UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 72. Año 2024
Páginas 1-6

Explorando reparticiones, divisiones y residuos a partir del resultado de un juego con canicas

Uldarico Malaspina

Resumen	Se presenta un problema trabajado en un taller con profesores de primaria, que tiene como entorno matemático la división de números naturales, cuya solución requiere usar una propiedad relacionada con el residuo; se muestra una estrecha vinculación con el concepto de múltiplo de un número natural y se evidencia la importancia de examinar cuidadosamente la información que se da en los problemas, para no dar respuestas aparentemente correctas. *Palabras clave*: división de números naturales; residuo; múltiplos de un número natural; resolución y creación de problemas.
Abstract	A problem worked in a workshop with elementary school teachers is presented, whose mathematical environment is the division of natural numbers. Its solution requires the use of a property related to the remainder; a close link with the concept of multiple of a natural number is shown, and the importance of carefully examining the information given in the problems, in order not to give apparently correct answers, is evidenced. *Keywords*: division of natural numbers; remainder; multiples of a natural number; solving and posing problems.
Resumo	Apresenta-se um problema trabalhado numa oficina com professores do ensino básico, cujo enquadramento matemático é a divisão de números naturais. A sua resolução requer o uso de uma propriedade relacionada com o resto; é mostrada uma estreita ligação com o conceito de múltiplo de um número natural e evidenciada a importância de analisar cuidadosamente a informação dada nos problemas, de modo a não dar respostas aparentemente corretas. *Palavras-chave*: divisão de números naturais; resto; múltiplos de um número natural; resolução e criação de problemas.

Problema

Felipe y Saúl jugaron con sus canicas. Felipe tenía 43 canicas y, al terminar el juego, Saúl le ganó cierta cantidad de ellas. Ahora, ambos amigos tienen la misma cantidad de canicas. Felipe reparte en partes iguales, entre sus 4 amigos, todas las canicas que le quedan, y le sobran 2 canicas. Saúl también reparte todas sus canicas en partes iguales entre sus 3 amigos y, curiosamente, también le sobran 2 canicas.

¿Se puede determinar con precisión, cuántas canicas perdió Felipe, jugando con Saúl?

El problema lo propuse en un curso-taller con profesores de primaria en formación, cuyo propósito era reforzar aprendizajes en torno a la divisibilidad de números naturales, en el marco del modelo de reparticiones enteras, justas y máximas (REJM) expuesto por la Dra. Estela Vallejo y con el enfoque de creación de problemas.

La idea era que los participantes resuelvan el problema y a partir de tal experiencia crearan dos nuevos problemas: un problema *pre* respecto a este problema (que ayude a entenderlo y resolverlo) y un problema *pos* respecto a este problema (que sea más retador, manteniendo el propósito de reforzar aprendizajes sobre divisibilidad). La discusión intra e intergrupal al resolver el problema fue muy interesante y parte de ella la comentaré en este artículo. Dejo a los lectores la creación de nuevos problemas a partir de este, y con mucho gusto los publicaremos en el próximo número, en la sección *El Rincón Intercreativo*, de esta revista.

Para resolver el problema

Una idea básica que aflora, al entender el problema, es que la cantidad de canicas que reparten en partes iguales Felipe y Saúl no solo es la misma, sino que es múltiplo de 4, más 2 y también múltiplo de 3, más 2. Esto se relaciona con el número 12, por ser múltiplo de 4 y de 3 y en consecuencia con el número 14, por ser 12 + 2. Así, Felipe y Saúl tendrían 14 canicas y Felipe habría perdido 29 canicas, en el juego con Saúl, pues 43 – 29 es 14. Esta es una primera aproximación a una manera de resolver el problema; sin embargo, es importante seguir examinando lo avanzado, para tener una solución completa del problema, que sea coherente con la información y el requerimiento dados. Releyendo el requerimiento, debemos preguntarnos ¿Hemos determinado con precisión cuántas canicas perdió Felipe? Dicho de otra manera

¿La única posibilidad es que Felipe perdió 29 canicas?

Podemos advertir que 12 no es el único número que es múltiplo de 4 y de 3. También son 24, 36, 48, 60. En verdad hay infinitos múltiplos comunes de 4 y de 3; inclusive el 0 es múltiplo de 4 y de 3.

Examinemos por casos: considerando el 24, Felipe y Saúl podrían haberse quedado con 26 canicas (24 + 2); así, Felipe repartiría 6 canicas a cada uno de sus 4 amigos y le quedarían 2 (26 = 4x6 + 2) y Saúl repartiría 8 canicas a cada uno de sus 3 amigos y le quedarían 2 (26 = 3x8 + 2). En este caso, Felipe habría perdido 17 canicas, pues 43 – 17 es 26.

Considerando el 36, Felipe y Saúl podrían haberse quedado con 38 canicas (36 + 2); así, Felipe repartiría 9 canicas a cada uno de sus 4 amigos y le quedarían 2 (38 = 4x9 + 2) y Saúl repartiría 12 canicas a cada uno de sus 3 amigos y le quedarían 2 (38 = 3x12 + 2). En este caso, Felipe habría perdido 5 canicas, pues 43 – 5 es 38.

Razonamiento similar podríamos hacer considerando el 48, pero advertimos que un dato de la información del problema es que Felipe tiene 43 canicas, así que no podría haberse quedado con 50 canicas (48 + 2). El mismo razonamiento vale para el 60 y para cualquier múltiplo de 4 y de 3 que sea mayor que 43.

Pero hay algo más, que nos dio mucho gusto que fuera advertido por uno de los profesores de primaria, participante en el taller. Releyendo la información, ¿Tiene sentido afirmar que Felipe perdió 29 canicas? Ya vimos que así, Felipe se quedaría con 14 canicas y como 14 es 4x3 + 2, Felipe repartiría 3 canicas a cada uno de sus 3 amigos y le quedarían 2, y Saúl también tendría 14 canicas y repartiría 4 canicas a cada uno de sus 3 amigos y le quedarían 2; lo cual satisfaría la información del problema, pero estamos descuidando algo muy importante: que, al terminar el juego, Saúl le ganó cierta cantidad de canicas a Felipe y ***"ahora, ambos amigos tienen la misma cantidad de canicas".*** Y en el caso que estamos analizando, Saúl le ganó 29 canicas a Felipe ¿Cómo puede ocurrir que todas las canicas de Saúl sean 14 si le ganó 29 canicas a Felipe? Esta observación nos hace descartar la posibilidad que Felipe haya perdido 29 canicas.

Con este mismo criterio, examinamos los otros casos y vemos que sí es posible que Felipe haya perdido 5 canicas, pues así se queda con 38 y Saúl también puede tener 38, considerando las 5 que le ganó a Felipe. Análogamente, es posible que Felipe haya perdido 17 canicas, pues así se queda con 26 y Saúl también puede tener 26, considerando las 17 que le ganó a Felipe.

Siendo rigurosos, 0 también es múltiplo de 4 y de 3 y como 2 = 4x0 +2 y 2 = 3x0 + 2, Felipe y Saúl podrían haber tenido, al terminar el juego, 2 canicas cada uno y repartir 0 canicas a sus 4 y 3 amigos respectivamente y en ambos casos, les quedarían 2 canicas; sin embargo, esto es imposible, pues en ese caso Felipe habría perdido 41 canicas que pasarían a poder de Saúl y entonces no es posible que Saúl tenga solo 2 canicas.

Para un análisis más formal, llamemos C a la cantidad común de canicas que tienen Felipe y Saúl al terminar el juego.

Teniendo en cuenta que Felipe tiene 43 canicas, los posibles valores de C, por ser múltiplo de 4, más 2 (o sea, de la forma $4n + 2$, con n número natural), serían los elementos del conjunto C_F:

$$C_F = \{2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42\}.$$

Notar que 46 también es múltiplo de 4, más 2 (46 = 4x11 + 2), pero no está en el conjunto, y tampoco otros números mayores, porque la cantidad C tiene que ser menor o igual que 43.

Observar que otra manera de definir el conjunto C_F es expresando que son números naturales menores que 43 que, al dividirlos entre 4, su residuo es 2.

Por otra parte, por ser C múltiplo de 3, más 2 (o sea, de la forma $3m + 2$, con m número natural) los posibles valores de tal cantidad serían los elementos del conjunto C_S:

$$C_S = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41\}.$$

Notar que tampoco se consideran números como 44 o mayores, de la forma $3m + 2$ (44 = 3x14 + 2) porque C debe ser una cantidad menor o igual que 43, por ser la misma para Felipe y Saúl.

Observar también que otra manera de definir el conjunto C_S es expresando que son números naturales menores que 43 que, al dividirlos entre 3, su residuo es 2.

Ahora, justamente, teniendo en cuenta lo último que acabamos de recordar, o sea, que C debe ser valor común para Felipe y Saúl, la cantidad C tendría que ser un número que esté en la intersección de estos conjuntos; es decir, C es un número natural que al dividirlo entre 4 el residuo es 2 y al dividirlo entre 3, también el residuo es 2, lo cual significa que podría ser alguno(s) de los elemento(s) del siguiente conjunto:

$$C_F \cap C_S = \{2, 14, 26, 38\}$$

Ahora examinemos cada posibilidad:

C = 38 significa que Felipe perdió 5 canicas (43 – 5 = 38); y esas 5 canicas son parte de las 38 canicas que debería tener Saúl, por la igualdad en la cantidad de canicas con Felipe.

C = 26 significa que Felipe perdió 17 canicas (43 – 17 = 26); y esas 17 canicas son parte de las 26 canicas que debería tener Saúl, por la igualdad en la cantidad de canicas con Felipe.

C = 14 significa que Felipe perdió 29 canicas (43 – 29 = 14); pero esas 29 canicas las debería tener Saúl, lo cual es inconsistente, pues Saúl debe tener igual cantidad de canicas que Felipe, o sea 14. Esto significa que C no puede ser 14; o, dicho de otra manera, Felipe no pudo perder 29 canicas.

C = 2 significa que Felipe perdió 41 canicas (43 – 2 = 41); pero esas 41 canicas las debería tener Saúl, lo cual es inconsistente, pues Saúl debe tener igual cantidad de canicas que Felipe, o sea 2. Esto significa que C no puede ser 2; o, dicho de otra manera, Felipe no pudo perder 41 canicas.

En consecuencia, solo hay dos posibilidades para que ocurra lo que se da como información en el problema y se satisfaga el requerimiento:

Una posibilidad: Que Felipe haya perdido 5 canicas (que pasaron a propiedad de Saúl) y así se quedó con 38 canicas, que repartió en partes iguales a sus 4 amigos (9 canicas a cada uno) y le quedaron 2. Saúl tendría también 38 canicas, que podría repartir en partes iguales a sus 3 amigos (12 canicas a cada uno) y le quedarían 2.

Otra posibilidad: Que Felipe haya perdido 17 canicas (que pasaron a propiedad de Saúl) y así se quedó con 26 canicas, que repartió en partes iguales a sus 4 amigos (6 canicas a cada uno) y le quedaron 2. Saúl tendría también 26 canicas, que podría repartir en partes iguales a sus 3 amigos (8 canicas a cada uno) y le quedarían 2.

Entonces, atendiendo el requerimiento del problema; o sea respondiendo a la pregunta *¿Se puede determinar con precisión, cuántas canicas perdió Felipe, jugando con Saúl?* Decimos que no. Pues Felipe pudo haber perdido 5 canicas o pudo haber perdido 17 canicas.

Comentarios y reflexiones

Para resolver correctamente el problema dado, basta con evidenciar que hay dos posibilidades de pérdida de canicas de Felipe, pues entonces, con la información dada, no se puede determinar con precisión cuántas canicas perdió Felipe, jugando con Saúl.

El análisis hecho muestra la riqueza matemática y didáctica del problema, para profundizar temas relacionados con divisibilidad, con el residuo al hacer divisiones entre números naturales y con los múltiplos de números naturales.

No me he detenido a explicar el modelo de reparticiones enteras, justas y máximas (REJM) (Vallejo-Vargas, 2023), pero es altamente recomendable que los docentes lo conozcan y apliquen como una forma de estimular aprendizajes reflexionados y con mayor comprensión, relacionados con la división de números naturales, y que los algoritmos sean comprendidos y no solo memorizados. Experiencias didácticas en esta línea están expuestas en Ordóñez (2014).

Comprender vivencialmente la división y la divisibilidad de números enteros, contribuirá también a que estudiantes y profesores creen problemas sobre estos contenidos, los que – a su vez – contribuirán a una mejor comprensión de los conceptos y algoritmos relacionados.

Con estas reflexiones concluyo *El Rincón de Problemas* de este número de *UNIÓN* y, como en los números anteriores, invito a los lectores a participar en *El Rincón Intercreativo*, de este número.

A continuación, dejo algunas preguntas que podrían ser usadas para escribirme algo que se publicaría en *El Rincón Intercreativo* del próximo número:

i) ¿Qué aprendizaje considera usted que más se refuerza, en relación a la división de números naturales, al resolver el problema de este artículo?

ii) ¿Qué problema(s) crearía usted para que, al resolverlo, sus estudiantes puedan comprender mejor y resolver el problema de este artículo?

iii) ¿Es verdad que todo número que es divisible por 3 y por 4 es también divisible por 12? ¿Cómo justifica su respuesta?

iv) ¿Cómo sería un problema de contexto intra matemático que requiera hacer un análisis parecido al hecho para resolver el problema de este artículo?

v) ¿Qué experiencia interesante con estudiantes podría contarnos, relacionada con la resolución o la creación de un problema sobre división de números naturales?

Agradezco los comentarios y propuestas que me hicieron llegar, relacionados con el problema del número anterior de *UNIÓN* y los invito a leerlos en este número. También reitero mi exhortación amigable a que me hagan llegar sus comentarios, propuestas o experiencias, a partir de reflexiones de carácter didáctico o matemático, motivados por la resolución del problema de este artículo. Nos dará mucho gusto publicar y comentar lo que me escriban, en el próximo número de *UNIÓN*, como lo estoy haciendo en este número, con lo que me han enviado. Algunas pistas para crear problemas, pueden encontrarlas en diversos artículos, que últimamente se están publicando más intensivamente (en inglés son artículos sobre "problem posing"); en particular, en Malaspina (2018).

Bibliografía

Malaspina U. (2018). ¿Cómo crear problemas de matemáticas? Experiencias didácticas con profesores en formación. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 14(52).* https://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/362

Ordóñez, C. (2014) *La construcción de la noción de división y divisibilidad de números naturales, mediada por justificaciones, en alumnos de tercer grado de nivel primaria.* [Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú]. https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/5653

Vallejo-Vargas, E. A. (2023). *Learning to Teach Through Proving: In-service Primary School Teachers' Understanding and Use of Proving while engaged in Proof-Based Teaching* [Tesis de doctorado, Universidad de Bremen]. https://doi.org/10.26092/elib/2693