

**Parametrización de regiones planas y superficies en el espacio  
 empleando GeoGebra**  
**Parametrização de regiões planas e superfícies no espaço usando  
 o GeoGebra**

**Marco Antonio Ayala Chauvin, Richard Leonardo Luna Romero, Jennifer  
 Valeria Quezada Guajala**

Fecha de recepción:  
 Fecha de aceptación:

<p><b>Resumen</b></p>	<p>Existen varios estudios relacionados al tema de parametrización de superficies; sin embargo, este artículo se centra en destacar la deducción de las fórmulas que posibilitan dicha parametrización y, en consecuencia, la representación gráfica de regiones planas y superficies en el espacio de manera general. Este proceso se realiza con la ayuda de GeoGebra y se fundamenta en la teoría de registros de representaciones desarrollada por Raymond Duval. Estos fundamentos proporcionarán la base necesaria para que tanto docentes como estudiantes puedan mejorar sus conocimientos sobre parametrización de superficies en el sistema de coordenadas cartesianas.  <b>Palabras clave:</b> Parametrización, GeoGebra, Región, Superficie.</p>
<p><b>Abstract</b></p>	<p>There are several studies related to the parametrization of surfaces; however, this article focuses on the deduction of the formulas that enable such parametrization and, consequently, the graphical representation of flat regions and surfaces in space in general. This process is carried out with the help of GeoGebra and is based on the theory of registers of representations developed by Raymond Duval. These fundamentals will provide the necessary basis for both teachers and students to improve their knowledge of surface parameterization in the Cartesian coordinate system.  <b>Keywords:</b> Parameterization, GeoGebra, Region, Surface.</p>
<p><b>Resumo</b></p>	<p>Há vários estudos relacionados ao tema da parametrização de superfícies; no entanto, este artigo se concentra na dedução das fórmulas que permitem essa parametrização e, conseqüentemente, a representação gráfica de regiões planas e superfícies no espaço em geral. Esse processo é realizado com a ajuda do GeoGebra e baseia-se na teoria de registros de representações desenvolvida por Raymond Duval. Esses fundamentos fornecerão a base necessária para que professores e alunos aprimorem seus conhecimentos sobre a parametrização de superfícies no sistema de coordenadas cartesianas.  <b>Palavras-chave:</b> Parametrização, GeoGebra, Região, Superfície.</p>

## 1. Introducción

El análisis matemático multivariado es una asignatura esencial para los estudiantes de ciencias e ingeniería, no obstante, sus conceptos abstractos suelen ser complicados de entender. Entre estos conceptos está la parametrización de superficies tridimensionales y de regiones en el plano, tema en el cual los estudiantes muestran dificultad de comprensión tanto en la parte algebraica como en la parte geométrica (Padayachee y Khemane, 2023).

La comprensión de superficies paramétricas es de suma importancia debido a que sirve para el modelamiento de sólidos y demás superficies de las que, a través de integrales dobles, se podrá calcular su área y volumen. En el estudio de integrales de línea y superficie también es esencial el uso de superficies paramétricas para entender el significado geométrico algebraico de los conceptos en cuestión.

El poder realizar un proceso cognitivo de partir de un registro gráfico y llegar a un registro algebraico y viceversa es fundamental dentro de la comprensión de un objeto matemático. Es por ello que este estudio se basa en la teoría de registros de representaciones semióticas de Raymond Duval. En dicha Teoría Duval (2006) establece que no se puede tener acceso a los objetos matemáticos sino a través de la generación de representaciones semióticas. Estas representaciones deben conformar un registro que permita realizar tres actividades cognitivas. Estas son, la formación de una representación identificable, tratamiento y conversión.

La primera actividad cognitiva está relacionada con la expresión de la representación mental. La actividad de tratamiento es una transformación interna de una representación semiótica dentro de un mismo registro. La actividad cognitiva externa es la conversión y se trata del cambio de una representación semiótica de un registro a otro.

El propósito de este artículo es brindar a los lectores las herramientas algebraicas necesarias para que puedan desarrollar sus propias construcciones geométricas de superficies, a partir de parametrizaciones, tanto en el plano como en el espacio, haciendo uso del software libre "GeoGebra", que, de acuerdo a Andrade et al. (2020), permite a los estudiantes comprender una variedad de conceptos matemáticos de manera visual e interactiva, debido a que dicho programa combina el álgebra con la geometría de manera eficaz.

## 2. Conceptos Previos

### 2.1. Parametrización de curvas en el Plano

#### 2.1.1. Parametrización de una curva definida a lo largo del eje $x$

Sea una función  $y = f(x)$  definida en un intervalo  $[a, b]$ . La forma más simple y general de parametrizar la curva descrita por la función  $f(x)$  es asignar el parámetro  $t$  a la variable independiente  $x$ . De esta manera, la variable dependiente quedará expresada como  $y = f(t)$ . Así, se obtendrá una curva parametrizada como la que se muestra a continuación:

$$C = \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b \quad (1)$$

En la ecuación (1) se observa que  $t$  está entre  $a$  y  $b$ , debido a que  $x = t$ , por lo que los valores de  $t$  tomarán los mismos valores que  $x$ .

También se puede expresar dicha curva en el plano mediante la forma vectorial paramétrica (Thomas et al., 2010). En esta forma, el parámetro  $t$  se emplea para encontrar las coordenadas de un punto en la curva mediante un vector posición  $\vec{r}(t)$ , que describe la curva en el intervalo  $[a, b]$ . Esto se puede apreciar en las ecuaciones (2) y (3) y en la figura 1.

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j} \quad (2)$$

$$\vec{r}(t) = t \hat{i} + f(t) \hat{j}, \quad a \leq t \leq b \quad (3)$$

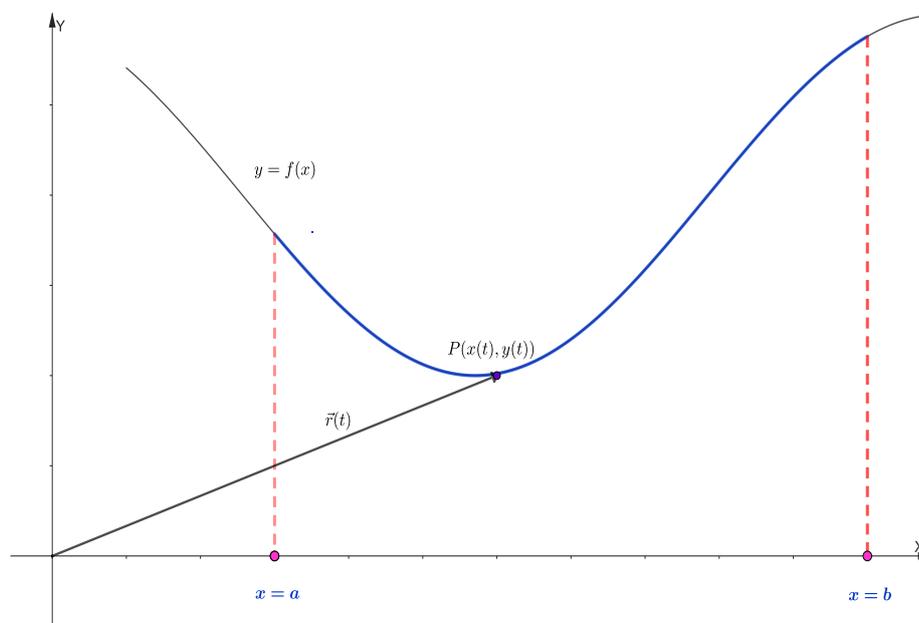


Figura 1. Parametrización de una curva a lo largo del eje x

### 2.1.2. Parametrización de una curva definida a lo largo del eje y

La parametrización de una función  $x = f(y)$  definida en  $[c, d]$  es similar a la parametrización de una función  $y = f(x)$ , de esta manera la curva quedará parametrizada de la siguiente forma:

$$C = \begin{cases} x = f(t) \\ y = t \end{cases}, \quad c \leq t \leq d \quad (4)$$

Y la forma vectorial paramétrica es:

$$\vec{r}(t) = f(t) \hat{i} + t \hat{j}, \quad c \leq t \leq d \quad (5)$$

En la figura 2 se muestra la parametrización para este tipo de curvas

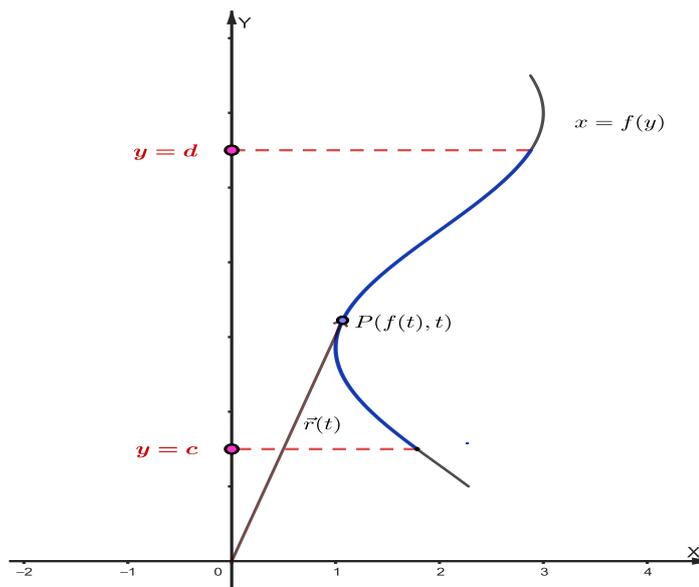


Figura 2. Parametrización de una curva a lo largo del eje y

### 3. Parametrización de una región en el plano XY

Ahora lo que se desea es un vector posición que describa la región debajo de la curva  $y = f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ .

Analizando la curva de la figura 3 en un instante  $t_i$  en  $[a, b]$  se obtiene el vector posición  $\vec{r}(t_i)$  que indica la posición  $P(x(t_i), y(t_i))$  en la curva. Sin embargo, para describir la superficie de la región, no solo se desea la posición en la curva, sino también debajo de ella, por lo que la manera más simple será encontrar todos los puntos verticalmente hacia abajo del punto  $P(x(t_i), y(t_i))$  como se muestra en la figura 4, por lo que se obtendrá una recta vertical  $y_s$  que va de  $P(t_i, 0)$  hasta  $P(t_i, f(t_i))$ . El vector director de esta recta vertical se calcula a continuación.

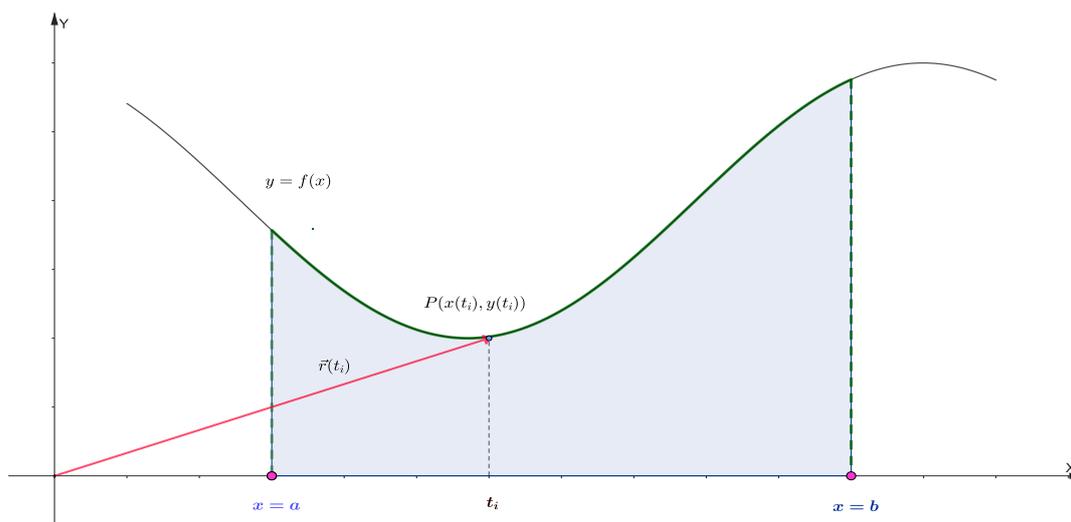


Figura 3 Parametrización de una región acotada por  $y = f(x)$  y el eje x en  $[a, b]$

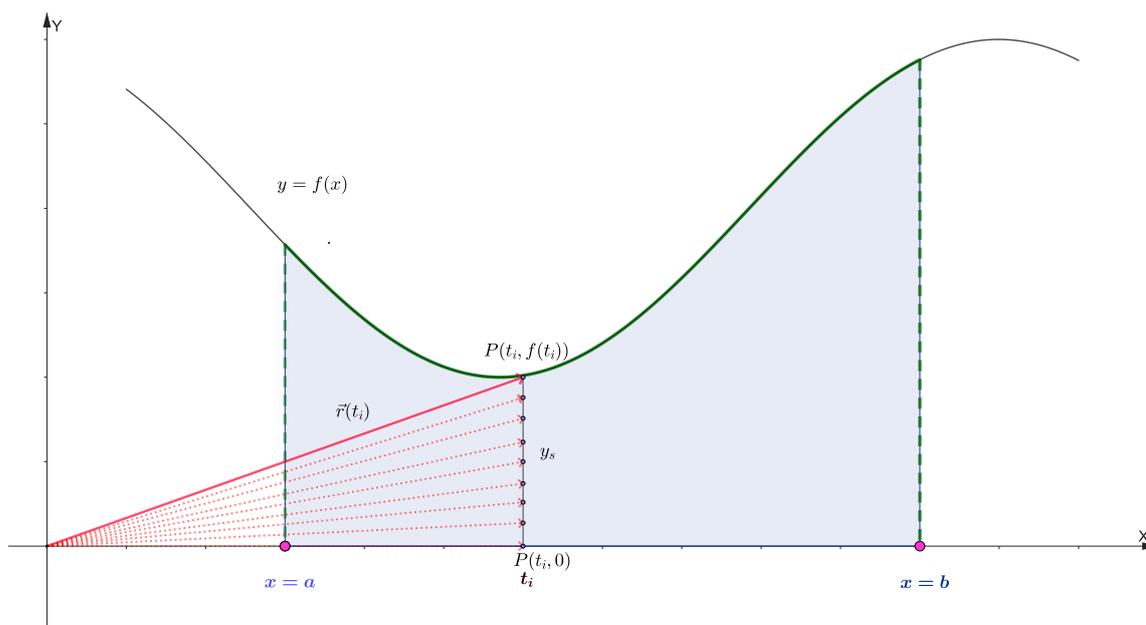


Figura 4. Conjunto de vectores en el instante  $t_i$  para este tipo de región

$$\vec{d} = P(x(t_i), y(t_i)) - P(x(t_i), 0) = (t_i, f(t_i)) - (t_i, 0)$$

$$\vec{d} = (t_i - t_i, f(t_i) - 0) = (0, f(t_i))$$

Por lo tanto, la ecuación vectorial de la recta  $y_s$  es:

$$\vec{y}_s = P(x(t_i), 0) + s\vec{d} = (t_i, 0) + s(0, f(t_i))$$

$$\vec{y}_s = (t_i, 0) + (0, sf(t_i)) = (t_i, sf(t_i))$$

Como esta recta depende del parámetro  $s$ , esta equivale a un vector posición  $\vec{r}(s)$  que describe a la recta  $y_s$  que va de  $P(t_i, 0)$  hasta  $P(t_i, f(t_i))$ . Es decir,

$$\vec{r}(s) = t_i\hat{i} + sf(t_i)\hat{j}$$

Ahora se calcularán los valores que toma  $s$ .

$$\text{Si } \vec{r}(s) = (t_i, 0) \Rightarrow (t_i, 0) = (t_i, sf(t_i)) \Rightarrow t_i = t_i \wedge 0 = sf(t_i)$$

$$\Rightarrow s = \frac{0}{f(t_i)} = 0, \text{ donde } f(t_i) \neq 0$$

$$\text{Si } \vec{r}(s) = (t_i, sf(t_i)) \Rightarrow (t_i, sf(t_i)) = (t_i, sf(t_i)) \Rightarrow t_i = t_i \wedge sf(t_i) = sf(t_i)$$

$$\Rightarrow s = \frac{f(t_i)}{f(t_i)} = 1, \text{ donde } f(t_i) \neq 0$$

Entonces los valores que toma  $s$  están entre 0 y 1, es decir:

$$\vec{r}(s) = t_i\hat{i} + sf(t_i)\hat{j}, \text{ con } 0 \leq s \leq 1 \quad (6)$$

Dado que  $t_i \in [a, b]$  se puede generalizar para cualquier punto de  $t$ , haciendo  $t_i = t$ , logrando de esta manera obtener todas las rectas verticales que van de  $f(x)$  hacia el eje de las  $x$  en  $[a, b]$ , dando como resultado la ecuación vectorial que describe la superficie, es decir:

$$\vec{r}(t, s) = t\hat{i} + sf(t)\hat{j} \quad (7)$$

Obsérvese que la ecuación (3) tiene una variable, mientras la ecuación (7) contiene 2 variables, esto coincide con Larson y Edwards (Larson y Edwards, 2010),

los cuales indican que la función vectorial que describe una curva es una función de un solo parámetro, mientras que una función vectorial que describe una superficie es función de dos parámetros.

Esta función vectorial también se lo puede expresar como la ecuación (1), es decir,

$$S = \begin{cases} x(t, s) = t, & a \leq t \leq b \\ y(t, s) = sf(t), & 0 \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (8)$$

La parametrización de la región formada por la curva  $x = f(y)$ , las rectas  $y = c$ ,  $y = d$  y el eje de las ordenadas como se muestra en la figura 5, es análoga al proceso de parametrización de la figura 4.

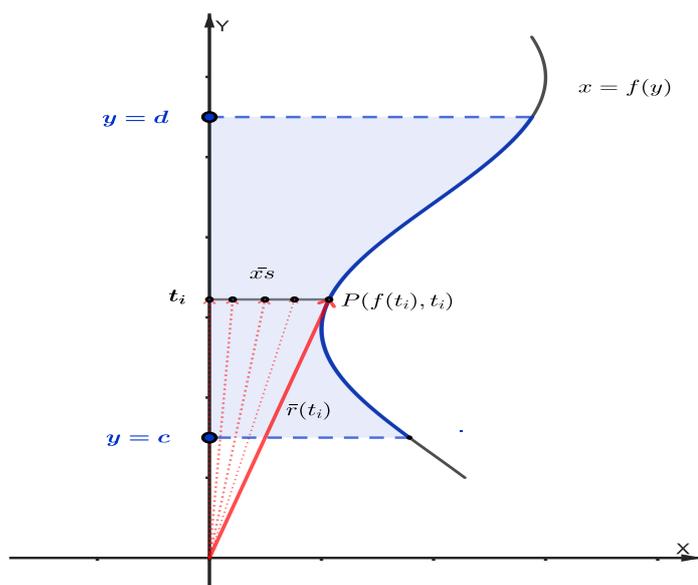


Figura 5. Parametrización de una región acotada por  $x=f(y)$  y el eje  $y$  en  $[c,d]$

De esta manera, la parametrización de la superficie mostrada en la figura 5 se muestra a través de las siguientes ecuaciones:

$$S = \begin{cases} x(t, s) = sf(t), & 0 \leq s \leq 1 \\ y(t, s) = t, & c \leq t \leq d \end{cases} \quad (9)$$

$$\vec{r}(t, s) = sf(t)\hat{i} + t\hat{j} \quad (10)$$

Obsérvese que las ecuaciones (9) y (10), son básicamente las mismas ecuaciones (4) y (5) pero con un factor  $s$  que multiplica a las abscisas. Lo mismo ocurre con las ecuaciones (7) y (8), son similares a las ecuaciones (1) y (3) pero con un factor  $s$  multiplicado al eje de las ordenadas.

#### 4. Parametrización de regiones Tipo I y Tipo II

De acuerdo a Swokowski (1996) las regiones en plano  $XY$  como las que se muestran en las figuras (6) y (7) son de gran importancia en el estudio de las integrales dobles. En este tipo de regiones  $f(x)$ ,  $g(x)$  y  $h(y)$ ,  $g(y)$  son funciones continuas en los respectivos intervalos  $[a, b]$  y  $[c, d]$ ,  $g(x) \leq f(x) \forall x \in [a, b]$  y  $h(y) \leq g(y) \forall y \in [c, d]$ .

Una región como la de la figura (6) se la conoce como región tipo I y algebraicamente queda expresada como:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\} \quad (11)$$

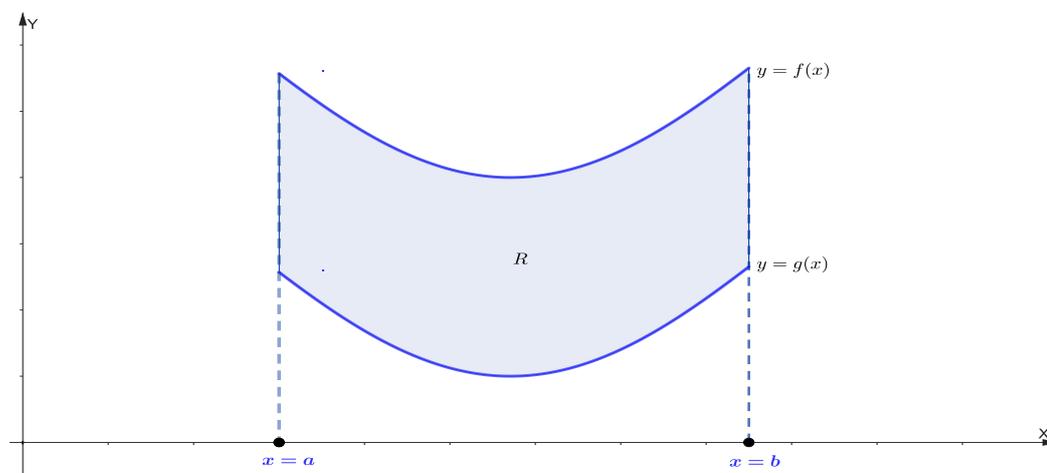


Figura 6. Región Tipo I

Mientras que una región como la de la figura (7) se la conoce como región tipo II y algebraica se expresa como:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: c \leq y \leq d \wedge h(y) \leq x \leq g(y)\} \quad (12)$$

Las ecuaciones (11) y (12) que representan a las regiones tipo I y II se las puede ingresar directamente en GeoGebra desde la entrada de vista algebraica como una inecuación, un ejemplo de ello se muestra en la figura 8. Sin embargo, para el posterior estudio de superficies en el espacio es necesario definir a estos dos tipos de regiones en plano de forma paramétrica.

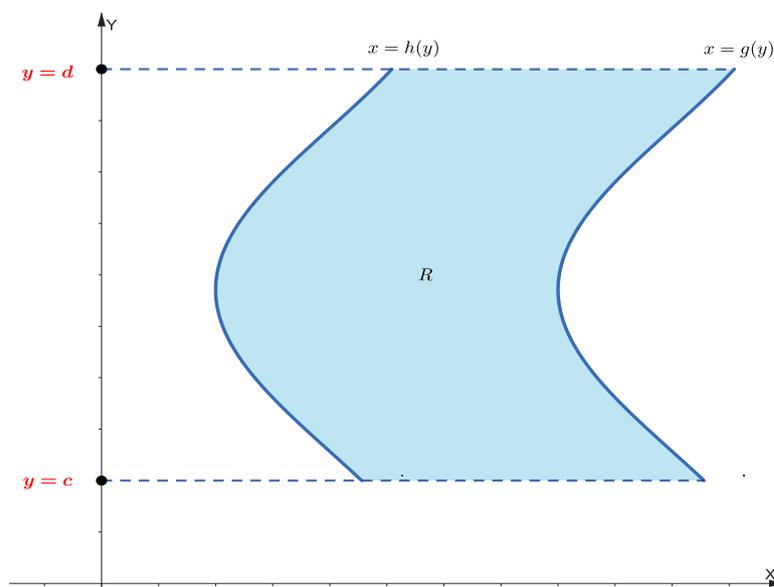


Figura 7 Región Tipo II

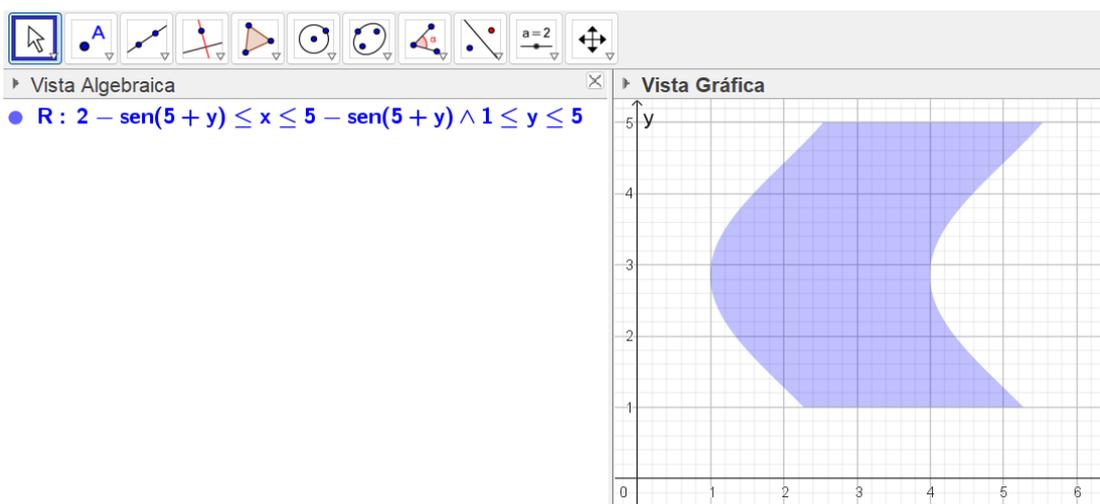


Figura 8. Ingreso de la región tipo II como una inecuación.

Para la parametrización de una región Tipo I se empieza analizando la región en el instante  $t_i$  dentro del intervalo  $[a, b]$ , obteniéndose los vectores posiciones en las curvas en ese instante de tiempo, como se observa en la figura 9. No obstante, lo que se desea no solo son los puntos extremos  $P_1$  y  $P_2$  en la región, sino que también los demás puntos que están entre ellos, por lo que la forma más simple de encontrar estos puntos es mediante un barrido vertical que va de  $P_1$  a  $P_2$ , es decir mediante una ecuación de la recta que describa este barrido vertical, como se muestra en la figura 10.

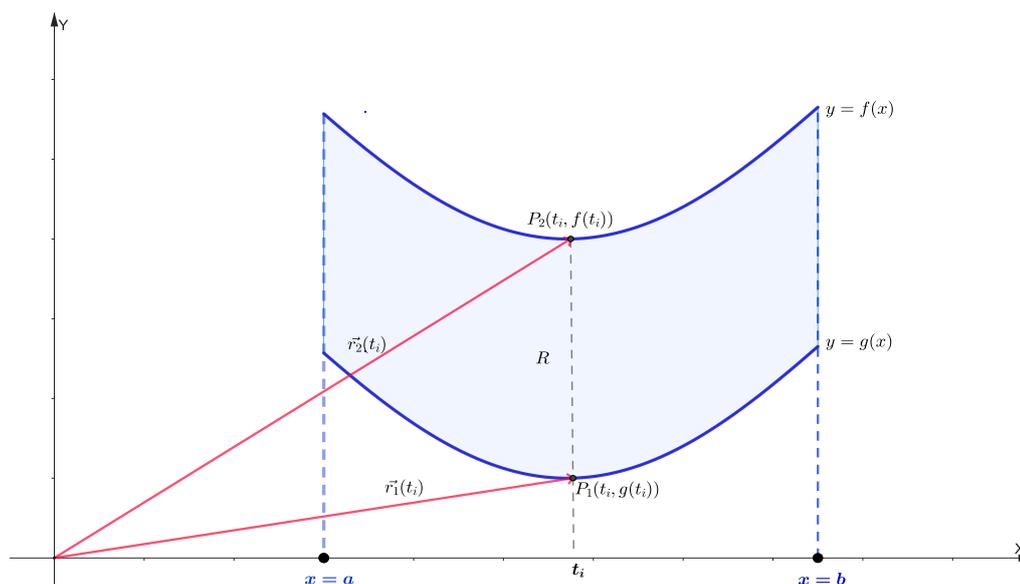


Figura 9. Posición en los extremos de la curva en el instante  $t_i$

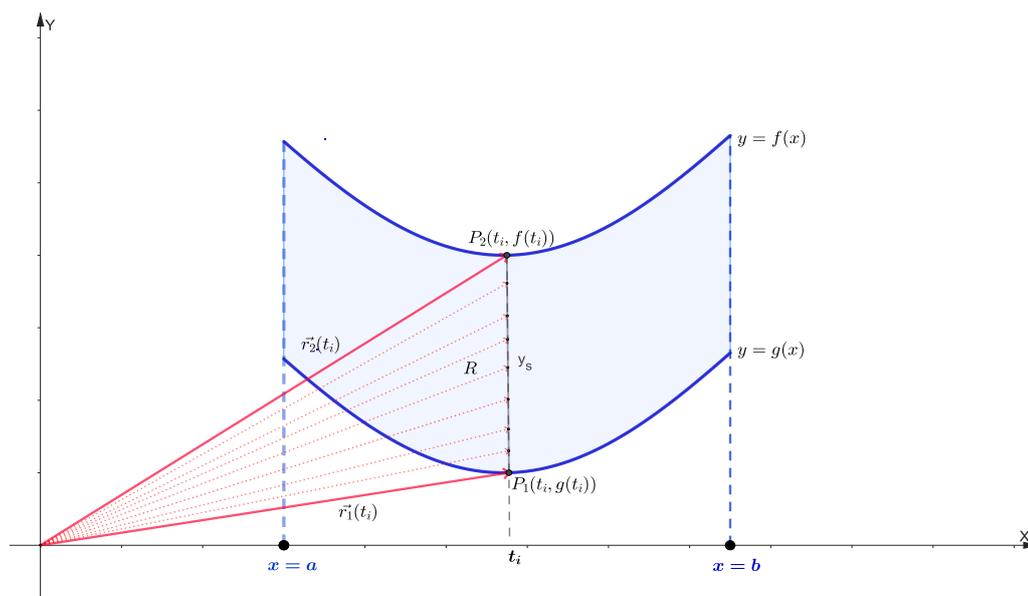


Figura 10. Conjunto de vectores que forman la recta vertical  $y_s$  en la región Tipo I en el instante  $t_i$

De esta manera la ecuación vectorial de la recta  $y_s$  es

$$\vec{y}_s = P_1 + s\vec{d}, \text{ donde } \vec{d} = \overrightarrow{P_1P_2}$$

$$\vec{y}_s = (t_i, g(t_i)) + s((t_i, f(t_i)) - (t_i, g(t_i))) = (t_i, g(t_i)) + s(0, f(t_i) - g(t_i))$$

$$\vec{y}_s = (t_i, g(t_i)) + (0, s(f(t_i) - g(t_i))) = (t_i, g(t_i) + s(f(t_i) - g(t_i)))$$

Debido a que esta recta depende del parámetro  $s$ , esta equivale a un vector posición  $\vec{r}(s)$  que describe a la recta  $y_s$  que va de  $P_1$  a  $P_2$ . Es decir,

$$\vec{r}(s) = (t_i, g(t_i) + s(f(t_i) - g(t_i)))$$

De inmediato se calcularán los valores que toma  $s$ .

$$\text{Si } \vec{r}(s) = (t_i, g(t_i)) \Rightarrow (t_i, g(t_i)) = (t_i, g(t_i) + s(f(t_i) - g(t_i)))$$

$$\Rightarrow t_i = t_i \wedge g(t_i) = g(t_i) + s(f(t_i) - g(t_i))$$

$$\Rightarrow s = \frac{0}{f(t_i) - g(t_i)} = 0, f(t_i) \neq g(t_i)$$

$$\text{Si } \vec{r}(s) = (t_i, f(t_i)) \Rightarrow (t_i, f(t_i)) = (t_i, g(t_i) + s(f(t_i) - g(t_i)))$$

$$\Rightarrow t_i = t_i \wedge f(t_i) = g(t_i) + s(f(t_i) - g(t_i))$$

$$\Rightarrow s = \frac{f(t_i) - g(t_i)}{f(t_i) - g(t_i)} = 1, f(t_i) \neq g(t_i)$$

Por lo tanto, los valores que toma  $s$  están entre 0 y 1, similar a la ecuación (6) es decir:

$$\vec{r}(s) = (t_i, g(t_i) + s(f(t_i) - g(t_i))), \text{ con } 0 \leq s \leq 1 \quad (13)$$

Debido a que  $t_i \in [a, b]$  se puede generalizar la ecuación (13) a cualquier punto de  $t$ , haciendo  $t_i = t$ , logrando de esta manera obtener todas las rectas verticales que van de  $(t, g(t))$  a  $(t, f(t))$ , dando como resultado la ecuación vectorial que describe la superficie, es decir

$$\vec{r}(t, s) = (t, g(t) + s(f(t) - g(t))) ; a \leq t \leq b \wedge 0 \leq s \leq 1 \quad (14)$$

Expresando la ecuación vectorial (14) de forma paramétrica se tiene que,

$$S = \begin{cases} x = t & a \leq t \leq b \\ y = g(t) + s(f(t) - g(t)) & 0 \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (15)$$

El proceso para parametrizar una región de tipo II es similar al de la región tipo I. De esta manera, como se observa en la figura 11, en el instante  $t_i$  se obtiene los vectores posiciones  $\vec{r}_1(t_i)$  y  $\vec{r}_2(t_i)$  en los extremos de la curva. Sin embargo, al igual que en la región tipo I se requiere no solo los puntos extremos  $P_1$  y  $P_2$ , sino también los puntos que están entre ellos, por lo manera más sencilla de encontrar estos puntos es a través de un barrido horizontal, es decir mediante una ecuación de la recta que describa este barrido horizontal.

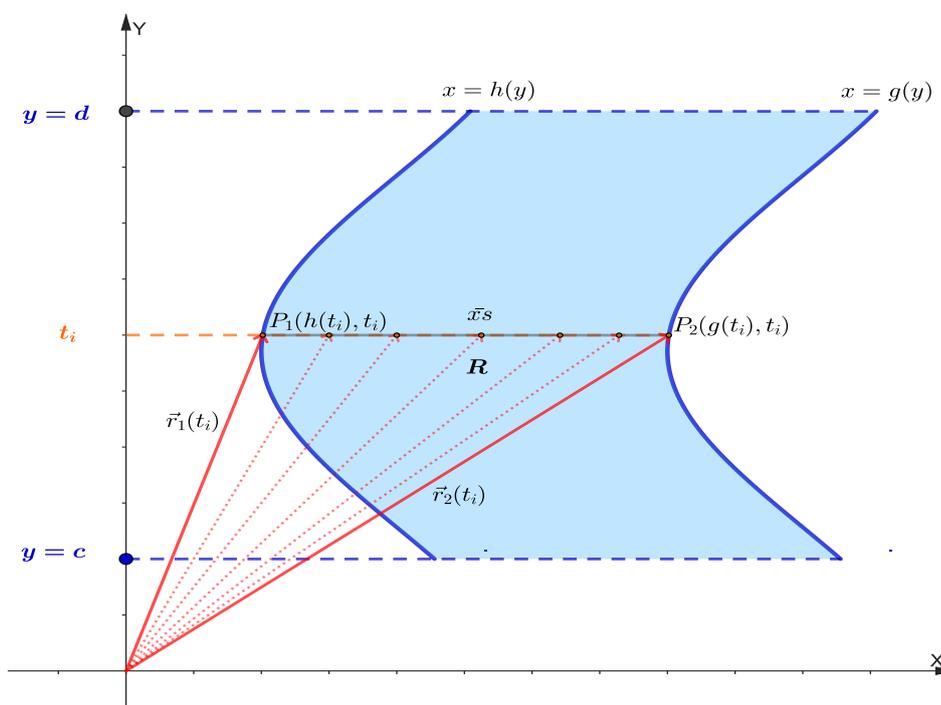


Figura 11. Parametrización Región Tipo II

La ecuación vectorial que describe la recta  $x_s$  es:

$$\vec{x}_s = P_1 + s\vec{d} , \text{ donde } \vec{d} = \overrightarrow{P_1P_2}$$

$$\vec{x}_s = (h(t_i), t_i) + s((g(t_i), t_i) - (h(t_i), t_i)) = (h(t_i), t_i) + s(g(t_i) - h(t_i), 0)$$

$$\vec{x}_s = (h(t_i) + s(g(t_i) - h(t_i)), t_i)$$

Debido a que esta recta depende del parámetro  $s$ , esta equivale a un vector posición  $\vec{r}(s)$  que describe a la recta  $x_s$  que va de  $P_1$  a  $P_2$ . Es decir,

$$\vec{r}(s) = (h(t_i) + s(g(t_i) - h(t_i)), t_i)$$

Ahora se calcularán los valores que toma  $s$ .

$$\text{Si } \vec{r}(s) = (h(t_i), t_i) \Rightarrow (h(t_i), t_i) = (h(t_i) + s(g(t_i) - h(t_i)), t_i)$$

$$\Rightarrow h(t_i) = h(t_i) + s(g(t_i) - h(t_i)) \wedge t_i = t_i$$

$$\Rightarrow s = \frac{0}{g(t_i) - h(t_i)} = 0, g(t_i) \neq h(t_i)$$

$$\text{Si } \vec{r}(s) = (g(t_i), t_i) \Rightarrow (g(t_i), t_i) = (h(t_i) + s(g(t_i) - h(t_i)), t_i)$$

$$\Rightarrow g(t_i) = h(t_i) + s(g(t_i) - h(t_i)) \wedge t_i = t_i$$

$$\Rightarrow s = \frac{g(t_i) - h(t_i)}{g(t_i) - h(t_i)} = 1, g(t_i) \neq h(t_i)$$

En este análisis, los valores que toma  $s$  están entre 0 y 1, similar a las ecuaciones (6) y (13), es decir:

$$\vec{r}(s) = (h(t_i) + s(g(t_i) - h(t_i)), t_i), \text{ con } 0 \leq s \leq 1 \quad (16)$$

Debido a que  $t_i \in [a, b]$  se puede generalizar la ecuación (16) a cualquier punto de  $t$ , expresando  $t_i = t$ , logrando así obtener todas las rectas horizontales que van de  $(h(t), t)$  a  $(g(t), t)$ , obteniendo de esta manera la ecuación vectorial que describe la superficie:

$$\vec{r}(t, s) = (h(t) + s(g(t) - h(t)), t); \text{ donde } a \leq t \leq b \wedge 0 \leq s \leq 1 \quad (17)$$

La ecuación vectorial (17) se la puede representar de forma paramétrica como se muestra a continuación,

$$S = \begin{cases} x = h(t) + s(g(t) - h(t)) & c \leq t \leq d \\ y = t & 0 \leq s \leq 1 \end{cases}, \quad (18)$$

## 5. Parametrización de superficies en el espacio

En este apartado se representarán superficies en el espacio mediante un conjunto de ecuaciones vectoriales y paramétricas.

De acuerdo a Swokowski (1996), una región de Tipo I en el plano XY puede ser representada en el espacio tridimensional, a través de un registro algebraico de la siguiente manera:

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x) \wedge z = 0\} \quad (19)$$

A partir de la ecuación (14) y (19) esta región puede ser expresada de la forma vectorial paramétrica como se indica a continuación:

$$\vec{r}(t, s) = t\hat{i} + [g(t) + s(f(t) - g(t))]\hat{j} + 0\hat{k}, \text{ con } a \leq t \leq b \wedge 0 \leq s \leq 1 \quad (20)$$

Por lo que superficie paramétrica queda definida como:

$$S = \begin{cases} x(t, s) = t, & a \leq t \leq b \\ y(t, s) = g(t) + s(f(t) - g(t)), & 0 \leq s \leq 1 \\ z(t, s) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Esta superficie parametrizada de una región tipo I en el espacio se puede apreciar en la figura 12.

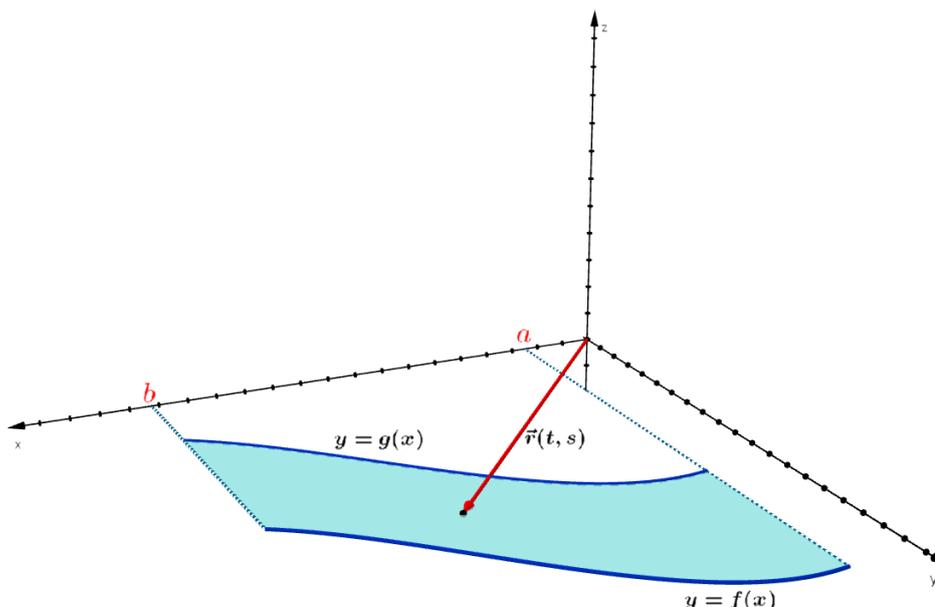


Figura 12. Parametrización de una región tipo I en el espacio.

También se puede parametrizar una región paralela al plano XY, desplazando a la región  $c$  unidades en el eje  $z$  (figura 13), por lo que el vector de superficie paramétrica queda expresado de la forma siguiente:

$$\vec{r}(t, s) = t\hat{i} + [g(t) + s(f(t) - g(t))]\hat{j} + c\hat{k} \quad (22)$$

Expresando a la ecuación vectorial (22) en forma paramétrica se obtiene lo siguiente,

$$\begin{cases} x(t, s) = t, & a \leq t \leq b \\ y(t, s) = g(t) + s(f(t) - g(t)), & 0 \leq s \leq 1 \\ z(t, s) = c & \forall c \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (23)$$

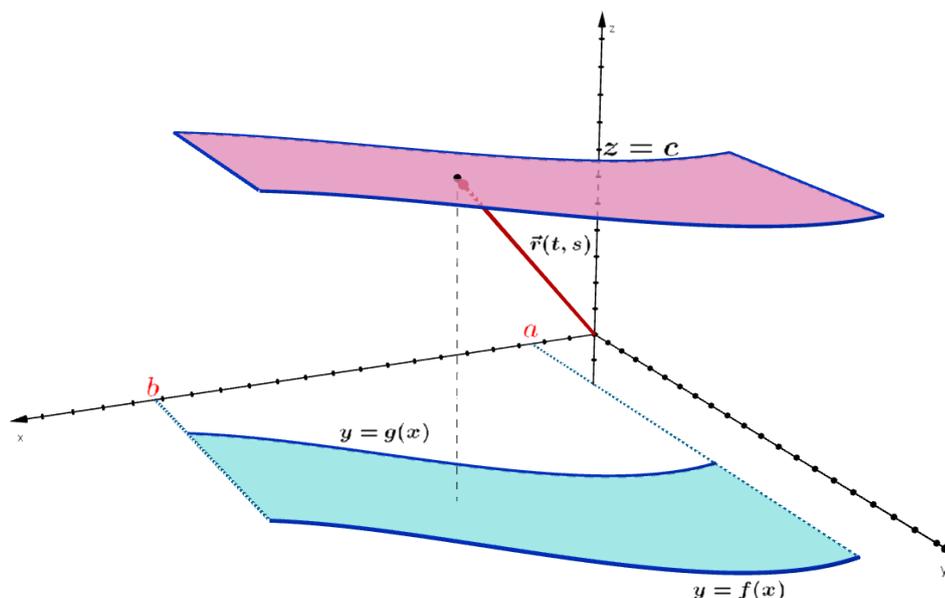


Figura 13. Parametrización de una región tipo I en el espacio desplazada  $c$  unidades en  $z$ .

En GeoGebra con el comando *Superficie*(*<Expresión>*, *<Expresión>*, *<Expresión>*, *<Parámetro 1>*, *<Valor inicial>*, *<Valor final>*, *<Parámetro 2>*, *<Valor inicial>*, *<Valor final>*) se puede insertar una superficie parametrizada. Por ejemplo, si se desea parametrizar la superficie  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x \leq 3 \wedge -(x - 2)^2 + 1.5 \leq y \leq (x - 2)^2 + 3.5 \wedge z = 2\}$ , se declararán las funciones en GeoGebra como  $g(x) = -(x - 2)^2 + 1.5$  y  $f(x) = (x - 2)^2 + 3.5$ , luego se utilizará el comando de superficie recientemente descrito y la ecuación la ecuación (23), lo que dará como resultado la figura 14 que se muestra a continuación,

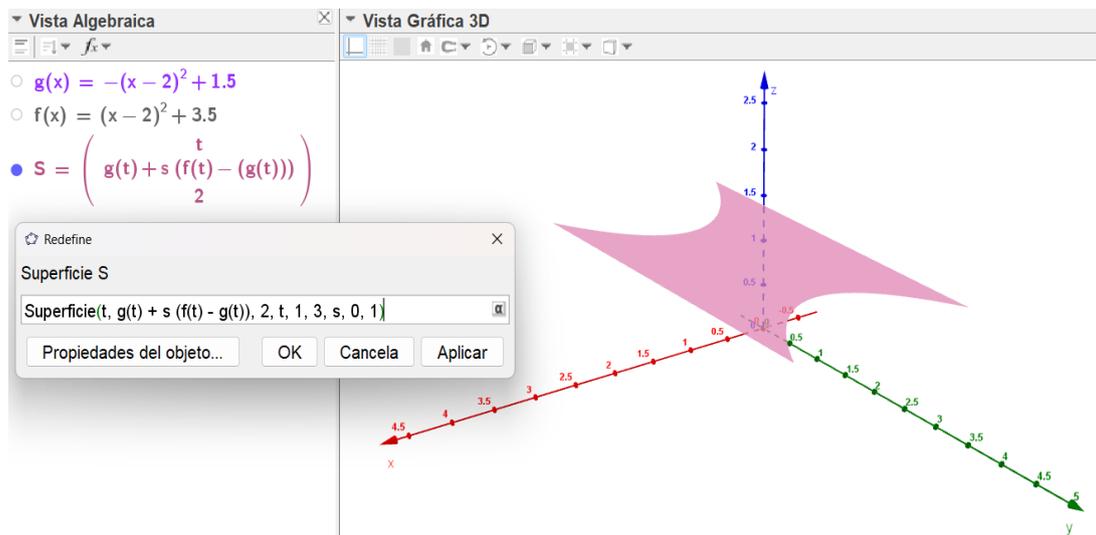


Figura 14. Ingreso de una superficie paramétrica en GeoGebra

Definir una región de tipo II en el espacio es similar a como se definió una región tipo I en el espacio tridimensional, de esta manera la región tipo II en el espacio quedará expresada algebraicamente de la siguiente forma:

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq y \leq d \wedge h(y) \leq x \leq g(y) \wedge z = 0\} \quad (24)$$

A partir de la ecuación (18) y (24), la forma vectorial paramétrica de esta superficie es:

$$\vec{r}(t, s) = [h(t) + s(g(t) - h(t))]\hat{i} + t\hat{j} + 0\hat{k} \quad (25)$$

Y su forma paramétrica sería

$$S = \begin{cases} x(t, s) = h(t) + s(g(t) - h(t)) & 0 \leq s \leq 1 \\ y(t, s) = t & c \leq t \leq d \\ z(t, s) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Tal superficie parametrizada de la región tipo II en el espacio se puede apreciar en la figura 15.

No obstante, si se desea una región de tipo II paralela al plano XY, simplemente se trasladaría  $n$  unidades en  $z$ , quedando vectorialmente la superficie de la siguiente manera

$$\vec{r}(t, s) = [h(t) + s(g(t) - h(t))]\hat{i} + t\hat{j} + n\hat{k} \quad (27)$$

Por lo que la superficie quedaría parametrizada de esta forma:

$$S = \begin{cases} x(t,s) = h(t) + s(g(t) - h(t))t, & 0 \leq s \leq 1 \\ y(t,s) = t, & c \leq t \leq d \\ z(t,s) = n, & \forall n \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (28)$$

Esta parametrización se puede apreciar en la figura 16

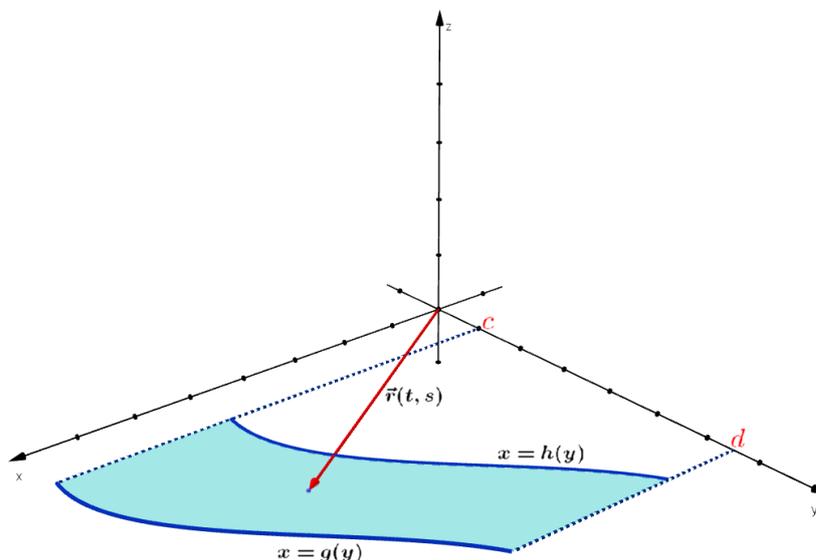


Figura 15. Parametrización de una región tipo II en el espacio.

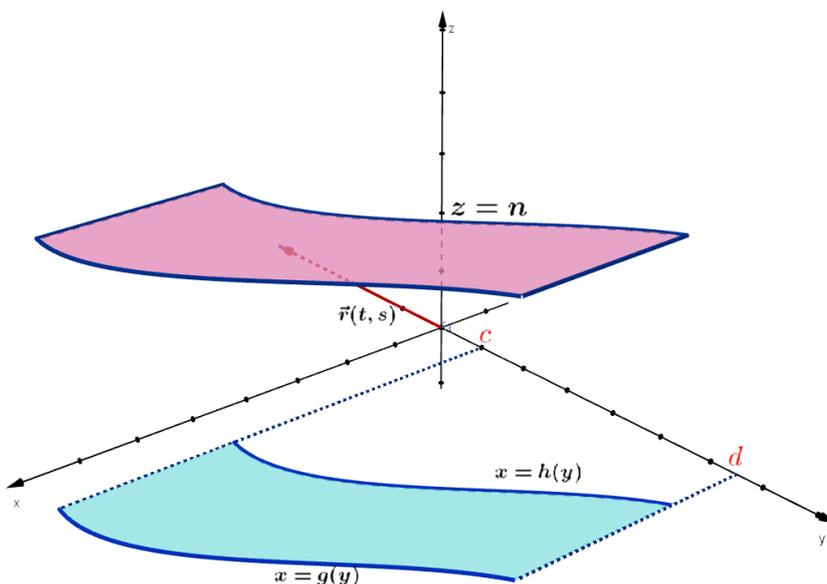


Figura 16. Parametrización de una región tipo II en el espacio desplazada  $n$  unidades en  $z$ .

## 6. Parametrización de una superficie de una función de dos variables

Si se tiene una función  $F: R \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  definida en una región cerrada y acotada del plano  $XY$  ya sea del Tipo I o del Tipo II, entonces se podrá parametrizar esta superficie sobre dicha región.

Si la función  $z = F(x, y)$  que describe una superficie en el espacio está definida sobre una región de tipo I como se muestra en la figura 17, esta puede ser parametrizada utilizando la ecuación (15), es decir:

$$S = \begin{cases} x(t, s) = t & a \leq t \leq b \\ y(t, s) = g(t) + s(f(t) - g(t)), & 0 \leq s \leq 1 \\ z(t, s) = F(x(t, s), y(t, s)) = F(t, g(t) + s(f(t) - g(t))) \end{cases} \quad (29)$$

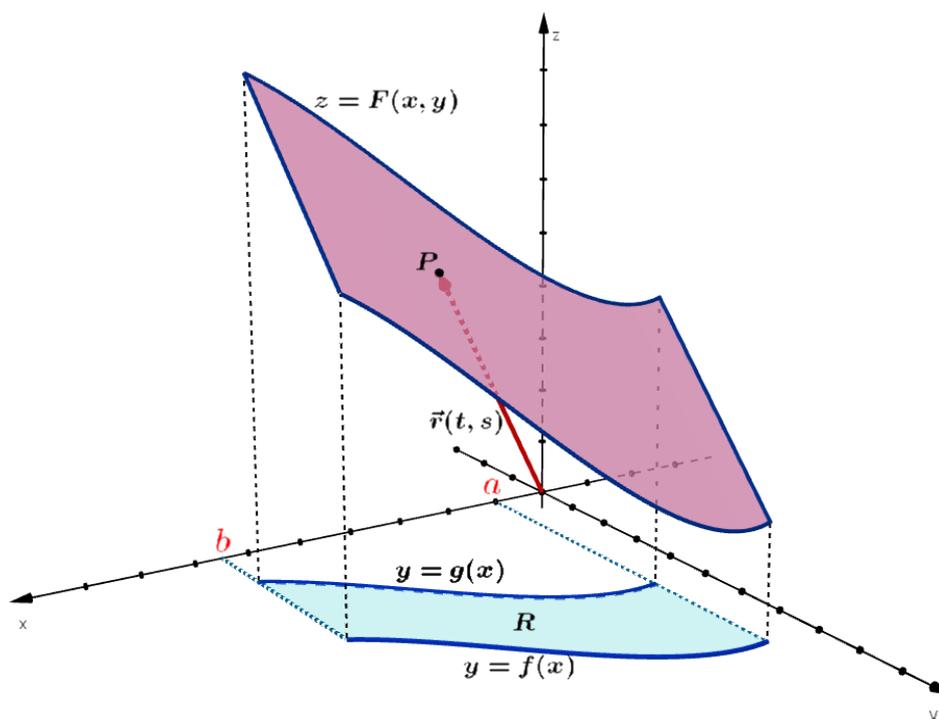


Figura 17. Parametrización de una superficie  $z = F(x, y)$  sobre una región Tipo I.

Si se desea representar la superficie de la forma vectorial paramétrica, esta quedaría de la siguiente manera:

$$\vec{r}(t, s) = x(t, s)\hat{i} + y(t, s)\hat{j} + z(t, s)\hat{k} \quad (30)$$

La ecuación (29) que describe esta superficie coincide con lo planteado por Hartman (2018) en su libro "APEX CALCULUS" sobre parametrización de superficies. En este libro el autor indica que si se determina  $x$  e  $y$  en términos de los parámetros  $t$  y  $s$ , entonces  $z$  se parametriza directamente como  $z = F(x(t, s), y(t, s))$ .

Lo mismo ocurre cuando se desea parametrizar una superficie  $z = F(x, y)$  sobre una región de tipo II (figura 18), tal superficie con la ayuda de la ecuación (18) quedaría expresada como:

$$S = \begin{cases} x(t, s) = h(t) + s(g(t) - h(t)) & 0 \leq s \leq 1 \\ y(t, s) = t, & c \leq t \leq d \\ z(t, s) = F(x(t, s), y(t, s)) = F(h(t) + s(g(t) - h(t)), t) \end{cases} \quad (31)$$

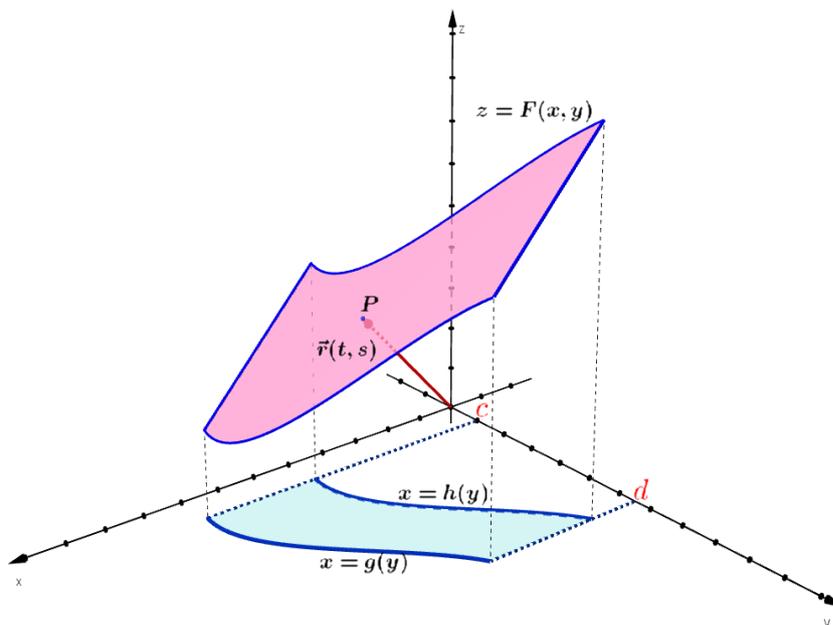


Figura 18. Parametrización de una superficie  $z=F(x,y)$  sobre una región Tipo II.

También se puede parametrizar una pared que va desde una curva definida por una función  $y = g(x)$  en  $[a, b]$ , hasta una superficie  $z = F(x, y)$  definida en esa curva y en dicho intervalo, como se muestra en la figura 19

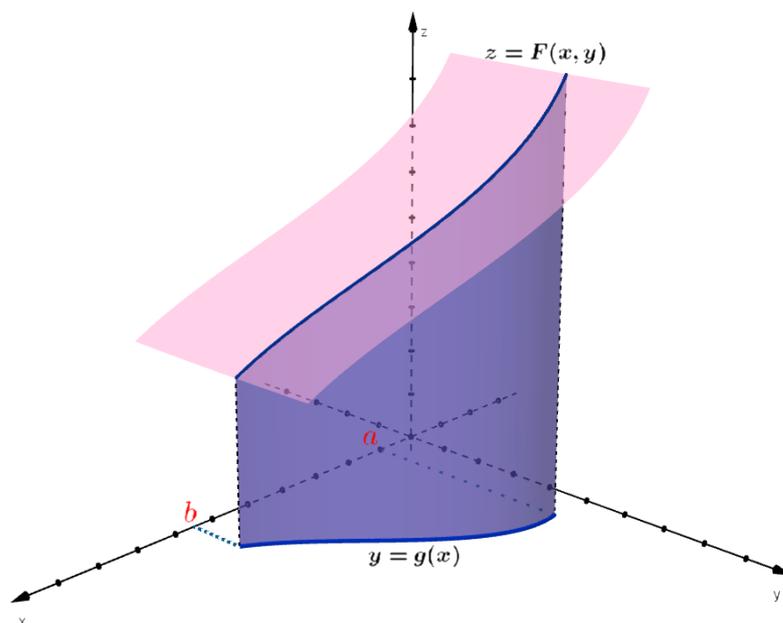


Figura 19 Parametrización de una pared entre dos curvas.

En un instante  $t_i$  se desea un barrido vertical en  $z$  que vaya de  $P_1$  a  $P_2$  como se muestra en la figura 20, es decir se necesita definir una recta  $z_s$  que vaya de  $P_1$  a  $P_2$ . Esta recta define a continuación de manera vectorial

$$\vec{z}_s = P_1 + s\vec{d} = (t_i, g(t_i), 0) + s \left( (t_i, g(t_i), F(t_i, g(t_i))) - (t_i, g(t_i), 0) \right)$$

$$\vec{z}_s = (t_i, g(t_i), 0) + s (0, 0, F(t_i, g(t_i))) = (t_i, g(t_i), sF(t_i, g(t_i)))$$

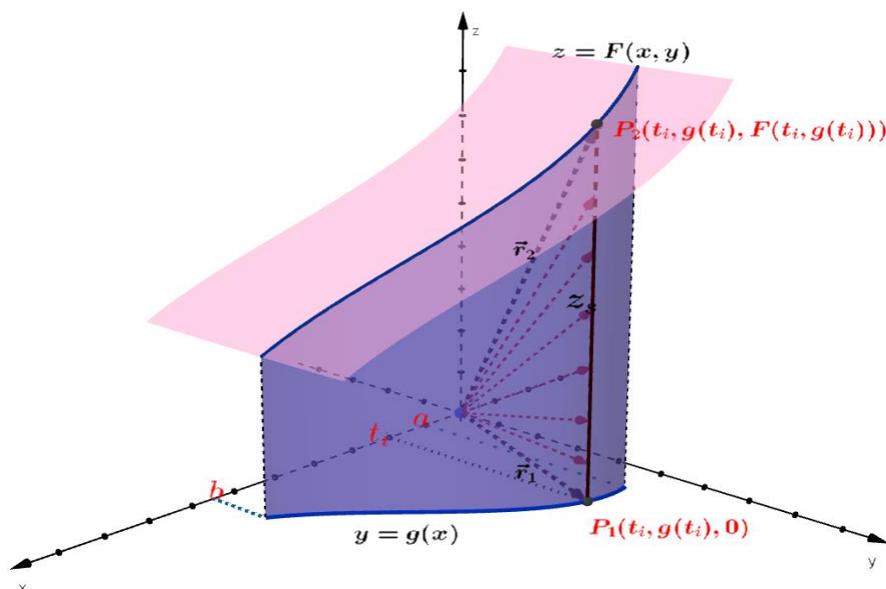


Figura 20 Vectores que describen la recta  $z_s$ .

$$\begin{aligned} \text{Si } \vec{r}(s) &= (t_i, g(t_i), 0) \Rightarrow (t_i, g(t_i), 0) = (t_i, g(t_i), sF(t_i, g(t_i))) \\ &\Rightarrow t_i = t_i \wedge g(t_i) = g(t_i) \wedge 0 = sF(t_i, g(t_i)) \\ &\Rightarrow s = \frac{0}{F(t_i, g(t_i))} = 0, F(t_i, g(t_i)) \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \vec{r}(s) &= (t_i, g(t_i), F(t_i, g(t_i))) \\ &\Rightarrow (t_i, g(t_i), F(t_i, g(t_i))) = (t_i, g(t_i), sF(t_i, g(t_i))) \\ &\Rightarrow t_i = t_i \wedge g(t_i) = g(t_i) \wedge F(t_i, g(t_i)) = sF(t_i, g(t_i)) \\ & \quad s = \frac{F(t_i, g(t_i))}{F(t_i, g(t_i))} = 1, F(t_i, g(t_i)) \neq 0 \end{aligned}$$

De esta manera se tiene que,

$$\vec{r}(s) = ((t_i, g(t_i)), sF(t_i, g(t_i))), \text{ con } 0 \leq s \leq 1 \quad (32)$$

Se generalizará la ecuación (32) para cualquier valor de  $t$  haciendo  $t_i = t, \forall t \in [a, b]$ . Obteniendo de esta manera cualquier barrido vertical en  $z$  sobre la superficie

$$\vec{r}(t, s) = ((t, g(t)), sF(t, g(t))), a \leq t \leq b \wedge 0 \leq s \leq 1 \quad (33)$$

Expresando de forma paramétrica:

$$S = \begin{cases} x(t, s) = t & a \leq t \leq b \\ y(t, s) = g(t), & 0 \leq s \leq 1 \\ z(t, s) = sF(t, g(t)) \end{cases} \quad (34)$$

Un análisis similar se realiza si la pared fuera sobre una curva  $x=g(y)$  en un intervalo  $[c, d]$  sobre la cual la función  $z = F(x, y)$  está definida.

Para llevar a cabo la fundamentación de la parametrización de regiones planas y superficies en el espacio, utilizando GeoGebra dentro del aula, es necesario emplear un enfoque que integre teoría matemática y herramientas tecnológicas. Se comienza introduciendo los conceptos básicos de la parametrización y la teoría de registros de representaciones de Raymond Duval, que destaca la importancia de transitar entre diferentes representaciones (gráfica, algebraica, numérica) para lograr una comprensión profunda.

GeoGebra se emplea como herramienta didáctica, permitiendo a los estudiantes visualizar y manipular superficies y curvas en tiempo real. Se les guía en la construcción de superficies paramétricas, lo que refuerza la conexión entre la forma algebraica y su representación gráfica. Las actividades prácticas incluyen ejercicios de parametrización y proyectos colaborativos, promoviendo el aprendizaje activo.

Los efectos deseados abarcan una mejora en la comprensión conceptual, el desarrollo de habilidades técnicas, el fomento del pensamiento crítico y un aumento en la motivación y participación de los estudiantes, logrando así un aprendizaje significativo y duradero.

## 7. Conclusiones

Las deducciones de las fórmulas presentadas en este artículo posibilitan la representación gráfica de un amplio espectro de superficies parametrizadas en coordenadas cartesianas, tanto en dos como en tres dimensiones, que pueden ser comprobadas gráficamente en el software GeoGebra. Este enfoque sienta las bases para que el lector pueda profundizar en el estudio de parametrizaciones no solo en el sistema de coordenadas cartesianas, sino también en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.

Además, la visualización de estas superficies en GeoGebra facilita una comprensión más clara e intuitiva de todos estos conceptos relacionados con las superficies paramétricas. Por tanto, se sugiere la implementación del software GeoGebra en la enseñanza de este objetivo matemático, tomando como referencia la teoría de registros de representaciones semióticas de Raymond Duval.

## Referencias bibliográficas

- Andrade, C. y de los Ángeles, M. y Jaramillo, L. y Leonardo, M. y Caraguay, M. y Cecibel, G. y Ordóñez, E. y Armando, W. (2020). Las Tics como herramienta metodológica en matemática. *Revista Espacios*, 41(11), 7. <https://revistaespacios.com/a20v41n11/a20v41n11p07.pdf>
- Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103–131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Hartman, G. (2018). APEX Calculus. Community College Consortium for Open Educational Resources. [https://open.umn.edu/opentextbooks/textbooks/apex\\_calculus](https://open.umn.edu/opentextbooks/textbooks/apex_calculus)

Larson, R. y Edwards, B. H. (2010). Cálculo 2 de varias variables (P. Roig & A. L. Delgado, Eds.; Novena Edición). Mc Graw Hill.

Padayachee, P. y Khemane, T. (2023). Unlocking complex Vector Calculus concepts for engineering students using GeoGebra. SEFI 2023 - 51st Annual Conference of the European Society for Engineering Education: Engineering Education for Sustainability, Proceedings, 2687–2703.  
<https://doi.org/10.21427/WDYR-9P35>

Swokowski, E. W. (1996). Cálculo con Geometría Analítica (2a ed.). International Thomson Editores.

Thomas, G. B. y Weir, M. D. y Hass, J. (2010). Cálculo de Varias Variables (12a ed.). Pearson.

**Marco Antonio Ayala Chauvin:** Magister en Educación Matemática, Docente de la Maestría de Educación mención Enseñanza de la Matemática de la Universidad Técnica Particular de Loja-Ecuador en el componente: Didáctica del Cálculo y Análisis Geométrico y trigonométrico. Docente a nivel de pregrado de la UTPL en las materias de cálculo.

[maayala5@utpl.edu.ec](mailto:maayala5@utpl.edu.ec)

<https://orcid.org/0000-0002-0084-6773>

**Richard Leonardo Luna Romero:** Magister en Educación Mención Enseñanza de la Matemática, Docente del Ministerio de Educación del Ecuador en las asignaturas de Física y Matemática a nivel de Bachillerato. Promotor pedagógico en el área de Matemática y Lengua y literatura en los subniveles de elemental, básica media y básica superior.

[rluna@utpl.edu.ec](mailto:rluna@utpl.edu.ec)

<https://orcid.org/0009-0008-8832-7898>

**Jennifer Valeria Quezada Guajala:** Ingeniera en Electrónica y Telecomunicaciones. Magíster en Educación Mención Enseñanza de la Matemática en la Universidad Técnica Particular de Loja. Se desempeña como funcionaria de Fractalía para la empresa Telefónica sección Ecuador.

[jvquezada4@utpl.edu.ec](mailto:jvquezada4@utpl.edu.ec)

<https://orcid.org/0009-0007-3718-6485>