UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Año XVI - Número 59. Agosto 2020
Páginas 310-329

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

Juegos para enseñar estrategias a estudiantes de Secundaria y Bachillerato

Jaime Benabent Guerrero, Alfonso Márquez Martínez, Juan Núñez Valdés

Fecha de recepción: 22/05/2020
Fecha de aceptación: 28/08/2020

Resumen	El objetivo principal de este artículo es mostrar algunos juegos de estrategia a los profesores de Matemáticas de los niveles de Secundaria y Bachillerato, para que estos puedan trabajarlos en sus clases de una manera amena, motivadora y dinamizadora, que les permita conseguir la atención de sus alumnos y despertar en ellos el gusto e interés por la asignatura. Se muestran diez de estos juegos, dándose de cada uno de ellos una breve descripción y un ejemplo sencillo de su aplicación y se comentan los beneficios didácticos que se derivarían de su utilización. **Palabras clave**: Estrategias matemáticas; juegos de estrategia; recursos para el aula.
Abstract	The main goal of this article is to show some strategy games to the Mathematics professors of the Secondary and Baccalaureate levels so that they can work them in their classrooms in a motivating and dynamic way, which allows them to get the attention of their students and wake up in them the interest in the subject. Ten of these games are shown, giving from each of them a brief description and a simple example of its application. The didactic benefits that would derive from their use are also discussed. **Keywords**: Mathematical strategies; strategy games; resources for the classroom.
Resumo	O objetivo principal deste artigo é mostrar alguns jogos de estratégia aos professores de Matemática do Secundário e do Bacharelado, para que eles possam trabalhar em suas aulas de maneira motivadora e dinâmica, que lhes permita chamar a atenção de seus alunos e despertar neles o gosto e o interesse no assunto. Dez desses jogos são mostrados, fornecendo a cada um uma breve descrição, um exemplo simples de sua aplicação e os benefícios didáticos que derivariam de seu uso. **Palavras-chave:** Estratégias Matemáticas; jogos de estratégia; recursos para a sala de aula.

1. Introducción

Según el medio de comunicación online en innovación educativa, nuevas tecnologías y metodologías, innovación docente, formación y recursos para profesores "Educación 3.0", la "gamificación es "*una técnica de aprendizaje que traslada la mecánica de los juegos al ámbito educativo-profesional con el fin de conseguir mejores resultados: sirve para absorber conocimientos, para mejorar* *alguna habilidad para recompensar acciones concretas…"* Este término, procedente del inglés *gamification*, que ha adquirido una enorme popularidad en los últimos diez años, sobre todo en entornos digitales y educativos, se considera también como "*el uso de técnicas, elementos y dinámicas propias de los juegos y el ocio en actividades no recreativas o lúdicas, con el fin de potenciar la motivación, así como de reforzar la conducta para solucionar un problema, mejorar la productividad, obtener un objetivo, activar el aprendizaje y evaluar a individuos concretos"* (véanse (Romero y Rojas, 2013) y las referencias en ella).

Por otra parte, en el tratamiento de determinadas situaciones y ejercicios, sobre todo si estos están relacionados con las Matemáticas Recreativas, es muy conveniente utilizar diferentes estrategias que permitan una rápida y elegante resolución. En principio hablamos de "ejercicios", aunque también podríamos utilizar el concepto de "problema", como se verá a continuación (nótese que no deben confundirse estos dos conceptos al ser el de "problema" de superior categoría). Para Carrillo (2009), el concepto de "problema" debe asociarse:

> *a la aplicación significativa (no mecánica) del conocimiento matemático a situaciones no familiares, la conciencia de tal situación, la existencia de dificultad a la hora de enfrentarse a ella y la posibilidad de ser resuelta aplicando dicho conocimiento. Este concepto puede enmarcarse en la teoría de Polya desarrollada y ampliada posteriormente por Schoenfeld entre otros (…) En este punto, siendo la resolución de problemas un proceso en el que intervienen una gran cantidad de variables (del sujeto, del problema, del contexto...), no es deseable obtener la unificación de su puesta en práctica, sino una concienciación en cuanto a los elementos que deben ser tomados en consideración para que dicha puesta en práctica adquiera el valor que merece.*

Sin embargo, no habría problemas para extrapolar el concepto de "ejercicio" al de "problema" para el objetivo de este artículo, ya que como veremos seguidamente, los juegos de estrategia, que serán los que traten en este artículo, utilizan técnicas, procedimientos y desarrollos que son los mismos que se usan en la resolución de problemas, lo que justifica claramente el interés de su utilización en el aula.

En efecto, según el Diccionario de la Real Academia Española, la palabra "estrategia", en su tercera acepción, relativa al ámbito matemático, significa: "*en un proceso regulable, conjunto de las reglas que aseguran una decisión óptima en cada momento*".

De acuerdo con esta acepción, es claro que para resolver un juego utilizando estrategias es necesario recurrir a habilidades que en muchísimas ocasiones tienen mucho que ver con las Matemáticas. Es cierto que los juegos no aportan en muchas ocasiones conocimientos matemáticos concretos (en muchas otras, sí), pero su utilización en clase puede ofrecerle muchas ventajas al profesor, ya que según Flores y Peinado (1919), pueden desencadenar situaciones que sirvan de contexto para que los alumnos se interesen por cuestiones que, presentadas de otra manera podrían resultarles más áridas. También son interesantes como objeto de estudio en sí mismo, analizando estrategias ganadoras o las condiciones en que se desarrolla el juego, lo que ha conducido al progreso de las Matemáticas, como lo prueba la muy conocida historia de la invención del Cálculo de Probabilidades (recuérdese que se continúan usando dados y cartas para introducir la Combinatoria). También puede hacerse que el propio juego sea la actividad educativa, propiciando que los alumnos aprendan adoptando el papel de jugadores para lograr un determinado objetivo, que el profesor puede ingeniárselas para relacionarlo con las Matemáticas.

Pues bien, este artículo trata de relacionar ambos conceptos, la gamificación y las estrategias (para profundizar sobre la gamificación puede consultarse (Muñoz, Hans, Fernández-Aliseda, 2019), entre otros). Su objetivo principal es hacerles ver a los profesores de Matemáticas de los centros de Secundaria y Bachillerato que combinarlos, es decir, utilizar juegos de estrategias en sus clases les puede venir muy bien y servir como recurso metodológico para introducir algún tema, como por ejemplo los de Números, Conjuntos, Combinatoria y Probabilidad, para propiciar la concentración de sus alumnos, para facilitarles razonamientos para que puedan abordar la resolución de algunos ejercicios de clase y sobre todo, también para motivarlos y despertar su interés en las clases, evitando de esa forma que estos se aburran ante la lección magistral o las clases rutinarias repetitivas

Como veremos en los juegos que se muestran, el uso de determinadas técnicas matemáticas, como la factorización, técnicas de conteo, técnicas de ensayo-error o el Principio del Palomar,por ejemplo, son estrategias a seguir que facilitan enormemente los pasos que debe dar el jugador que las conozca para tener la seguridad de resultar ganador en el juego del que se trate. No olvidemos, al respecto, una cita de Miguel de Guzmán (Getafe (Madrid), 1936 - 2004, Catedrático de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid), en la que enfatiza la enorme relación existente entre el juego y la enseñanza de las Matemáticas (de Guzmán, 1989, p. 61):

> *El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de la Matemática. Si los matemáticos de todos los tiempos se la han pasado tan bien jugando y han disfrutado tanto contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprender la Matemática a través del juego y de la belleza?*

Y otra de Adrián Arnoldo Paenza (Buenos Aires, 1949), periodista, matemático y profesor argentino en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, muy conocido por sus numerosos libros sobre divulgación de las Matemáticas (Paenza, 2007), para quien:

> *La Matemática tiene una rama que se llama "Teoría de juegos". Sí: teoría de juegos. ¿No debería ser suficientemente atractiva una ciencia que ofrece juegos en su menú? ¿No sería interesante considerarla como alternativa para estimular a los niños/jóvenes en el colegio?*

Los diez juegos que aquí se proponen en las diferentes secciones de este artículo son juegos de estrategias, es decir, aquellos en los que los jugadores deben buscar estrategias para ganar. Entre ellos los hay de varios tipos: en unos se trata de escoger objetos dispuestos en diferentes formas; en otros, llamados juegos de posición, se trata de desplazarse en una cuadrícula hacia una meta; en los últimos se trata de escribir números en un tablero y realizar determinadas operaciones aritméticas. Todos ellos son juegos prácticamente desconocidos por los alumnos de Secundaria y Bachillerato, como hemos constatado a través de las preguntas que profesores de estos niveles, amigos de los autores, han hecho en sus clases y ninguno de estos juegos ha sido diseñado por los autores. Además, es conveniente indicar que aunque en este artículo únicamente se proponen estos diez para no alargarlo mucho, existen muchos otros juegos de estos tipos, que pueden encontrarse fácilmente en la literatura (véanse (webs 1 y 2), por ejemplo), que igualmente podrían ser utilizados.

En opinión de los autores, este tipo de juegos tienen un gran valor didáctico, aparte de toda la matemática que se puede aprender con ellos, ya que presentan una situación aparentemente ingenua pero que en el fondo esconde una situación de ventaja para uno de los jugadores, con la especial incidencia que la misma tiene en la vida real (cuentas de bancos, leyes, contratos, etc).

En el artículo se comentan los aspectos didácticos de cada uno de estos 10 juegos y también se indican sus objetivos teóricos y el nivel de enseñanza en el que se podrían utilizar, todo lo cual se acompaña asimismo de una breve descripción de sus reglas, de un caso sencillo que sirve como ejemplo y de la prueba de la estrategia ganadora a seguir en su desarrollo (por descontado, se ha procurado que la prueba que se indica sea lo más adecuada posible al nivel de conocimientos de Matemáticas de los alumnos de Secundaria y Bachillerato y pueda ser fácilmente entendida por ellos). En la descripción de todos ellos, designaremos por la letra A al jugador que comienza el juego, y por la B al jugador que lo continúa.

Salvo para los que se indica su procedencia explícitamente en su descripción, el resto de los juegos indicados, algunos de los cuales tiene un origen muy antiguo y desconocido, transmitido de generación en generación, al igual que los cuentos o las fábulas, pueden encontrarse en la primera referencia de este artículo, de autores no conocidos. En ese libro se muestran quinientos juegos de todo tipo, entre ellos estos de estratega, indicándose para cada uno de ellos su historia, sus reglas y el desarrollo de una partida, numerosos esquemas y diagramas, sugerencias y consejos para la estrategia y también sus principales variantes. Para un análisis de todo lo anterior nos remitimos a esa referencia, ya que como hemos indicado, nuestro propósito fundamental es el de mostrar estos juegos al profesor para que él los conozca y vea de qué forma puede aprovecharlos en sus clases y sacarles el jugo que el contenido matemático que esté impartiendo en esos momentos demande.

Finalmente, para una mejor comprensión por parte de los lectores de los diferentes países que leen esta revista del contexto educativo en el que se enmarca este artículo, a los autores nos gustaría indicar que en España, patria de los autores, el sistema educativo se compone de cinco grandes tipos de educaciones:

- La Educación Infantil (entre los 0 y los 6 años). Es de carácter no obligatorio; se reparte en dos etapas (1º ciclo de 0 a 3 años y 2º ciclo de 3 a 6 años).

- La Educación Primaria (entre los 6 y los 12 años, aproximadamente). Obligatorio y por tanto gratuita en instituciones públicas. Comprende seis cursos, desde los 6 a los 12 años aproximadamente.

- La Educación Secundaria Obligatoria (ESO) consta de cuatro cursos, entre los 12 y los 16 años aproximadamente. Se cursa en los IES (Institutos de Educación Secundaria) o bien en centros privados y concertados.

- La Educación Secundaria Post-obligatoria alude a cuatro enseñanzas independientes entre ellas y que exigen para ser cursadas la posesión del título de la ESO: el bachillerato (dos cursos), la formación profesional de grado medio, las enseñanzas profesionales de artes plásticas y diseño de grado medio y las enseñanzas deportivas de grado medio.

- La Educación Superior comprende, de forma independiente entre ellas, la enseñanza universitaria, las enseñanzas artísticas superiores, la formación profesional de grado superior, las enseñanzas profesionales de artes plásticas y diseño de grado superior y las enseñanzas deportivas de grado superior. Las enseñanzas de régimen especial son la de idiomas, las artísticas y las deportivas.

2. Juego: Subiendo al 1000

En este juego, se parte del número 2. En cada turno, cada jugador puede sumar al número en el que se encuentren otro natural menor que este número. Gana quien llegue primero a 1000.

Un ejemplo de una partida se muestra en la Tabla 1, siendo en este caso B el jugador que habría ganado:

Jugador	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
Número	3	5	9	17	33	65	129	250	499	500	900	1000

Tabla 1. Ejemplo de una partida

Para determinar una estrategia ganadora, si nos fijamos, el jugador que indique el número 500 habrá ganado la partida, ya que entonces el otro jugador no podrá alcanzar el 1000 y sea cual sea el número que este último indique, el que había nombrado el 500 tiene así la victoria.

Análogamente, nombrando el 250 se tiene garantizado poder llegar al 500 y en los siguientes turnos, continuando con este procedimiento, habría que indicar 125, luego el 62, el 31, el 15, el 7 y finalmente el 3. Como el 3 lo puede nombrar al comienzo el jugador A, este puede ganar siempre y cuando siga esta estrategia, es decir, nombrando en orden los números 3, 7, 15, 31, 62, 125, 250, 500 y finalmente 1000, lo cual siempre podrá hacer.

Este juego, de origen desconocido, tiene como objetivo reforzar el razonamiento cognitivo del alumno, ofreciéndole nuevas formas de proceder, y sobre todo su concentración. Coloca a las Matemáticas como una situación generadora de diversión y permite a los alumnos adquirir flexibilidad y agilidad mental jugando. Puede ser usado en las últimas etapas de Primaria y en toda la Secundaria (para Bachillerato lo consideramos muy simple). Como actividad complementaria, el profesor puede pedirle a los alumnos, ya a nivel de Secundaria o superior, que comiencen el juego a partir de un número diferente del 2 o bien que en lugar de a 1000 traten de llegar a otros números cada vez mayores, 2000 o 3000 por ejemplo, favoreciendo también con ello su capacidad de tanteo matemático y su creatividad.

3. Juego: Bajando al 0

Partiendo del número 1000, se restan alternativamente potencias de 2 menores que el número con que se empiece cada turno. Gana aquel que llegue al 0.

Este es un juego similar al anterior. Para descubrir una estrategia ganadora, es necesario ver que las posiciones ganadoras son todos los múltiplos de 3, es decir, gana aquel que sea capaz de dejar el número siempre en un múltiplo de 3

La explicación de esta estrategia se basa en el uso de las potencias de 2 que dan resto 1 o 2 alternativamente al dividirlas entre 3. Si el segundo jugador resta un natural 2k, que deja resto 1 al dividirlo entre 3, es posible hallar un natural 2k que deja resto 2 al dividirlo entre 3, con lo que al restar este el nuevo número es otra vez múltiplo de 3. Igual ocurre si resta un número 2k que deja resto 2 al dividir por 3.

Es fácil observar que con esta estrategia, es decir, que si siempre se le van dejando al contrario múltiplos de 3, el ganador es el primer jugador, dado que no hay ninguna potencia de 2 que sea múltiplos de 3.

Un ejemplo de una partida sería el siguiente: 1000, 984, 472, 216, 88, 24,8, 0, en la que el primer jugador ha usado la estrategia mencionada, dejando múltiplos de 3 tras cada uno de sus turnos (984, 216, 24, 0).

Las consideraciones pedagógicas de este juego, al igual que su origen, también desconocido, son totalmente similares a las del anterior. Como actividad complementaria, el profesor podría pedirle a los alumnos que o bien partiesen o bien tratasen de llegar a otros números diferentes de los inicialmente propuestos.

4. Juego: Mayor suma

En este juego, cuya posición inicial consiste en una fila de una cantidad par de números enteros, intervienen 2 jugadores, A y B, que van quitando alternativamente números de la fila, con la condición de que cada número que quiten tiene que estar en uno de los dos extremos de la fila, y sumando después el número que hayan quitado de la fila a su puntuación. Cuando ya no quedan números en la fila, el vencedor del juego es el jugador con mayor puntuación. Para evitar empates, la suma total de los números que se colocan inicialmente debe ser impar.

Veamos lo anterior con el ejemplo de una partida en la que se muestran la posición inicial de uno de estos juegos y las jugadas de los dos jugadores. Supongamos que los números iniciales son los siguientes:

19 47 36 40 135 37 10 74

Un ejemplo de partida sería el siguiente: A escoge el 74:

	19	**47**	**36**	**40**	**135**	**37**	**10**	**74**
B escoge el 19:	**19**	**47**	**36**	**40**	**135**	**37**	**10**	**74**
A escoge el 47:	**19**	**47**	**36**	**40**	**135**	**37**	**10**	**74**
B escoge el 36:	**19**	**47**	**36**	**40**	**135**	**37**	**10**	**74**
A escoge el 10:	**19**	**47**	**36**	**40**	**135**	**37**	**10**	**74**
B escoge el 40:	**19**	**47**	**36**	**40**	**135**	**37**	**10**	**74**
A escoge el 135:	**19**	**47**	**36**	**40**	**135**	**37**	**10**	**74**
B escoge el 37:	**19**	**47**	**36**	**40**	**135**	**37**	**10**	**74**

Y sumando puntos se tendría que la puntuación de A viene dada por la suma 74 + 47 + 10 + 135 = 266, mientras que la de B sería 19 + 36 + 40 + 37 = 132, por lo que A ganaría la partida.

En este juego se conoce una estrategia ganadora para el jugador A que lo inicia, que consiste en lo siguiente: la clave está en “pintar” los números alternativamente, de dos colores, comenzando por el extremo izquierdo (digamos, de rojo y azul). Claramente existe un color que cumple que la suma de todos los números de ese color es mayor que la suma de todos los números del otro color. Llamémosle a ese color, "*color ganador*".

Vamos a probar a continuación que A puede ingeniárselas para escoger siempre todos sus números de entre los que sean del color ganador, dejando a B obligatoriamente todos los del otro color, con lo cual A habrá ganado. En efecto:

- Si cuando A va a jugar se cumple que los dos números en los extremos son de diferente color, entonces A puede escoger el número que esté pintado con el color ganador. Tras esta jugada, los números en los extremos estarán pintados ambos del mismo color, el color perdedor.

- Si cuando B va a jugar se cumple que los dos números en los extremos están pintados ambos del color perdedor, entonces B no tiene otra opción que elegir un número del color perdedor. Tras esta jugada los números en los extremos estarán pintados de diferentes colores o, en caso de que los números de los extremos fuesen el mismo número, no quedarían más números y el juego habría terminado.

- Como el juego empieza en una posición en la que los dos números en los extremos están pintados de diferente color, entonces A puede ejecutar su estrategia de elegir el número con el color ganador, dejando a B sin otra opción que elegir un número del color perdedor en el siguiente movimiento y tras esto los números de los extremos quedarán coloreados de nuevo de diferente color, permitiendo a A seguir con su estrategia hasta que se acaben todos los números.

Por tanto, en este juego, el segundo jugador no tendrá ninguna opción de resultar vencedor si el primer jugador conoce esta estrategia y, por supuesto, no se equivoca al llevarla adelante.

Aparte de abrirles la mente a los alumnos con nuevas formas de pensar y razonar que pueden utilizar en la resolución de los ejercicios de clase, lo cual es característico de todos los juegos que se muestran en este artículo, este juego, cuyo origen también es desconocido, favorece especialmente la concentración del alumno y potencia sus habilidades de cálculo. Puede ser planteado también a partir de los dos últimos cursos de Primaria y como variantes, el profesor puede proponer que sean los propios alumnos los que elijan los números iniciales de los que se parte o bien preguntarles qué podría ocurrir si suma total de los números que se colocan inicialmente es un número par, potenciando con ello sus capacidades de pensar "de atrás en adelante".

5. Juego: 11 para la gloria

En cierta forma este juego puede considerarse una variante del anterior y puede ser muy motivador para los alumnos ya que está centrado en el fútbol, deporte generalmente muy seguido e incluso practicado por la mayoría de los alumnos de estas edades (en este caso, particularmente, nos estamos refiriendo a alumnos varones, si bien no hay que olvidar el enorme auge que está teniendo el fútbol femenino en la actualidad).

El juego fue propuesto por el futbolista internacional español Juan Manuel Mata García (Burgos, 1988, actual jugador del Manchester United, de la Premier League), aficionado a las Matemáticas, para la sección "El desafío matemático" que publicaba semanalmente el periódico español "El País" hace algún tiempo.

En el juego, dos jugadores, A y B, toman el rol de dos porteros que organizan un partido de fútbol y cada uno de ellos ha de elegir a 10 jugadores de entre sus 20 compañeros. Para ello, los 20 compañeros se alinean en fila y A y B deben ir escogiendo alternativamente a uno de los que se encuentre en cada momento en los extremos. Para facilitar esa elección, los porteros conocen el número de goles marcados de media por cada uno de sus compañeros en cursos anteriores (es decir, conocen a los que podrían considerarse “mejores jugadores”). Cada uno de los dos porteros debe tratar de elegir su equipo de forma que el número de goles marcado por la totalidad de los componentes de su equipo sea mayor que los logrados por los que componen el otro equipo.

En principio, el número de goles que ha marcado cada jugador puede ser cualquiera, siempre y cuando se indiquen claramente todos al principio del juego. Eso hace que aunque los jugadores se vayan eligiendo al azar, cabe una pequeña posibilidad de que no exista estrategia ganadora y el juego acabe en empate. Además, el juego vale igualmente para elegir cualquier número de jugadores por parte de cada guardameta, siempre que ese número sea par.

Es fácil ver que empleando un razonamiento similar al usado en el juego anterior, la estrategia ganadora la tiene el jugador que empieza a elegir.

La Figura 1 muestra un esquema de este juego, aunque con menos jugadores. Los números de las camisetas indican el número de goles marcados por cada jugador (imagen sacada de (Grima y García, 2013)).

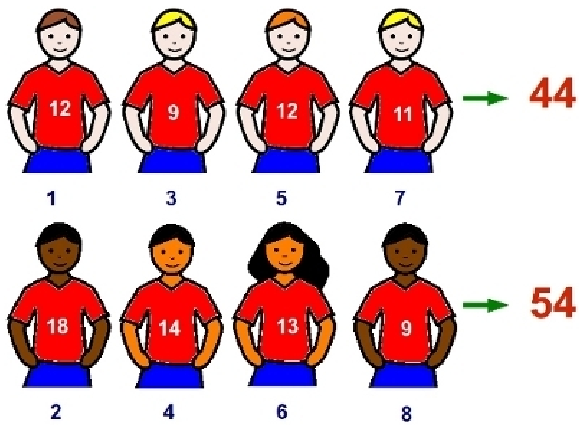


Figura 1. El juego 11 para la gloria (con menos jugadores)

Al ser este juego una especie de variante del anterior, los aspectos didácticos que se pueden comentar sobre él son similares a los de ese. Como variante y en aras de promover la afición por otros deportes, el profesor puede plantear la sustitución de los veinte jugadores de fútbol por el número apropiado de titulares de otras modalidades de deportes en equipo, como baloncesto o balonmano, por ejemplo, favoreciendo así la creatividad de sus alumnos.

6. Juego: Acorralado

El Acorralado es un juego entre dos jugadores que se juega en dos columnas de un tablero de ajedrez. Cada jugador posee dos fichas, una en cada columna, que puede mover hacia delante o hacia atrás el número de casillas que quiera. El juego empieza con las dos fichas de cada jugador en los lados opuestos del tablero y ambos jugadores mueven alternativamente, teniendo en cuenta que cada uno mueve en una de sus líneas y que no puede saltar la ficha del contrario. El jugador que gana es el que consigue acorralar ambas fichas del contrario, es decir, gana el que puede forzar una situación en la que el contrario se queda sin movimientos posibles en su turno.

Veamos a continuación que el jugador B tiene una estrategia ganadora, que consiste simplemente en mover sus fichas adecuadamente, dependiendo de la jugada anterior de A. Obviamente, A tiene dos posibles jugadas en su turno: avanzar o retroceder. Ante una de esas dos jugadas, B debería responder de la siguiente forma:

- Si A hace en una columna un movimiento hacia delante, entonces B debe mover su ficha el mismo número de casillas también hacia delante en la otra columna.

- Si A hace en una columna un movimiento hacia atrás, entonces B debe mover su ficha el mismo número de casillas hacia delante en esa misma columna.

Mediante un razonamiento matemático no excesivamente complicado, cuyo desarrollo completo omitimos aquí por ser de un nivel superior al que se supone poseen los alumnos a los que se les expone, puede verse que, efectivamente, el jugador B siempre puede mover su ficha de esa manera en su turno, contestando a las jugadas de A tal como se ha indicado. Esto es consecuencia de que a lo largo del razonamiento se prueba que "*tras el turno de B, o antes de que comience el nuevo turno de A, se cumple que el número de casillas entre la ficha de A y la de B en las dos columnas es el mismo".* Este resultado implica que tras la jugada de A, B siempre puede responder en la forma indicada, pues si A decide retroceder es obvio que B puede avanzar su ficha las mismas casillas en ese tablero y en el caso de que A decida avanzar, como el resultado anterior establece que el número de casillas que hay entre las fichas era el mismo antes de que A avanzara, B puede avanzar su ficha el mismo número de casillas en el otro lado del tablero.

Vemos a continuación cómo se desarrollaría una partida entre A y B, cuyos movimientos se indican de izquierda a derecha y de arriba abajo. En el esquema de juego, la notación A (resp. B) representa que la casilla está ocupada por el jugador A (B, resp.) y la notación O que la casilla está desocupada.

AOOOOOOOB AOOOOOOOB	OOOAOOOOB AOOOOOOOB	OOOAOOBOO AOOOOOOOB	OOOOAOBOO AOOOOOOOB
OOOOAOBOO AOOBOOOOO	OAOOOOBOO AOOBOOOOO	OAOBOOOOO AOOBOOOOO	OAOBOOOOO OOABOOOOO
OABOOOOOO OOABOOOOO	OABOOOOOO AOOBOOOOO	OABOOOOOO ABOOOOOOO	AOBOOOOOO ABOOOOOOO
ABOOOOOOO	ABOOOOOOO		

Y el jugador B ganaría porque A ya no tendría movimientos posibles.

Al jugarse este juego en un tablero de ajedrez nos remitimos a los tres siguientes párrafos, extraídos de (Fuente, 2013), para referirnos a los aspectos didácticos que se derivan del mismo.

Hace bastante menos de una década, el ajedrez ya era una asignatura obligatoria en todos los colegios de Cuba, Venezuela, Islandia, Armenia, Georgia, Azerbaiyán y Moldavia y obligatoria u optativa en colegios de muchas otras naciones. En España, era una asignatura optativa en más de 1000 colegios y obligatoria en más de 100, aunque ninguno carácter estatal en ambos casos.

Como ya es sabido, el ajedrez es un juego clásico de mesa basado en unas reglas sencillas. Sin embargo, jugar bien implica el uso de estrategias cognitivas complejas. Está probado que mediante el ajedrez se ejercitan muchos procesos propios del trabajo matemático, como el análisis, el razonamiento, la simbolización, etc. De hecho, varias investigaciones científicas han demostrado que los niños que juegan al ajedrez tienen un mayor rendimiento académico (+ 17% aprox.), un mayor desarrollo de la inteligencia y adquieren mejoras muy significativas tanto en Matemáticas como en Lengua.

Además, el ajedrez es una fuente de problemas muy interesantes. Con todo el tablero y todas las fichas, o sólo con algunas de ellas, se pueden plantear múltiples y diferentes situaciones que permiten practicar distintas estrategias de resolución de problemas. Este juego, como una de sus variantes, posibilita la adquisición de capacidades y habilidades para el razonamiento y permite reforzar la autoestima personal y generar autonomía en el aprendizaje.

7. Juego: Calendario

En este juego 2 jugadores irán avanzando por el calendario, siguiendo una serie de reglas, con el objetivo de no ser el jugador que nombre una fecha fijada desde el principio (el 31 de diciembre, generalmente). Para ello, se suele partir de la fecha del 1 de enero (aunque se podría proponer que se comenzara en la fecha en la que se le enseña el juego a los alumnos) y cada jugador, por turno, ha de decir bien otro día del mismo mes o bien el mismo día pero de otro mes y siempre, cada jugador deberá decir una fecha posterior a la dicha previamente. El jugador que nombre la fecha inicialmente indicada perderá.

Para estudiar cuál es la estrategia ganadora, veamos un ejemplo de partida entre los jugadores A y B. Se toma el calendario estándar de 12 meses y por turnos, comenzando desde el 1 de enero, los jugadores van indicando fechas que deberán coincidir con la última nombrada bien en el mismo mes o bien en el mismo día.

Por ejemplo, si se decide comenzar en el 1 de enero y finalizar el juego en el 31 de diciembre, A, en su primer turno, podrá nombrar cualquier fecha del mes de enero que no sea el 1 (por lo de ser siempre posterior) o el día 1 de cualquier mes siguiente al de enero. Aquel jugador que nombre el 31/12 será el perdedor del juego. Una partida podría verse en la siguiente Tabla 2:

Jugador	A	B	A	B	A	B
Fecha	01/03	18/03	30/03	30/11	30/12	31/12

Tabla 2. Ejemplo de una partida

Vemos, por tanto, que en este ejemplo de partida, B ha perdido. Es lógico que el jugador que nombre las fechas del 31/10 o 30/12 ganará la partida pues no le deja opciones a su oponente. Si ahora vemos la fecha del 29/11, cuando esta se nombre, el siguiente jugador tendrá las opciones del 30/11 o el 29/12, dando en ambos casos la posibilidad al jugador contrario de nombrar una fecha ganadora. Luego el 29/11 es también una fecha ganadora.

Para hallar la estrategia completa vamos a seguir volviendo hacia atrás en el calendario. Si ahora consideramos el 28/9 podemos razonar igual que antes, pues el adversario no puede elegir ninguna fecha ganadora y sea cual sea la que escoja podremos elegir una de las que hemos visto antes que nos llevan a la victoria. Luego igual que antes tenemos otra fecha con la que ganar. Si seguimos con esta lógica deducimos que son ganadoras también las siguientes fechas: 27/08, 26/07, 25/06, 24/05, 23/04, 22/03, 21/02, 20/01. Entonces el jugador que tiene la estrategia ganadora es A y ha de comenzar diciendo el 20/1 e ir seleccionando alguna de las fechas ganadoras (la que le permita B) en su turno. En la Tabla 3 vemos un ejemplo de una partida siguiendo esta estrategia, en la que B pierde, como cabía esperar:

Jugador	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
Fecha	20/01	20/03	22/03	27/03	27/08	29/05	29/11	30/11	30/12	31/12

Tabla 3. Ejemplo de una partida

Este juego quizás sea un poco mayor de nivel y dificultad que los comentados en las secciones 2 y 3, aunque puede perfectamente equipararse a ellos. Nos remitimos a los mismos para referirnos a sus aspectos didácticos. Como variante, el profesor podría proponer que se comenzara en otra fecha distinta o bien cambiar las reglas del juego.

8. Juego: Nim

Dos jugadores A y B colocan un número arbitrario de fichas separadas en grupos, no necesariamente el mismo número de fichas en cada grupo. Después, alternativamente, cada jugador escoge un único grupo y retira el número de fichas que quiera de este grupo. Gana el jugador que retire la última ficha del último grupo que quede.

Al igual que ocurría con el juego de El Acorralado, la formulación matemática de la estrategia que debe seguir un jugador para ganar en este juego puede ser algo complicada de entender por los alumnos a los que va dirigido este artículo, al no estar basada en los conocimientos matemáticos que se estudian en Secundaria y Bachillerato. Por ello mostramos a continuación aquí solo un esquema de la misma (puede verse completa en (Rupérez y García, 2009, pp. 130-132)).

Una posición del tablero se llama ‘*ganadora’* si el número de unos que hay en la i-ésima posición de la expresión binaria del número de fichas de cada montón es par, para todo i. En caso contrario, a esa posición se la denomina *‘perdedora’*.

El ganador del juego será el jugador que consiga quitar la última ficha, dejando así el tablero en una posición en la que el número de fichas de cada montón es 0 y por tanto una posición ganadora.

Esta última afirmación está basada en la aplicación de los dos siguientes resultados, cuyas demostraciones omitimos aquí, por la razón anteriormente expuesta: a) Si un jugador recibe el tablero en una posición ganadora, coger cualquier número de fichas de un único montón cualquiera hará que el tablero quede en una posición perdedora. b) Si un jugador recibe el tablero en una posición perdedora entonces existirá al menos un montón del cual podrá quitar un número de fichas determinado para dejar el tablero en una posición ganadora.

De esta forma, el jugador con estrategia ganadora será A si el juego comienza en una posición perdedora o B si el juego comienza en una posición ganadora, ya que por el primer resultado, el siguiente jugador, haga lo que haga, dejará el tablero en una posición perdedora y por el segundo, existirá una jugada posible que permita al primer jugador volver a dejar en tablero en una posición ganadora. Como el número de fichas totales va disminuyendo tras cada turno, llegará un momento en que un jugador coja una última ficha, y este será necesariamente el que deje tras cada turno una posición ganadora, pues la posición en la que cada montón tiene 0 fichas es ganadora.

Un ejemplo de una partida de este juego sería el siguiente. En él, cada O representa una ficha, en azul si la ha quitado A, en rojo si ha sido B.

OOOOOOOOOOOO OOOO OO	OOOOOOOOOOOO OOOO OO	OOOOOOOOOOOO OOOO OO
OOOOOOOOOOOO OOOO OO	OOOOOOOOOOOO OOOO OO	OOOOOOOOOOOO OOOO OO
OOOOOOOOOOOO OOOO OO	OOOOOOOOOOOO OOOO OO	OOOOOOOOOOOO OOOO OO

Y en este juego ha ganado el jugador B porque ha sido quien se ha llevado la última ficha.

Como comentarios didácticos, pensamos que este juego, cuya razonamiento se basa en la inducción matemática, propia de ser explicada en los preliminares de los temas numéricos o de Combinatoria, podría proponérsele en grupo a los alumnos de Bachillerato que tuviesen altas capacidades en Matemáticas, pero más que por su dificultad interna, por la base matemática en la que se sustenta, pidiéndoles que primero entendiesen y completasen la demostración cuyo esquema aquí se ha comentado y después que fuesen ellos mismos los que tratasen de explicarle esa demostración a sus compañeros. Con ello se favorecería el trabajo corporativo, que raras veces se da en este nivel y sobre todo se trabajaría la competencia de comunicación lingüística aparte de la matemática, la primera de ellas tan a menudo generalmente en falta en los estudios previos a la Universidad. También se les podría proponer a los alumnos la tarea de hacer un programa por ordenador que juegue a esta versión del Nim utilizando la estrategia ganadora que se ha comentado.

9. Juego: Chomp

Este es un juego para dos jugadores que se sirven de una tableta de chocolate de m x n unidades (onzas). Los jugadores han de evitar comerse la onza de la esquina inferior izquierda, pues se supone que ha sido envenenada. Por turnos seleccionan una onza y se comen esa onza y todas las de su derecha y las que se encuentren encima de ella.

Vamos a probar por reducción al absurdo que el jugador A, el que inicia el juego, es el que tiene ventaja. El profesor puede comentarles a sus alumnos que este procedimiento de reducción al absurdo es un método muy usado en Matemáticas, que consiste en suponer lo contrario de lo que se quiere ver que se cumple y llegar entonces a una contradicción, lo cual significa que no cabe otra posibilidad más que lo que se quería demostrar sea cierto.

Para ello, supongamos que el segundo jugador, B, tiene una estrategia ganadora; es decir; que haga los movimientos que haga A, B puede ganar el juego. Digamos que A coge la esquina superior derecha comiéndose solo esa onza. Entonces B, supuestamente, tiene un camino que le llevará a ganar; es decir una casilla específica (o una de varias posibles) para contrarrestar la acción de su rival y llevarse la victoria. Y aquí aparece la contradicción, pues esa onza que seleccione B la podría haber seleccionado A de entrada. Por tanto, B no puede tener una estrategia ganadora.

Otro tema ya más complicado es encontrar la estrategia a seguir por el primer jugador según las dimensiones del tablero. Un caso en el que es más sencillo encontrar esa forma que garantiza al primer jugador la victoria se da en los tableros cuadrados (igual número de filas que de columnas, es decir, m = n) Lo que debe hacer este jugador es lo siguiente:

Primero, elegir la segunda onza de la diagonal que pasa por la onza envenenada. Al retirar esta onza nos queda la columna vertical izquierda y la fila horizontal inferior de la tableta que coinciden en la onza envenenada.

Ahora, en el turno del segundo jugador, sea cual sea la onza de cualquiera de estas dos filas que elija, el primer jugador podrá contrarrestar esta acción cogiendo la simétrica con respecto a la diagonal de la otra fila. Al tomar onzas de cualquiera de estas dos filas la otra queda intacta, luego el primer jugador siempre puede proceder así y de esa forma nunca perderá.

De aquí podemos deducir que si en algún momento de la partida podemos coger una onza de forma que nos quede una tableta simétrica de esta manera, ya tenemos la forma de vencer a nuestro adversario.

Este juego es otra de las variantes del juego del ajedrez, cuyas consideraciones didácticas ya se han tratado anteriormente. No obstante, es conveniente indicar que este juego en particular favorece ampliamente una mejor comprensión del concepto de simetría en el plano, por lo que podría ser planteado a los alumnos antes de la introducción de los movimientos geométricos.

10. Juego: Sim

Este juego fue creado por el matemático estadounidense Gustavus J. Simmons, experto en criptografía en 1969, mientras redactaba su tesis doctoral acerca de la teoría de grafos. Está inspirado en el concepto topológico de "*Números de Ramsey*" y fue bautizado con el nombre SIM por cierto amigo suyo, quien trató de hacer referencia a la simpleza del juego (SIMple), a su parecido con el *Nim* y al propio *Simmons* (SIMmons).

El tablero del juego está constituido por los seis vértices de un hexágono. Dos jugadores, con lápices de distinto color, trazan por turnos cada vez uno de los posibles segmentos entre los puntos (véase Figura 2). Pierde el jugador que primero forme un triángulo monocolor, del color de su lápiz, siendo sus vértices puntos de la figura inicial.

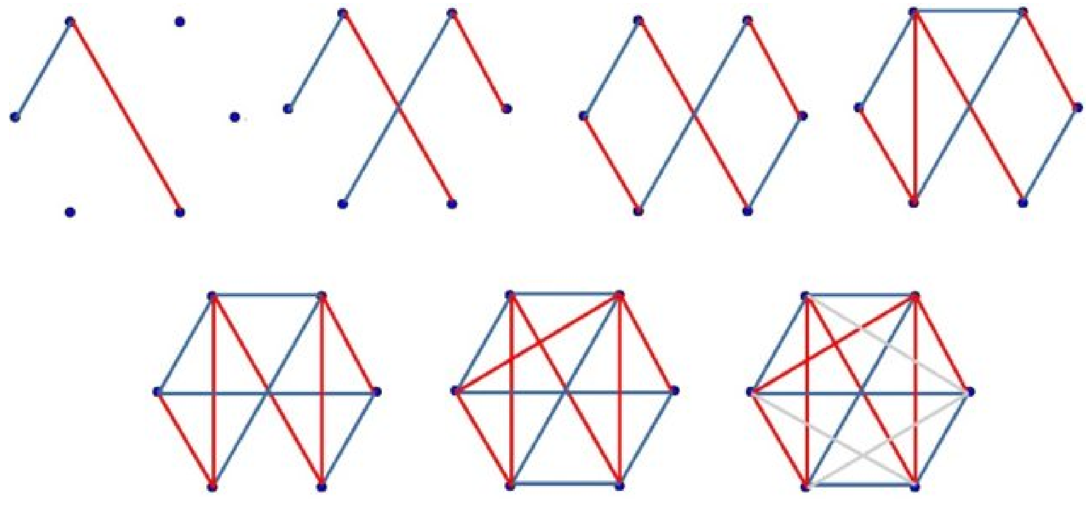


Figura 2. El juego del Sim

Una característica particular de este juego es que no puede terminar en tablas, como demostró el propio Simmons en su tesis, haciendo uso del conocido "*Principio del Palomar*", que seguidamente comentaremos. Así, siempre pierde el jugador que forma un triángulo monocolor cuyos vértices coincidan con tres de los seis vértices del hexágono.

La prueba de las afirmaciones anteriores se basa en la Teoría de Grafos (generalmente desconocida por los alumnos de estos niveles, aunque se les podría explicar algunas ideas básicas sin dificultad) y en el "*Principio del Palomar*", que, coloquialmente, dice así: "*si hay más palomas que palomares, entonces alguno de los palomares deberá contener por lo menos dos palomas*" (en general, no se suele hablar de palomas y palomares, sino de objetos cualesquiera y cajas donde guardarlos). Puede verse la demostración completa de esa prueba en (Ibáñez, 2017).

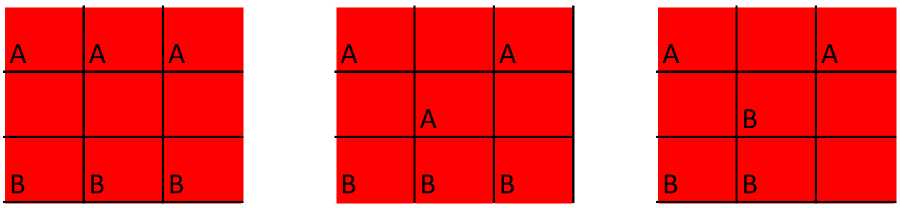
Como consecuencia de lo anterior, no existe la posibilidad de empate en este juego. Sin embargo, el problema de quién de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y cuál es esta, es bastante complejo. De hecho, Simmons no lo incluía en su tesis y solo después de un exhaustivo análisis con ordenadores descubrió que es el segundo jugador quien tiene una estrategia ganadora, y que, aún así, esta no es fácil de llevar a la práctica.

El objetivo de proponer este juego podría ser el de presentarles a los alumnos, en este caso de Bachillerato, actividades de ampliación que pudieran hacer también en grupo, dada la cantidad de posibilidades que pueden existir para cada jugada. Sería muy adecuado hacerlo para introducir los temas de Combinatoria y Probabilidad, en los que el conteo del número de casos que pueden presentarse en un experimento es a menudo un proceso difícil de realizar para los alumnos, salvo que se realice de manera sistemática y específica. Obviamente, este juego tiende a acrecentar la mayor concentración y fijeza de los alumnos, favoreciéndose de esa forma por un lado la competencia social (grupo) y por otra la de aprender a aprender, generalmente muy poco tratada a estos niveles. Si además se les pide que tratasen de implementar sus razonamientos mediante algoritmos adecuados, se estaría también favoreciendo muy positivamente también la competencia digital.

11. Juego: Hexapawn

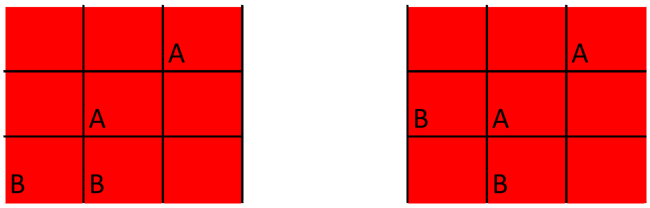
Este juego, de 2 jugadores, se disputa en un tablero 3x3. En cada lado del tablero se colocan 3 peones de un mismo color (por ejemplo blanco, que designaremos por A), para el jugador A y otros tres de distinto olor (por ejemplo, negros, designados por B) para el jugador B (ver Figura 3). Por turnos, cada jugador puede mover alguno de sus peones una casilla adelante o capturar un peón adversario en diagonal. El objetivo de cada jugador es o bien llevar uno de sus peones al otro lado del tablero, es decir, al punto de partida de uno de los peones enemigos o bien que el adversario no pueda hacer ningún movimiento para conseguir ganar. La pregunta sería: ¿qué es más ventajoso, ser primero o segundo en jugar?

Un ejemplo de una partida Hexapawn podría ser el siguiente:



Figuras 3, 4 y 5. El juego Hexapawn: Disposición inicial (izqda.)
y primeros movimientos (centro y dcha.)

En el primer movimiento A ha decidido mover su ficha central (Figura 4), tras lo cual B ha comido la ficha de A en diagonal (Figura 5). Tras ello y para evitar que B ganara en la siguiente ronda atravesando al lado opuesto, A se ha comido esa ficha de B (Figura 6). Entonces, B ha avanzado su ficha izquierda (Figura 7). En este momento, A no puede hacer nada para evitar que B avance hacia el lado contrario del tablero en este turno ni avanzar su ficha posterior pues está bloqueada por la otra de B, luego B resultará ganador en el siguiente turno.



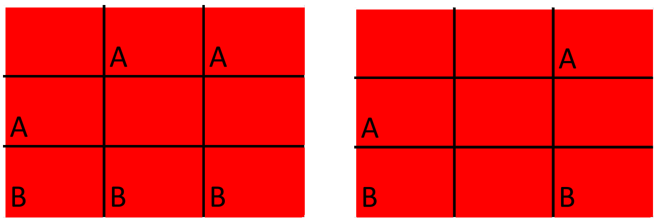
Figuras 6 y 7. El juego Hexapawn

Vamos a probar que es el segundo jugador, B, quien tiene la estrategia ganadora, viendo los distintos pasos que tiene que realizar para ganar, según los movimientos que realice el primero, A. La explicación se apoyará en los diagramas para ilustrarla. Consideremos el tablero inicial (ver Figura 3):

Por simetría, hay que analizar 2 casos. Cuando A empieza moviendo una de sus piezas de las esquinas o cuando A empieza moviendo su pieza central. Podemos usar este recurso de la simetría pues todo lo que haríamos para ganar si A mueve, digamos la pieza izquierda, lo podemos hacer con la pieza simétrica de B

Caso 1: A comienza moviendo un peón exterior

La acción que debe realizar B entonces es capturar la pieza de A con su pieza central (Figura 8). En el siguiente turno, A debe capturar a B pues si no, B habrá atravesado el tablero, ganando por tanto (Figura 9).

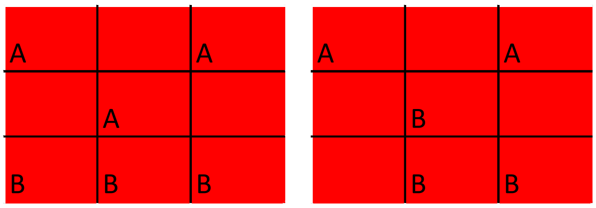


Figuras 8 y 9. El juego Hexapawn

Ahora es el turno de B, que puede mover su pieza derecha de forma que A no pueda realizar ningún movimiento en el turno siguiente, por lo que B siempre gana en este caso.

Caso 2: A mueve su peón central (Figura 10).

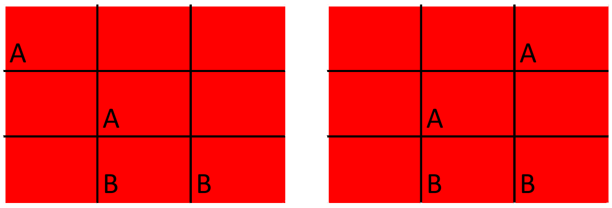
Lo que debe hacer B es capturar el peón avanzado de A. Lo vamos a hacer con el peón izquierdo (Figura 11).



Figuras 10 y 11. El juego Hexapawn

Ahora, A ha de capturar con alguno de sus dos fichas al peón avanzado de B, pues si no, B ganará en el siguiente turno. Veamos en un diagrama ambas opciones.

Si A atrapa con la pieza derecha (Figura 12): En este caso, B puede avanzar su pieza derecha sin que A pueda capturarla en su turno, por lo que B ganaría en su siguiente turno.



Figuras 12 y 13. El juego Hexapawn

Si A lo atrapa con la pieza izquierda (Figura 13): B mueve ahora su pieza derecha, dejando sin movimientos a A y ganando por consiguiente.

Por tanto, se ha demostrado que sin importar los movimientos que realice A, este siempre va a encontrarse en un callejón sin salida. Lo que se ha hecho es ver todos los posibles movimientos que puede realizar A y ver que en todos ellos resulta ganador, juegue como juegue B. Esto se conoce como el *árbol* asociado al juego en el que cada rama representa un estado del juego y en cada turno cada rama se divide en una serie de ramas o casos. En este caso, gracias a que es un juego no muy complejo, el número de ramas no es elevado y además, por simetría, hemos evitado tener que analizarlas todas. Muchos otros juegos no son resolubles por estos métodos por tener árboles con millones de ramas o incluso una cantidad infinita de ellas.

Este juego también puede considerarse otra de las variantes del juego del ajedrez, cuyas consideraciones didácticas ya se han comentado. No obstante, también es conveniente indicar que al igual que ocurría con el juego de la sección 9, este favorece la consolidación de muchos conceptos geométricos, como los movimientos en el plano en general y las simetrías en particular.

Una variante a su vez de este juego que el profesor podría proponer, quizás para los alumnos más aventajados, sería aumentar las dimensiones del tablero e incluso, ya para los alumnos de muy altas capacidades, “inventarse” una variante del mismo en un tablero tridimensional, favoreciendo así no solo el ingenio sino la visión espacial de los alumnos.

12. Reflexiones

Ya durante los años 80 y 90 del pasado siglo, una serie de profesores comenzaron a investigar profundamente sobre las ventajas de la utilización de los juegos en el aula en España. Entre otros estaban el ya nombrado Miguel de Guzmán, Fernando Corbalán, Inés M.ª Gómez Chacón, Ana García Azcárate, Luis Ferrero o Jordi Deulofeu, quienes comenzaron a estructurar y a analizar didácticamente la gran variedad de juegos que surten el material educativo para el trabajo en el aula (Muñoz, Hans, Fernández-Aliseda, 2019). Esta propuesta ha continuado y en los últimos años otros autores, como por ejemplo los componentes del Grupo Alquerque (web4) o miembros del departamento de Didáctica de la Universidad de Granada (España), entre otros, le han dedicado sus esfuerzos.

Por lo que se refiere a los juegos presentados, es conveniente ante todo indicar que existen muchos otros juegos de estrategias distintos de ellos que no se han considerado en este artículo, con el fin de no alargarlo demasiado. Entre ellos y muy en la línea de los anteriores podríamos destacar dos, muy del gusto de los autores: el juego de Wythoff, de dos jugadores y para cuyo desarrollo solo se necesita una ficha por jugador y una hoja cuadriculada y el juego llamado, entre otros nombres, Timbiriche, también un juego de lápiz y papel, destinado a formar cuadraditos, en el que pueden participar varios jugadores (pueden consultarse en (web4)).

Los autores pensamos, a la vista del análisis realizado en este artículo, que la resolución mediante estrategias de los distintos juegos matemáticos que se han presentado y de otros similares favorece sin ninguna duda el desarrollo de distintas habilidades matemáticas por parte de los alumnos, bien por enfrentarse a un problema distinto a los que acostumbran en el aula, bien por la gran variedad de estrategias y métodos que se pueden aplicar para hallar estrategias ganadoras en los mismos. Les permite igualmente ver que las Matemáticas además de ser una herramienta, pueden ser un juego divertido que se emplea en muchas ocasiones y que aparece en los lugares más insospechados. Todo ello, como ya se ha indicado, también favorece, a su vez, el desarrollo de otras competencias distintas de la propiamente matemática, que el alumno debe ir adquiriendo a lo largo de su currículo escolar.

Entre los juegos presentados puede verse que algunos de ellos sirven para hacer un proceso de deducción inversa porque se comienza en la etapa final del juego y después se va retrocediendo, dado que la estrategia que se sigue para vencer se va construyendo viendo los movimientos finales que llevan a la victoria y después viendo cómo llegar a esos movimientos y así volviendo hasta el principio del juego. Casos de esto son los juegos del sumando al 1000, bajando al 0 o el juego del calendario.

En otros juegos, como el del chomp, se observa que no siempre va de la mano saber qué jugador tiene ventaja con el hecho de deducir cuál es la ventaja en sí. En el caso de este juego, por ejemplo, sabemos que el primer jugador tiene ventaja siempre, pero solo en algunos casos particulares se puede ser consciente de los pasos que este debe seguir para garantizarse la victoria.

Por otra parte, otra ventaja de los juegos propuestos es que también le permiten al profesor proponer temas de investigación a sus alumnos, como medio de atención a la diversidad, enfatizando así las actividades de ampliación y no solo las de refuerzo, como podrían ser, por ejemplo y entre otros, aquellas que ya se han comentado: preguntarles qué pasaría en los juegos de tablero si se cambian las dimensiones de los mismos, qué estrategias ganadoras deberían seguir en los juegos del tipo subiendo al 1000 o bajando al 0 si se cambian estos números por otros o incluso pedirles que ellos mismos se “inventasen” juegos de características similares pero con distintas condiciones o reglas.

Por todo ello, pensamos que el “aprendizaje basado en juegos” (Muñoz, Hans, Fernández-Aliseda, 2019) es una muy buena idea, que puede ser usada sin ninguna duda como recurso metodológico por parte del profesor de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato. El planteamiento y puesta en práctica en el aula de estos juegos anteriormente comentados y de otros similares, por una parte despierta el interés y motivación de los alumnos por la asignatura, y por otra les permite aumentar sus capacidades y habilidades en Matemáticas, al tratar de descubrir qué procedimientos, técnicas o, en definitiva, estrategias deben seguir para resultar vencedores.

Es cierto, no obstante, que la inclusión de los juegos dentro del currículo y el modo de llevarlos al aula no suele resultar fácil para el profesor novel en estas lides, a pesar de que este material es totalmente actual y muchos profesores ya lo lleven experimentando desde hace mucho tiempo. Los autores pensamos que no hay una regla infalible para ello, salvo consultar las experiencias publicadas por estos últimos, analizarlas, aprender de ellas y tratar de adaptarlas a cada caso particular. Ahí juega un papel determinante la habilidad del profesor para afrontar esa tarea y sacarles a los juegos el máximo rendimiento educativo en su aula.

Agradecimientos

Los autores desean agradecer la valiosa ayuda prestada por Isabel Ballester Torremocha en la elaboración de este artículo.

Bibliografía

Carrillo Yáñez, José (2009). Resolución de problemas. Su concreción en algunos recursos clásicos. *Revista Educación y Pedagogía* XV (35), 153-161.

Equipo Editorial (2003). *Enciclopedia de los juegos. Las reglas de 500 juegos*. Editorial Paidotribo, Barcelona.

Flores, Pablo, Peinado León, Pedro (2019). ¿Gamificación como nueva tendencia didáctica? *Revista Epsilon*, 101, 7-10.

Fuente Somavilla, María José (2013), Una pareja indisoluble: Ajedrez y Matemáticas.Recuperado el 20 de mayo de 2020 de: https://www.matematicasenaccion.unican.es/transparencias20122013/transparencias_ajedrez_y_matematicas.pdf

Grima, C., García, R. (2013). *Hasta el infinito y más allá: Mati y sus mateaventuras.* Ed. Espasa Juvenil. España.

Guzmán, M. (1989). *Juegos y matemáticas. Revista SUMA,* 4, 61-64.

Ibáñez, R. Blog de la Cátedra de Cultura Científica de la Universidad del País Vasco. Recuperado el 20 de mayo de 2020 de: https://culturacientifica.com/2017/04/19/juego-del-sim/

Muñoz, José, Hans, Juan Antonio, Fernández-Aliseda, Antonio (Grupo Alquerque) (2019). Gamificación en matemáticas, ¿un nuevo enfoque o una nueva palabra? *Revista Epsilon*, 101, 29-45.

Paenza, Adrián (2007). Matemática... ¿Estás ahí? Siglo Veintiuno Editores. Colección “Ciencia que Ladra...”

Romero Sandí, H., Rojas Ramírez, E. (2013). La Gamificación como participante en el desarrollo del B-learning. Proceedings of the 11th Latin American and Caribbean Conference for Engineering and Technology. Cancún, Mexico

Rupérez, J.A., García-Déniz, M. (2009). Graduación de la dificultad en los Juegos de Nim. *Revista Números* 70, 129-133.

web1. Más de 25 ideas increíbles sobre Juegos matemáticos en Secundaria. Recuperado el 20 de mayo de 2020 de:

https://www.pinterest.es/explore/juegos-matematicos-secundaria/

web2. Juegos de Estrategia. Recuperado el 20 de mayo de 2020 de: http://aprendeenlinea.udea.edu.co/boa/contenidos.php/8b077438024e1bddfbc83706da8049f2/138/1/contenido/contenido/curiosidad_05.html

web3: Educación 3.0. Recuperado el 20 de mayo de 2020 de:

https://www.educaciontrespuntocero.com/noticias/gamificacion-que-es-objetivos/70991.html

web4: Grupo Alquerque. Recuperado el 20 de mayo de 2020 de:

http://www.grupoalquerque.es/

Jaime Benabent Guerrero (Sevilla, 1998)**:** Actualmente es alumno de cuarto curso del Grado de Matemáticas en la Universidad de Sevilla. Medallista Olímpico de Matemáticas en varias ocasiones, posee, entre otras, la mención de honor en la LVIII Olimpiada Matemática Internacional, celebrada en Río de Janeiro en 2017. Colabora con el profesor Núñez en artículos de Matemáticas Recreativas y de Divulgación de las Matemáticas. E-mail: benabent.math@gmail.com

Alfonso Márquez Martínez (Sevilla, 1998)**:** Graduado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla. Colabora con el profesor Núñez en artículos de Matemáticas Recreativas y de Divulgación e Historia de las Matemáticas. E-mail: alfonsomm0708@gmail.com

Juan Núñez Valdés (Sevilla, 1952): Licenciado y Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla, en la que trabaja actualmente como Profesor Titular del Dpto. de Geometría y Topología, con sede en la Facultad de Matemáticas. Sus principales líneas de investigación son los grupos y álgebras de Lie y la Matemática Discreta, habiendo publicado varios artículos de investigación sobre las mismas en diferentes revistas de impacto. Es vocal de la Junta Directiva de la Delegación Provincial de Sevilla de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES y autor de varias publicaciones sobre Matemáticas Recreativas y Divulgativas, así como también sobre Historia de las Matemáticas. E-mail: jnvaldes@us.es