UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 71. Agosto 2024
Páginas 1-6

Problemas de divisibilidad creados en un diálogo de profesores en formación

Uldarico Malaspina

Resumen	Se presenta problemas de divisibilidad creados mediante un diálogo entre dos profesores de primaria en formación. Al examinar el diálogo, se evidencian las fases del proceso de creación de problemas de matemáticas. Se parte de una situación extra-matemática y se crean tres problemas por elaboración, siendo el tercero de contexto intra-matemático y cuya solución permite ilustrar la importancia del contraejemplo. **Palabras clave:** divisibilidad; creación de problemas; proposiciones condicionales; generalización; contraejemplo.
Abstract	Divisibility problems posed through a dialogue between two pre-service teachers are presented. By examining the dialogue, the phases of the process of posing mathematical problems become evident. The starting point is an extra-mathematical situation and three problems are posed by elaboration, the third of which has an intra-mathematical context and whose solution illustrates the importance of the counterexample. **Keywords:** divisibility; problem posing; conditional propositions; generalization; counterexample.
Resumo	Apresenta-se problemas de divisibilidade criados por meio de um diálogo entre dois professores do ensino fundamental em início de carreira. Ao examinar o diálogo, as fases do processo de criação de problemas matemáticos se tornam evidentes. O ponto de partida é uma situação extra-matemática e três problemas são criados por elaboração, sendo que o terceiro tem um contexto intra-matemático e cuja solução ilustra a importância do contra-exemplo. **Palavras-chave:** divisibilidade; criação de problemas; proposições condicionais; generalização; contraexemplo.

1. Problema

Examinar si es verdad que todo número natural divisible por 6 es también divisible por 4.

El problema tiene su origen en las actividades de creación de problemas con profesores de primaria en formación. Lo presentaré en un contexto de diálogo entre dos de estos estudiantes, creando problemas a partir de una situación dada, como una forma de mostrar "informalmente" un proceso detallado de creación de problemas, en el que se pueden identificar las fases de *indagación, propuesta, resolución y refinamiento,* que ya he considerado en otras ocasiones.

Claudia y Juan desean crear problemas relacionados con divisibilidad de números naturales, resolverlos y reflexionar sobre ellos, a partir de la siguiente situación concreta:

Situación

La profesora María trabaja con sus estudiantes formando grupos colaborativos que tienen el mismo número de integrantes. Algunas veces forma grupos de 6 y otras, grupos de 4. En ambos casos, ningún estudiante se queda sin grupo.

Algunas ideas que surgieron:

- Determinar el número de estudiantes que tiene la profesora María.
- Hacer una pregunta de carácter general, a partir de la situación particular.

Claudia y Juan examinan las ideas:

Claudia: Según lo dicho en la situación, la profesora María tiene 24 estudiantes.

Juan: ¿Por qué afirmas eso…? También podría tener 36 estudiantes.

Claudia: ¡Es verdad…! Entonces, no se puede saber cuántos estudiantes tiene María… También podría tener 12…

Juan: ¿Qué tal si eso lo ponemos como problema?

Claudia: ¿Cómo?

Juan: Así:

Problema 1:

La profesora María trabaja con sus estudiantes formando grupos colaborativos que tienen el mismo número de integrantes. Algunas veces forma grupos de 6 y otras, grupos de 4. En ambos casos, ningún estudiante se queda sin grupo. ¿Es posible saber con certeza cuántos estudiantes tiene María?

Claudia: Me parece muy bien. Para responder a la pregunta se debería encontrar que hay varias posibilidades, como 12, 24 y 36; y, en consecuencia, que la respuesta es NO.

Otra posibilidad es que consideremos que María tiene 36 estudiantes y agreguemos alguna información más a la situación para que el requerimiento del problema sea determinar este número, como única posibilidad.

Juan: Ese sería otro problema y también está interesante. Podríamos agregar como información que cuando María forma grupos de 4 estudiantes, resultan 9 grupos.

Claudia: Sí … pero eso ya sería muy directo. Yo diría que ya no se tendría un problema, pues bastaría multiplicar 4 por 9; además, ya resultaría innecesaria la información que no quedan estudiantes sin grupo al formar grupos de 6.

Juan: Tienes razón. Entonces podríamos agregar que tampoco quedan estudiantes sin grupo, si se forman grupos de 9.

Claudia: ¡Buena idea Juan! Pero… con esa información adicional ¿la única posibilidad es 36…?

Juan: Mmm… Me parece que sí…

Claudia: Yo creo que no… ¿Y el 72?

Juan: A ver… 72 es divisible por 9; también es divisible por 4; y… también es divisible por 6. Entonces, 36 no es la única posibilidad. Aunque sería muy raro un salón de clase con 72 estudiantes.

Claudia: Es verdad, pero desde el punto de vista matemático, cabe esa posibilidad y creo que muchas otras más… Bueno, pero podemos decir, por ejemplo, que María tiene menos de 50 estudiantes y así se arregla el asunto.

Juan: ¡Claro! Entonces el problema quedaría así:

Problema 2.

La profesora María tiene menos de 50 estudiantes y trabaja con ellos formando grupos colaborativos que tienen el mismo número de integrantes. Algunas veces forma grupos de 6; otras, grupos de 4; y otras, grupos de 9. En los tres casos, ningún estudiante se queda sin grupo. ¿Es posible saber con certeza cuántos estudiantes tiene María?

Claudia: Ya tenemos dos problemas.

Juan: Sí, pero quizás algunos estudiantes tengan dificultades para resolverlos. Deberíamos pensar en algunos problemas que ayuden a entender y resolver los problemas que hemos creado.

Claudia: Sí, por ejemplo, para el problema 1, pedirles que escriban un conjunto de números que son divisibles por 6 y otro conjunto de números que son divisibles por 4 y que examinen si hay algunos números que están en ambos conjuntos.

Juan: Se les podría pedir que representen sus conjuntos usando diagramas de Venn.

Claudia: Para el problema 2, se les pediría, además, que tengan en cuenta que los números deben ser menores que 50 y que representen un tercer conjunto, el de los divisibles por 9.

Juan: Creo tenemos suficientes problemas con la primera idea. ¿Qué problema o problemas podemos crear con la idea de usar la situación dada para hacer una pregunta general?

Claudia: Podríamos preguntar si siempre que un profesor o profesora forme con sus estudiantes grupos de 6 y no quede estudiante alguno sin grupo, también podrá formar grupos de 4, sin que quede estudiante alguno sin grupo.

Juan: A ver…Si son 36 estudiantes, sí se puede… Si son 24, también…pero si son 30 no se puede porque se tendría 5 grupos de 6, pero 7 grupos de 4 y quedarían 2 estudiantes sin grupo.

Claudia: ¡Excelente! Entonces ya podemos proponer un tercer problema, con una pregunta de carácter más general:

Problema 3:

Examinar si es verdad que todo número natural divisible por 6 es también divisible por 4.

2. Comentarios y reflexiones

La situación presentada sugiere elaborar problemas sobre divisibilidad, pues – por ejemplo – al formar grupos de 6 estudiantes y no quedarse estudiante alguno sin grupo, se trata de un número de estudiantes divisible entre 6 y eso es lo que usan Claudia y Juan para indagar la situación y proponer sus problemas.

En el diálogo se percibe el proceso de creación de cada problema y las fases de estos procesos: *indagación, propuesta, resolución y refinamiento*. Se ve claramente cómo la resolución – o intentos de resolución – de lo que se va creando a partir de indagaciones, influye en el refinamiento de una propuesta inicial, hasta llegar a una versión que se considera adecuada. Las fases en los procesos de creación de problemas fueron consideradas en Malaspina (2023) y explicadas en detalle en la conferencia invitada, que diserté recientemente en el 15th International Congress on Mathematics Education (ICME 15), en Sydney, Australia.[1]

En el diálogo de los profesores en formación, se percibe también su preocupación por crear problemas que faciliten la solución de los problemas creados, los que en mi enfoque denomino problemas-pre (Malaspina et al., 2015). Más aún, el diálogo refleja también aspectos emocionales que están presentes en todo proceso creativo. Es importante que los profesores sean conscientes de sus emociones al crear problemas, pues eso favorecerá a que perciban mejor las emociones de sus estudiantes cuando ellos creen problemas o cuando él o ella cree problemas con sus estudiantes y contribuirá a que pueda aprovecharlas adecuadamente para potenciar sus aprendizajes matemáticos.

Los problemas 1 y 2 son de contexto extra-matemático y mantienen el contexto de la situación presentada. El problema 3, considerando su origen, tiene especial riqueza, tanto en el aspecto matemático como didáctico, pues es un problema de contexto intra-matemático, creado por elaboración, a partir de una situación de contexto extra-matemático. Más aún, su carácter general se ha propuesto a partir de una situación particular.

Es importante identificar los elementos de los problemas (Malaspina, 2018; Malaspina et al., 2015). Conocer la *información, el requerimiento, el contexto y el entorno matemático* de un problema, facilita la creación de nuevos problemas por variación, al modificar alguno(s) de estos elementos. Como ya comenté en el párrafo anterior, examinando el problema 3, vemos que su contexto es intra-matemático; es claro que su requerimiento es analizar la verdad de la afirmación "todo número natural divisible por 6 es también divisible por 4"; y su entorno matemático es la divisibilidad de números naturales. ¿Y su información? ¿No hay información? Podemos decir que la información está implícita en el problema, y está formada por el conocimiento de lo que significa que un número natural es divisible por 6 y de lo que significa que un número natural es divisible por 4. Sin esta información, no se puede resolver el problema.

Otra forma de enunciar el problema 3 sería:

Problema 3':

Examinar si la siguiente proposición es verdadera: si un número natural es divisible por 6, entonces es divisible por 4.

Ciertamente, el uso de diagramas de Venn para representar al conjunto de números naturales divisibles por 6 y al conjunto de números naturales divisibles por 4, es muy ilustrativo en la solución de los problemas 3 y 3' y permiten evidenciar la importancia del contraejemplo para demostrar la falsedad de una proposición de la forma "si *p entonces q*". En este caso, basta mostrar, por ejemplo, que 30 es un número natural divisible por 6 que no es divisible por 4. Más aún, la proposición

[1] En este congreso, de carácter mundial, uno de los temas a los que se le prestó atención fue precisamente la creación de problemas ("problem posing", en inglés).

recíproca correspondiente a la del problema 3’ (*si un número natural es divisible por 4, entonces es divisible por 6*), tampoco es verdadera, pues, por ejemplo, el número 20 es un contraejemplo.

Con estas reflexiones concluyo *El Rincón de Problemas* de este número de *UNIÓN* y, como en los números anteriores, invito a los lectores a *El Rincón Intercreativo*, de este número.

A continuación, dejo algunas preguntas que podrían ser usadas para escribirme algo que se publicaría en *El Rincón Intercreativo* del próximo número:

i) ¿Qué otros problemas parecidos a los problemas 1, 2 y 3 propondrías para que, al resolverlos, tus estudiantes refuercen sus conocimientos sobre divisibilidad?

ii) ¿Cómo reformularías los problemas sobre números naturales en los que se usa la expresión “divisible por…”, usando la expresión “múltiplo de…”?

iii) La proposición TODO NÚMERO NATURAL DIVISIBLE POR 4 ES TAMBIÉN DIVISIBLE POR 2, es similar a la que está en el problema 3, pero es verdadera. ¿Cómo se ilustraría esa veracidad? ¿Cómo se demostraría esa veracidad?

iv) ¿Podrías contarnos una experiencia con estudiantes, relacionada con una proposición del tipo “todo A es B”, sin que necesariamente sea de matemáticas, en la que un contraejemplo demuestra su falsedad?

Agradezco los comentarios y propuestas que me hicieron llegar, relacionados con el problema del número anterior de *UNIÓN* y los invito a leerlos en este número. También reitero mi exhortación amigable a que me hagan llegar sus comentarios, propuestas o experiencias, a partir de reflexiones de carácter didáctico o matemático, que se originen en la situación, en los problemas o en las soluciones expuestos en este número, o en alguna(s) de las preguntas que anoté. Nos dará mucho gusto publicar y comentar lo que me escriban, en el próximo número de *UNIÓN*, como lo estoy haciendo en este número, con lo que me han enviado.

Bibliografía

Malaspina U. (2018). ¿Cómo crear problemas de matemáticas? Experiencias didácticas con profesores en formación. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 14(52).* https://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/362

Malaspina, U. (2023). Matemáticas y realidad en la formación de docentes. In P. Scott, Y. Morales, & A. Ruíz (Eds.). Educación Matemática en las Américas 2023. Trabajos invitados de la XVI CIAEM, 14-22. https://ciaem-iacme.org/wp-content/uploads/2023/12/2023-Volumen1-Invitados.pdf

Malaspina, U., Mallart, A., & Font. V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Charles University in Prague, Faculty of Education; ERME, Prague, Czech Republic. pp.2861-2866.

ULDARICO MALASPINA JURADO. Doctor en Ciencias, Profesor Emérito de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP); Director Fundador del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas en la PUCP (IREM-PUCP);Director Fundador de la revista Pro-Mathematica del Departamento de Ciencias de la PUCP; Presidente de la Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana; Académico de Número de la Academia Nacional de Ciencias del Perú; Premiado por el Estado Peruano con las Palmas Magisteriales en el grado de Amauta (el más alto); Profesor Honorario de la Universidad Nacional de Tumbes; Doctor Honoris Causa por la Universidad Nacional de Huancavelica. umalasp@pucp.edu.pe