantes de sexto grado de primaria por lo que el aspecto visual se hace necesario en el aprendizaje del concepto de área. También menciona que el uso de fórmulas no tiene mucho sentido para los estudiantes en su aprendizaje.

Ahora procederemos a analizar el dominio del Conocimiento Matemático a través de sus tres subdominios.

Con respecto al subdominio del Conocimiento de los temas, en el episodio 2.J. encontramos algunos indicios del KoT del profesor Juan en la categoría de procedimientos, pues él asume como válido el procedimiento matemático usado por sus alumnos. Este procedimiento consiste en identificar que en la figura se presentan partes de un cuadrado y que al juntarlas de manera mental mediante movimientos de rotación y/o traslación se genera un cuadrado completo. Dicho procedimiento lo conocemos como reconfiguración, es de naturaleza geométrica y correspondería a un procedimiento de aprehensión perceptiva pues las formas que componen la superficie son justificadas “al ojo”.

Por otro lado, en el episodio 2.A., la profesora Ana hace referencia al procedimiento de la reconfiguración como una forma de demostración de que el área de dos figuras de diferente forma, pueden mantener la misma área. Esto nos da indicios sobre el KoT de la profesora Ana en la categoría de procedimientos.

Asimismo, en el episodio 1.A. observamos que la profesora Ana conoce un uso y aplicación de las áreas en la vida real al proponer situaciones cercanas al contexto del estudiante como es el cálculo de la medida de área del piso del salón de clases. Esto nos da indicios sobre el KoT de la docente en la categoría de Fenomenología y aplicaciones. Mientras que en los episodios 7.A y 8.A. también encontramos indicios sobre los usos y aplicaciones del área en la vida real. La profesora menciona que, en el área de ciencias, se usa este concepto para calcular el área de una hoja de planta y también se usa esta noción en el tema sobre el medio ambiente. En el siguiente extracto encontramos indicios del KoT del profesor Juan.

- Invest.: *En ciencias, ¿en algún tema hacen uso de áreas?*
- Juan: *Sí en primer grado de media hay un trabajo que se hace en Tambopata porque van al campo, hacen mediciones y se les pide calcular áreas. Justamente usan los cuadraditos para diseñar figuras y hallar el área. (Episodio 9.J.)*

En este episodio 9.J. encontramos indicios del KoT del profesor Juan en la categoría Fenomenología y aplicaciones. Él menciona que una de las aplicaciones del concepto de área en la disciplina de ciencias es cuando los estudiantes realizan un viaje a Tambopata, zona de selva en el Perú, en donde los estudiantes deben hacer el cálculo de la medida de áreas de determinadas parcelas y usan la técnica de la cuadrícula con estacas y sogas.

En los episodios 6.J. y 7.J. observamos indicios del KoT del profesor Juan en la categoría de registros de representación. Juan menciona que el uso de la representación gráfica y numérica en la solución no es suficiente para su comprensión, hace falta además la representación verbal (aprehensión discursiva). Esto se relaciona con el conocimiento de Juan con respecto a diferentes tipos de representación, al menos tres, pues menciona que además de la representación gráfica y aritmética, estas deben ir acompañadas del lenguaje natural. A continuación, otro extracto de la entrevista al mismo profesor.

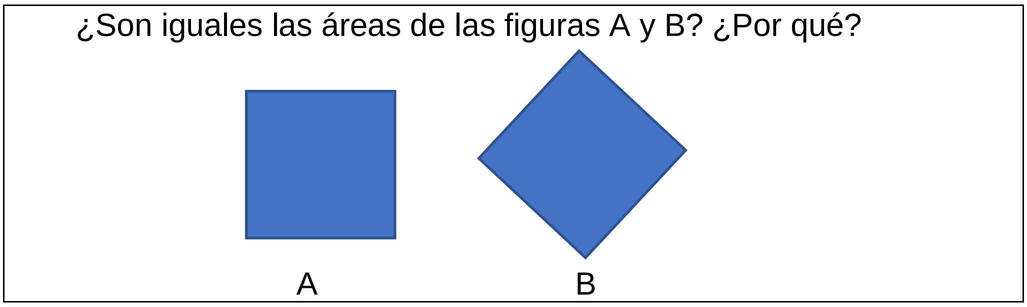


Figura 5. Pregunta 3 de la entrevista semiestructurada

- *Juan: Claro, una de estas figuras está inclinada, la primera es un cuadrado, pero la segunda es un rombo. Entonces simplemente es lado por lado. A simple vista un alumno de sexto de primaria respondería que A y B son lo mismo, solo que B está inclinado, pero sí los mido con una regla podría demostrar que tienen las mismas dimensiones y con eso podría calcular el área (Episodio 10.J.).*

En este episodio 10.J. encontramos indicios del KoT del profesor Juan en la categoría de definiciones, propiedades y fundamentos. Observamos que Juan domina una clasificación excluyente de los cuadriláteros pues al decir que la primera figura es un cuadrado y la segunda un rombo, no considera que el cuadrado es un caso particular del rombo y que por lo tanto las figuras A y B son cuadrados y rombos a la vez (aprehensión perceptiva). Por otro lado, cuando el docente menciona que la figura B es la figura A inclinada, nos da indicios que conoce el movimiento de rotación y que además conoce que a pesar que la figura cambie de posición en el plano, su área se mantiene inalterable. Cabe resaltar que el docente menciona la frase "lado por lado" haciendo alusión a la fórmula del área del cuadrado (KMT). A continuación, las respuestas de la profesora Ana para la misma tarea:

- Ana: *Claro, lo que yo haría primero es medir los lados de cada una de las figuras, y si los lados de las figuras son iguales entonces tienen áreas iguales (Episodio 9.A.).*
- Invest.: *¿Qué calcularías? ¿un lado? ¿todos los lados?*
- Ana: *Los lados primero porque a simple vista parecen cuadrados. Entonces (coge la regla), veo que esto mide 2, este mide 2. Acá también mide 2 y este también (ver imagen). Entonces sí son iguales (Episodio 10.A.).*

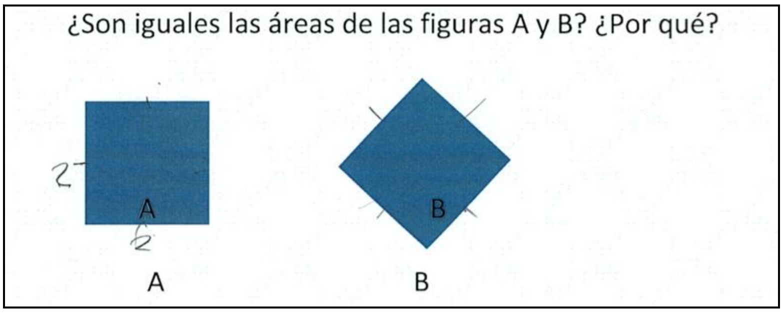


Figura 6. Respuesta de la profesora Ana a la pregunta 3 de la entrevista

En estos episodios encontramos indicios sobre la categoría de Definiciones, propiedades y fundamentos del KoT de la profesora Ana. En el episodio 10.A. observamos que, a diferencia del profesor Juan, la profesora Ana sí conoce una clasificación incluyente de los cuadriláteros porque reconoce a ambas figuras como cuadrados (aprehensión perceptiva). En los episodios 9.A. y 10.A. observamos además que la profesora no se deja llevar por percepciones visuales y hace uso de instrumentos de medición para obtener la medida de los lados de las figuras. Al comprobar que efectivamente tiene la misma medida de lados, ella concluye que tienen la misma área.

Ahora, analizaremos el subdominio de la estructura de la matemática (KSM) para ello presentamos un extracto de la entrevista a Juan.

- Invest.: *¿Cómo explicarías el razonamiento de este estudiante?*
- Juan: *Es visual, básicamente es visual. A los alumnos de sexto grado les gusta mucho visualizar las cosas. No tanto lo abstracto sino aquello que pueden visualizar y poder medir. Para ellos es mucho más fácil recurrir a un*

método que les permita hacer mediciones en este caso con la regla, tienen que verlo, no pueden deducir ninguna fórmula. Simplemente va a ser en base a lo que observan. (Episodio 11.J.)

En este episodio 11.J. encontramos indicios sobre el KSM de Juan en cuanto a la categoría de Conexiones auxiliares. Juan menciona que para calcular la medida del área de una figura el estudiante debe hacer uso del concepto de visualización como un elemento auxiliar.

Finalmente, analizaremos el subdominio Conocimiento de las prácticas en matemáticas (KPM). Para ello, presentamos un extracto de la entrevista a la profesora Ana.

- *Ana: Lo que yo haría aquí, es decir, aplicando lo que me enseñaron cuando era chiquita, es contar los cuadrados enteros que tienen, y luego después los que tienen más de la mitad del cuadrado completo contarlos como uno y los que tienen menos de la mitad no los cuento. No sé si eso es válido en matemática, porque es un contenido que he revisado hace años pero trataría de descifrar si todos estos pedazos que no forman cuadrados completos, sí forman cuadrados completos. Contaría y marcaría así 1, 2, 3, 4, etc. para no perder la cuenta (ver Figura 7) (Episodio 11.A.).*

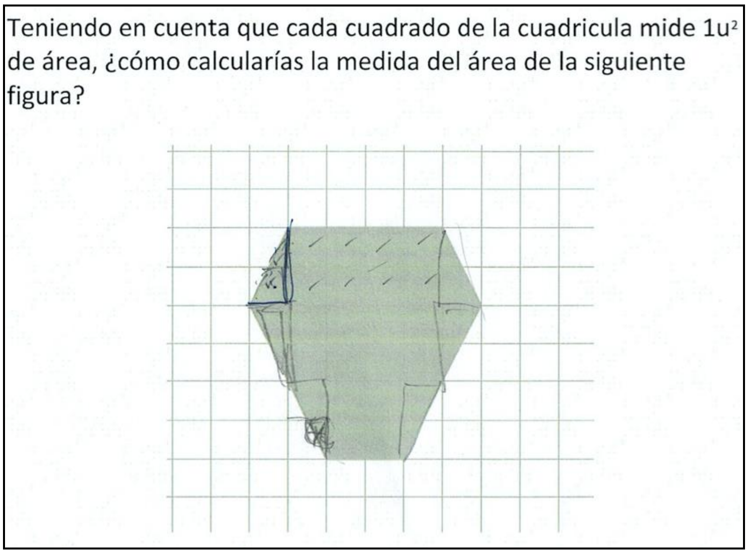


Figura 7. Respuesta de la profesora Ana a la pregunta 5 de la entrevista

- Invest.: *Entonces contarías todos los cuadrados que son completos, y los que son incompletos dependiendo sí es casi toda la figura lo contarías como uno y si no, no.*
- Ana: *Esa sería una forma, pero si quisiera hacerlo más preciso lo que haría es cortar y pegar, y ver si estos dos forman uno completo. (Episodio 12.A.).*

En estos episodios observamos indicios del KPM general de Ana en la categoría de Resolución de problemas, pues ella está haciendo uso de la estrategia heurística dividir el problema en partes. En el episodio 11.A. ella menciona que dividiría la figura en partes y usaría dos estrategias de resolución. Para aquellos cuadrados que están completamente pintados utilizaría la estrategia del conteo, mientras que para los cuadrados que no están completamente sombreados utilizaría la estimación. Luego en el episodio 12.A. Ana frente a una hipótesis que se plantea, que con dos partes de una figura se puede formar un cuadrado completo, ella lo comprobaría de manera concreta cortando y pegando la figuras.

5. Conclusión

En primer lugar, es fundamental el conocimiento de las propiedades de las figuras como por ejemplo saber que el área se mantiene independiente de la forma de la figura, aplicar esta propiedad a una gran variedad de ejemplos y hacer uso de diferentes representaciones (KoT), pues todo ello le permite al docente analizar, verificar o sugerir respuestas de solución frente a la resolución de problemas del cálculo de medida de áreas (KPM). Por otro lado, es muy importante también conocer las fortalezas y debilidades de los alumnos con respecto a esta noción (Corberán, 1996), sobre todo en la comprensión de la noción de área (KFLM). Para ello, los maestros proponen el uso de diferentes recursos, como por ejemplo el papel o cartulina para representar las figuras, cortarlas en partes y reordenarlas para así generar nuevas figuras, lo que podría fomentar en los alumnos la generación de hipótesis sobre la conservación del área (KMT).

En segundo lugar, si bien los docentes no tienen en claro la secuencia de temas por ser profesores de ciencias enseñando matemática, sí son conscientes del nivel esperado de desarrollo conceptual y procedimental en los estudiantes (KMLS). Conocen que los estudiantes de sexto de primaria todavía no han desarrollado totalmente su pensamiento abstracto por lo que se requiere el diseño de actividades con materiales concretos y recursos como la hoja cuadriculada (KMT), como lo sugería diversos autores (Pessoa, 2010; Moreno y Climent, 2021). Ambos docentes son conscientes de la importancia que el estudiante comprenda la noción de área, sin embargo, ambos enseñan el cálculo de medidas de área mediante fórmulas (KMT), compartiendo la idea de Douady y Perrin-Glorian (1987) con respecto a cómo se suele abordar la noción de área en la escuela. Es decir, su aproximación al cálculo de medidas de área es mediane un enfoque numérico y cuando no ven números en la figura tienden a usar instrumentos de medición como la regla, como lo mencionan las investigaciones (Caviedes et al., 2019).

Es importante resaltar que ambos profesores reconocen a la reconfiguración como una opción para introducir el cálculo de medida de áreas (KoT) pues facilita la comprensión de la noción de área y aleja a los estudiantes de la clásica forma de aprender mediante fórmulas (KFLM), esto refuerza la idea de Tomova (2017) con respecto al potencial de enseñar bajo un enfoque geométrico. Por lo que nos hace pensar que es importante que el docente conozca las dos formas de aprender a calcular la medida de áreas, es decir, mediante procedimientos geométricos y numéricos. Esto le permitiría establecer mejores relaciones entre formas planas y tridimensionales incluso (KSM). Es fundamental destacar que los docentes poseen conocimientos sobre la composición y descomposición de figuras (reconfiguración) sin haber recibido una formación sobre esta noción pues el Diseño Curricular Básico Nacional de Formación Inicial Docente de Educación Primaria no se menciona de manera explicita (Ministerio de Educación, 2019). Probablemente este sea un conocimiento que venga de la práctica y que de ser considerado dentro de la formación inicial y formación continua, sería robustecido.

También rescatamos el uso del MTSK como una herramienta potente para poder caracterizar y comprender mejor el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Gracias a este modelo se ha podido reflexionar sobre la prácitca del profesor de matemáitcas y estamos convencidos que los resultados de esta investigación y las posteriores podrían contribuir en la elaboración de propuestas de formación docente. (Fuentes, 2020)

Con respecto a las limitaciones de este estudio, la principal es que los informantes son profesores especialistas en ciencias enseñando matemática. Esto representa una limitación pues dentro de cada subdominio hay más elementos que pudieron haber emergido. Por ejemplo, el uso de recursos para facilitar la comprensión de la reconfiguración como el tangram (KMT). No obstante, también representa una fortaleza porque mencionaron muchas aplicaciones del cálculo de la medida de área a situaciones de la vida real, como medir el área de un terreno durante un viaje de estudios, el área de una hoja dentro de la fotosíntesis, etc. (KoT). Por ello sugerimos repetir el estudio con profesores expertos especialistas en matemática con el fin de enriquecer el elenco de conocimientos. Otra gran limitación fue la emergencia sanitaria a causa del COVID-19 que no permitía la continuidad de las clases de manera presencial.

Los siguientes pasos para esta investigación sería hacer un estudio de casos completo que incluya la elaboración de cuestionarios de identificación de conocimiento para maestros expertos y la observación de sesiones de clase. Los resultados de estos estudios podrían tener implicancias en el diseño y secuenciación estratégica de tareas para formadores de futuros docentes.

6. Referencias bibliográficas

Alguacil, M., Boqué, M. y Pañellas, M. (2016). Dificultades en conceptos matemáticos básicos de los estudiantes para maestro. International Journal of Developmental and Educational Psychology. *Revista INFAD de Psicología*. 1(1), 419-430. https://revista.infad.eu/index.php/IJODAEP/article/view/162

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Barrera, V. J., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, C. y Contreras, L. C. (2016). Conocimiento especializado, movilizado y emergente, en una clase de primaria sobre las posiciones relativas de las rectas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 167-176). Málaga: SEIEM.

Bjørkås, J., Van den Heuvel-Panhuizen, V. (2019). Measuring area on the geoboard focusing on using flexible strategies. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Utrecht University, Feb 2019, Utrecht, Netherlands.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2985- 2994). Antalya, Turquía: Middle East Technical University y ERME.

Carrillo, J., Contreras, L.C., y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), Investigación en Didáctica de la Matemática. *Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Granada, España: Comares.

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E., y Montes, M. A. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.* Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D, Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Castillo, M. (2018) *Reconfiguración de polígonos para determinar la medida de su área con estudiantes de segundo grado de Educación Secundaria* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. http://hdl.handle.net/20.500.12404/12068

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2019). Aproximación a las conexiones matemáticas que establecen futuros maestros de primaria en tareas de medida y comparación de áreas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 233-242). Valladolid: SEIEM.

Corberán, R. (1996) *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes de primaria a la universidad* [Tesis doctoral, Universidad de Valencia]. https://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Corberan96.pdf

Douady, R.; y Perrin-Glorian, M. (1987). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Cahier de didactique des mathematiques-IREM*, 37, 1 – 51.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Trad. Myriam Vega. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática (Obra original publicada en 1995).

Duval, R. (2011). *Ver y ensinar a matematica de outra forma: entrar no odo matemático de pensar: os registros de representaçõe semióticas*. Proem editora.

Duval, R. (2012). Abordagem cognitiva de problema de Geometría em termos de congruencia. *Revista electrónica de Educación Matemática. Revemat*, 7(1), 118-138. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p118

Fuentes, C. (2020). Uso del Modelo MTSK para la Caracterización del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas en Secundaria: El caso de la Proporcionalidad. *Revista Unión,* 59, 33- 63.

Garcia, G. y Carrillo, J. (2006). Relación entre perímetro y área: el caso de Patricia y las interacciones. *Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 185-194). Huesca. Instituto de Estudios Altoaragoneses.

Ministerio de Educación (2016). *Evaluación Censal de Estudiantes 2015: informe* *para docentes. Segundo grado de secundaria*. Ministerio de Educación del Perú. http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2017/04/Informe-para-Docentes-Matem%C3%A1tica-ECE-2016-2.%C2%B0-grado-de-secundaria.pdf

Ministerio de Educación (2017). *Programa curricular de educación primaria.* Ministerio de Educación del Perú. http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-nivel-primaria-ebr.pdf

Ministerio de Educación (2019). *Diseño Curricular Básico Nacional de Formación Inicial Docente: Programa de estudios de Educación Primaria.* Lima: Ministerio de Educación del Perú. http://www.minedu.gob.pe/superiorpedagogica/producto/dcbn-educacion-primaria-2019/

Montes, M. A., Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao, España. SEIEM.

Montes, M.A. y Climent, N., (2016). Conocimiento dela estructura matemática (KSM). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 21 - 29). Huelva. SGSE.

Montserrat, D. N., Boqué, M. y Pañellas, M. (2016). Dificultades en conceptos matemáticos básicos de los estudiantes para maestro. *International Journal of Developmental and Educational Psychology. Revista INFAD de Psicología*. 1(1), 419-430.

Moreno, A. y Climent, N. (2021). Conocimiento matemático especializado movilizado por estudiantes para maestro durante el análisis de situaciones de aula sobre polígono. *Revista Unión*, 61, 1-20.

Muñoz Catalán, M. C. (2009) *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. http://hdl.handle.net/10272/2949

Ng, O. y Sinclair, N. (2015). Area Without Numbers: Using Touchscreen Dynamic Geometry to Reason About Shape, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, (15)*1, 84-101. doi: 10.1080/14926156.2014.993048

Pessoa, G. (2010). *Um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada: influência de algumas variáveis*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco.

Popoca, M. y Acuña, C. (2011). Cambio en figuras de área igual, conservación y relaciones figurales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 24*, 541-550. http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1850-66662015000100004

Shulman, L. (1986). Aquellos que entienden. El crecimiento del conocimiento en la enseñanza. *Investigador Educativo, 15*(2), 4.14.

Tan-Sisman, G. y Aksu, M. (2009). Seventh grade students' success on the topics of area and perimeter. *Elementary Education Online*, *8*(1), 243-253. https://www.academia.edu/23505511/Seventh_Grade_Students_Success_on_the_Topics_of_Area_and_Perimeter

Tomova, V. (2017). Qué influye en el éxito de los alumnos de grado 6 a 9 en la resolución de tareas conceptuales sobre área y volumen. *CERME 10*, febrero de 2017, Dublín, Irlanda.

7. Agradecimientos

Este trabajo se desarrolla en el seno del grupo de investigación DESYM (HUM168), del Centro de Investigación COIDESO de la Universidad de Huelva, de la Red MTSK, auspiciada por la AUIP, y del proyecto PID2021-122180OB-I00 del Ministerio de Ciencia e Innovación del Gobierno de España.

Melissa Denisse Castillo Medrano: Magíster en Enseñanza de las Matemáticas por la Pontificia Universidad Católica del Perú. Doctoranda en Investigación en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales, Sociales y de las Matemáticas por la Universidad de Huelva. Docente de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas y Newton College.
Montes Navarro, Miguel Ángel: Doctor por la Universidad de Huelva. Titular de Universidad en el Departamento de Didácticas Integradas. Secretario de la Red MTSK. Miembro de SEIEM, PME y CERME, cuenta con más de 30 publicaciones en revistas evaluadas por pares, y más de 50 comunicaciones en congresos de Educación Matemática.