UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 62. Agosto 2021
Páginas 1-25

Se os Egípcios tivessem o GeoGebra?

Um passeio na história da raiz quadrada

Liliana da Costa, João Domingos Junior, Daniele Alves

Fecha de recepción: 27-08-2020
Fecha de aceptación: 22-04-2021

Resumen	En este artículo daremos un paseo por algunos métodos utilizados a lo largo de los siglos para calcular la raíz cuadrada, destacando aquellos que valoran su representación geométrica. El método egipcio es el objeto central de la investigación. A partir de ella, con la ayuda de GeoGebra, se formulan algunas conjeturas que luego se demuestran. La aplicabilidad de estas ideas en el aula puede hacerse en varios momentos de la educación básica y se hace posible con el uso de GeoGebra como facilitador en el proceso de enseñanza-aprendizaje. **Palabras clave**: Raíz cuadrada, Historia de las matemáticas, egipcios, GeoGebra
Abstract	This paper will take a walk through some methods used throughout the centuries to calculate the square root, highlighting those that value its geometric representation. The Egyptian method is the central object of the research. From it, with the help of GeoGebra, some conjectures are formulated and later proved. The applicability of these ideas in classroom can be done in several moments of the basic education and becomes possible with the use of GeoGebra as a facilitator in the teaching-learning process. **Keywords**: Square Root, Mathematics History, Egyptians, GeoGebra.
Resumo	Neste artigo será feito um passeio por alguns métodos utilizados ao longo dos séculos para o cálculo de raiz quadrada, destacando aqueles que valorizam sua representação geométrica. O método Egípcio é o objeto central da pesquisa. Partindo dele, com a ajuda do GeoGebra, algumas conjecturas são formuladas e, posteriormente, provadas. A aplicabilidade dessas ideias em sala de aula poderá ser feita em diversos momentos da educação básica e se torna possível com a utilização do GeoGebra como um facilitador no processo de ensino-aprendizagem. **Palavras-chave:** Raiz quadrada, História da Matemática, Egipcios, GeoGebra.

1. Introdução

No atual currículo de Matemática da Educação Básica a referência à raiz quadrada de um número surge apenas no âmbito do estudo dos números reais. A acessibilidade ao uso de calculadoras e outros recursos computacionais fez com que se deixasse de sentir a necessidade do ensino de algoritmos que permitam o cálculo de valores aproximados de raízes quadradas irracionais.

Para um jovem estudante que, para calcular $\sqrt{k}$ (para algum número real k), apenas precisa apertar uma sequência bem simples de teclas da calculadora do seu celular, este cálculo é um processo que lhe aparece pronto e que lhe dá a falsa ideia de que a matemática é algo instantâneo. Devemos instigar no aluno a curiosidade pelos processos que foram utilizados em outros tempos e por outros povos, e estabelecer um paralelo com o que a tecnologia nos permite fazer, nos dias de hoje.

Ao levar a História da Matemática para a sala de aula, permite-se a criação de momentos em que os processos particulares da construção do conhecimento matemático por diversos povos ao longo dos séculos são explicados e interpretados, numa perpectiva humanista e humanizadora. Assim, a Matemática revela-se uma prática coletiva, de trocas constantes, dinâmina e dialética e que permite e inspira uma atividade colaborativa tanto no que se refere ao domínio próprio como com outras áreas do conhecimento e da vida quotidiana.

Segundo D'Ambrosio,

> As idéias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber. (D'AMBROSIO, 1999, p. 97)

E, tendo presente esta ideia, elaborou-se este artigo que poderá dar origem ao desenvolvimento de propostas de atividades a serem aplicadas em sala de aula para alunos que estejam tanto nos anos finais do Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio.

Na próxima seção, *Representações*, iremos apresentar parte da discussão feita por Duval do que se entende por representação e da utilização da tecnologia para explorar diferentes representações de um mesmo objeto matemático. Na seção seguinte, *Processos de determinação da raiz quadrada*, faz-se uma viagem no tempo, elencando vários métodos que foram utilizados por diferentes povos, em diferentes momentos, para o cálculo de valores aproximados de raízes quadradas, dando especial destaque àqueles que utilizam processos de pensamento geométrico. Na penúltima seção, *Como os Egípcios calculavam raízes quadradas*, é dado especial destaque ao processo utilizado pelos egípcios para o cálculo de algumas raízes quadradas, que está registrado no papiro de Rhind, e colocamos algumas questões que serão comentadas na última seção, *Complementando os cálculos dos egípcios*. Aqui, o uso do método dos egípcios em simultâneo com a utilização do software GeoGebra conduziu a vários questionamentos no sentido de melhorar as aproximações obtidas. Algumas desses questionemnetos deram origem a conjeturas e a proposições que são por nós provadas. Finalmente, o artigo termina com *Algumas considerações finais*.

2. Representações

Tanto a significação como a representação estão associadas, e dependem, não só do sujeito/objeto em si, mas de conceitos, caraterísticas e propriedades, de crenças e convicções . Segundo Ribeiro (2008), na literatura, encontramos referência a vários tipos de representação: mental, social, visual, espacial, etc. Mas, todas elas são, a priori, mentais.

> Etimologicamente, 'representação' provém da forma latina '*repraesentare*' – fazer presente ou apresentar de novo. Fazer presente alguém ou alguma coisa ausente, inclusive uma idéia, por intermédio da presença de um objeto. (…)a representação é um processo pelo qual institui-se um representante que, em certo contexto limitado, tomará o lugar de que representa (Makowiecky, 2003, p.3-4)

Neste sentido, e ainda de acordo com Mackowiecky, pode pensar-se a representação como algo que substitui o *outro*, como a tradução mental de algo exterior e que está diretamente relacionada ao processo de abstração, sendo uma forma de expressar a percepção do *outro* (seja objeto, imagem, palavra). Assim, ela é o produto do resultado de uma prática simbólica ou não. "A representação do real, ou o imaginário é, em si, elemento de transformação do real e de atribuição de sentido ao mundo".

As primeiras representações feitas pelo homem terão resultado de conhecimentos que ele foi adquirindo e que terão surgido da sua vivência e da utilização dos sentidos associados a objetos reais, de conceitos que assim iam sendo construídos e de saberes reusultantes da prática, sobretudo no que respeita à forma e ao tamanho. Por isso, desde a antiguidade, as representações são utilizadas para resolução de problemas do quotidiano.

Muitas dessas representações eram registradas em diversos suportes que se desgastaram e deterioraram e, por esse motivo, bastante informação foi perdida ao longo do tempo. Alguns exemplos conseguiram chegar aos nossos dias, com qualidade suficiente para poderem ser interpretados. Isso ocorreu com as placas de cerâmica da Mesopotâmia, gravadas em escrita cuneiforme (c.1700 a.C), que eram um instrumento de contabilidade, e também com os papiros egípcios escritos em hieroglifos, nomeadamente os Papiros Matemáticos de Rhind e de Moscow, que apresentam alguns problemas aritméticos e outros relacionados à arquitetura e construção das pirâmides.(Katz, 2010, p. 4-36)

De acordo com Bastos (2016), o homem, já com posse de um maior conjunto de ferramentas foi percebendo que as representações seriam fruto de "uma combinação entre o real e a imaginação". Já não existiam "apenas problemas soltos a respeito das necessidades humanas, mas um conjunto de características que permitiam estruturar conhecimentos"(Bastos, 2016, p.5).

No Renascimento, com a mudança de olhar sobre a importância e o papel do homem no mundo, as representações começam a ter uma maior relevância. Flores indica que

> (…) anteriormente o conhecimento do mundo e dos homens estava sob o poder das entidades religiosas, (...) com a descoberta da razão o sujeito do conhecimento passa a conhecer e a representar os objetos do

> conhecimento. A questão da representação passa, então, a ser problematizada enquanto expressão iconográfica da relação entre o sujeito do conhecimento e o objeto dado a conhecer, criando princípios da representação sob o aspecto de fundamento teórico, epistemológico.(Flores, 2003, p.116)

Mudado o paradigma, houve também uma mudança de atitude, o homem renascentista procura construir o conhecimento, relacionando e explicando fenômenos e, também, representando-os. A representação passa a ter várias manifestaões e a sua importância vai sendo reconhecida.

Na matemática, a intuição geométrica e o discurso deixam de ser as referências para o conhecimento.

> O que se percebe é a presença de uma organização de signos que traz para o saber o que seria uma linguagem, os discursos e descrições em diferentes línguas (por conta de inúmeros povos e culturas) são traduzidos por uma uniformidade de símbolos e operações” (BASTOS, 2016, p.7).

No campo da geometria, novas definições surgiram, e com elas o aparecimento de novas geometrias que iam para além da percepção e das representações imediatas. Com a formalização e teorização da matemática, novas axiomáticas foram sendo propostas e, desse modo, novos campos de construção do conhecimento foram surgindo, alguns dos quais propiciam representações que vão para além da intuição. Assim, o papel das representações em matemática ultrapassa a mera estruturação do conhecimento, contribuindo para avanços e criação de novas áreas de estudo e pesquisa. Contudo, certamente elas possuíam estreita e importante relação com o desenvolvimento do raciocínio matemático visto que seu papel no processo de ensino-aprendizagem e compreensão da Matemática foi, e sempre será, estimulado e valorizado.

Assim, usando representações de um dado objeto matemático, é possível reconhecer e estudar as suas características e indicar propriedades por ele satisfeitas e, consequentemente, estruturar novos conhecimentos e, também, elencar novas representações. No entanto, as representações mais apropriadas para servir de base aos raciocínios matemáticos têm sido para muitos um grande problema.

É reconhecido que a prática de um ensino virado para a automatização e mera compreensão de noções, recorrendo a uma única representação, se tem mostrado inadequada para que haja uma aprendizagem efetiva. O professor precisa criar contextos que priveligiem conexões e, também, fomentar o recurso a diferentes registros de representação. Essa coordenação surge como condição fundamental para todas as aprendizagens de base. Por isso, é impossível falar em matemática sem referir as diferentes representações de conceitos e objetos e, ponto fundamental para a compreensão da matemática, na distinção estes e suas representações.

Para Duval (2012) torna-se imperioso distinguir a conceitualização que se pode ter sobre um objeto, das produções que dele se fazem, ou seja as representações mentais das semióticas. Exemplificando, prossegue

> Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. Consideram-se, geralmente, as representações semióticas como um simples meio de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação, quer dizer para torná-las visíveis ou acessíveis a outrem. Ora, este ponto de vista é enganoso. As representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento. (Duval, 2012, p. 269)

Um aspeto de primordial importância ao ensinar um conceito, e que o professor deve ter sempre presente, é que não se confundam as representações com os objetos matemáticos e que estes possam ser identificados por cada uma das suas possíveis representações, tornando-se para isso necessária a utilização de um conjunto de vários registros de representação semiótica, destacando: figuras, diagramas, gráficos, escritas simbólicas e a língua natural. Duval salienta a importância de "que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis." (Duval, 2012, p. 270).

Para que um sistema semiótico seja considerado um registro de representação é necessário reconhcer nele três atividades cognitivas fundamentais, a saber: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão. A conversão, sendo uma transformação externa ao registro inicial, e que inclui a representação de uma representação lingística (natural ou simbólica) em uma representação figural (ilustração, gráfico, diagrama) é de primordial importância.

Mas não podemos deixar de ter presente que uma representação apenas refere parte do conhecimento do objeto representado. Assim, "as figuras e, de maneira geral, todas as representações analógicas, podem representar somente estados, configurações ou produtos de operações, não ações ou transformações" (Bresson, 1987, *apud* Duval, 2012, p. 280). Mas, "as figuras permitem representar a totalidade de relações entre os elementos que constituem o objeto ou a situação" (Larkin & Simon, 1987, *apud* Duval, 2012, p. 280).

Entre as várias conexões que se podem estabelecer e que privilegiam a formação da representação de um objeto no registro figurativo, destaca-se o recurso a figuras geométricas para ensinar conceitos como frações e raízes quadradas, tradicionalmente associados ao campo numérico. Ao proceder desta forma, atribui-se novo significado às diversas unidades figurais, subordinando-as aos conceitos que estão presentes nos objetos em análise. Deste modo, as figuras geométricas saem do seu campo particular e são apropriadas por outros campos, tornando-se, assim, em figuras matemáticas, momento em que a denotação se sobrepõe à significação.

O avanço das tecnologias ocorrido nas últimas décadas facilitou a inclusão de mídias e softwares no processo de ensino-aprendizagem. Assim sendo, as representações e as visualizações geométricas atingiram um patamar nunca antes alcançado, não só na qualidade, como também na facilidade de manipulação e construção de determinados objetos geométricos. Como exemplo temos o

GeoGebra[1] que é um software livre criado em 2001 por Markus Hohenwarter e que traz aos usuários a possibilidade de combinar geometria, álgebra, gráficos e cálculos em um único ambiente. Este software possui em sua interface três áreas para diferentes representações dos objetos matemáticos: área algébrica, área de cálculo e área gráfica. Estas éreas estão interligadas, permitindo ao usuário observar, em simultâneo, diferentes representações de um mesmo objeto. Um objeto criado pode ser modificado após a sua criação, o que por sua vez acarreta a mudança de outros objetos interligados a este. Essa dinâmica permite ao usuário observar como as mudanças feitas em determinada representação modificam as outras representações e assim relacioná-las.

Muitos pesquisadores se têm debruçado sobre as potencialidades e vantagens de usar o GeoGebra, entre eles, Petla que afirma

> O GeoGebra é um programa bastante intuitivo e autoexplicativo, adequado a usuário com conhecimentos avançados em informática ou para iniciantes, sendo que o conhecimento matemático é o ponto fundamental de sua utilização. Por ser um software livre há colaboração de vários programadores inclusive brasileiros os quais disponibilizaram uma versão totalmente em português, o que facilita muito sua utilização em nosso país. (PETLA, 2008, p. 21)

Com tantos recursos, e ainda sendo um software livre e colaborativo, o Geogebra tem conquistado um espaço cada vez maior no meio acadêmico, se tornando assim um grande facilitador no processo de aprendizagem. Por ser um software dinâmico é no contexo de facilitador que o GeoGebra auxília na visualização geométrica dos métodos de cálculo da raiz quadrada. Além disso, este software possui grande potencial para a elaboração de conjucturas pela sua relativa facilidade de manipulação.

Atendendo à genialidade de determinadas propostas de resolução de problemas sugeridas por matemáticos das civilizações antigas, alguns questionamentos nos ocorrem, meramente como exercício de imaginação: Se nossos antepassados tivessem uma ferramenta poderosa como o GeoGebra, como teriam resolvido alguns desses problemas e que desdobramentos poderiam ter surgido perante alguns impedimentos? Como os diversos conceitos matemáticos evoluiriam e seriam desenvolvidos com a presença desse software? Qual teria sido o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem em matemática?

Um dos conceitos matemáticos em que o recurso a diferentes representações se revela facilitador de aprendizagem é o de “*raiz quadrada de um número”.*

Em língua natural, diz-se que a “raiz quadrada de um número não negativo é um outro número cujo quadrado é igual ao primeiro”. Este mesmo conceito pode ser representado por recurso à escrita simbólica própria da matemática “dado $A \geq 0$, $\sqrt{A} = b$ desde que $b^2 = A$ ”. Esta última igualdade pode ser interpretada como a representação da área, A, de um quadrado de lado de medida igual a b. Assim, a raiz quadrada de um número A $(A \geq 0)$ pode ser considerada como a medida, b, do lado de um quadrado cuja área é A,e isto conduz a uma representação geométrica daquele conceito. Como refere Pitombeira (2010) “a extração de raízes quadradas

[1] www.geogebra.org

sempre despertou grande interesse. Essa operação tem nítida importância geométrica, pois permite calcular efetivamente o lado de um quadrado cuja área é conhecida”.

O cálculo explícito de uma raiz quadrada, comparada às restantes operações elementares que conhecemos, é algo bem mais complicado e elaborado. Ao longo do tempo, não só os métodos para o cálculo aproximado de raízes quadradas, como também para o cálculo exato desses valores, foram desenvolvidos por diversos povos.

3. Processos de determinação da raiz quadrada

Nesta seção serão apresentados, de forma sucinta e não necessariamente em ordem cronológica, alguns métodos presentes na literatura, para o cálculo de raiz quadrada. Antes de se iniciar a descrição dos métodos, vale a pena relembrar que determinar a raiz quadrada de um número real $r \geq 0$, é encontrar um número real p tal que $p^2 = r$. Além disso, se x e y são números reais não negativos, então $x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$. Para maiores detalhes sobre os métodos apresentados abaixo sugerimos Lima (2013), Carvalho (2010), Silva (2013) e Katz (2010).

3.1. Algoritmo fundamental

Dado $n > 0$, começa-se por procurar dois quadrados perfeitos: o maior quadrado perfeito que lhe seja inferior e o menor quadrado perfeito que lhe seja superior. Deste modo é possível localizar $\sqrt{n}$ entre dois números naturais consecutivos a e b. Seja $m = \frac{a+b}{2}$ o centro do intervalo $[a, b]$. Temos três casos a considerar:

- Se $m^2 < n$, tem-se que $\sqrt{n}$ pertence ao intervalo $[m, b]$ e repete-se o procedimento até ao nível de aproximação desejado.
- Se $m^2 > n$, tem-se que $\sqrt{n}$ pertence ao intervalo $[a, m]$ e repete-se o procedimento até ao nível de aproximação desejado.
- Se $m^2 = n$, o valor desejado foi encontrado, ou seja, $\sqrt{n} = m$.

Observa-se que em cada passo, uma cota superior do erro cometido é a metade da amplitude do intervalo anterior.

3.2. Método da fatoração

Este método baseia-se no Teorema Fundamental da Aritmética[2]. Seja n um número real positivo para o qual se deseja calcular a sua raiz quadrada.

[2] Teorema Fundamental da Aritmética: Todo número natural maior que 1 ou é primo ou se escreve de modo único como o produto de números primos. Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada em HEFEZ (2011).

Inicialmente, fatora-se o número n, ou seja, escreve-se o número n como um produto de fatores primos.

Note que se n é um quadrado perfeito, então os expoentes de seus fatores primos são todos pares e nesse caso a raiz quadrada de $n, \sqrt{n},$ é um número cujos fatores primos são os mesmos do número n com os expoentes divididos por 2:

$$n = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_k^{2\alpha_k}$$

com p_i número primo e α_i número natural, para todo $i = 1, \dots, k$. Assim,

$$\sqrt{n} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

Caso n não seja um quadrado perfeito a raiz quadrada de n será representada como um produto de um número natural multiplicado por uma raiz quadrada de um número menor que o inicial e formado pelo produto dos fatores primos cujos expoentes eram ímpares.

$$n = p_1^{2\alpha_1+1} p_2^{2\alpha_2+1} \dots p_k^{2\alpha_k+1}$$

com p_i número primo e α_i número natural, para todo $i = 1, \dots, k$. Assim,

$$\sqrt{n} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \sqrt{p_1 p_2 \dots p_k}$$

Para prosseguir o cálculo terá que se recorrer ao processo anterior. No entanto, os cálculos resultantes serão mais simples do que se esse procedimento fosse aplicado diretamente ao número n.

3.3. Método das Subtrações

Rampazzo (1985) sugere este processo que é baseado no fato, já conhecido dos pitagóricos, de que “podemos formar quadrados adicionando números ímpares sucessivos a 1. (...) Os números ímpares adicionados encontravam-se na forma em L geralmente chamada de gnómon” (Katz, 2010, p. 63). Assim, a soma dos n primeiros números ímpares é um quadrado perfeito. Ou seja,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

A prova da igualdade anterior pode ser feita por recurso ao princípio de indução finita ou, como ilustrado na Figura 1, por via geométrica.

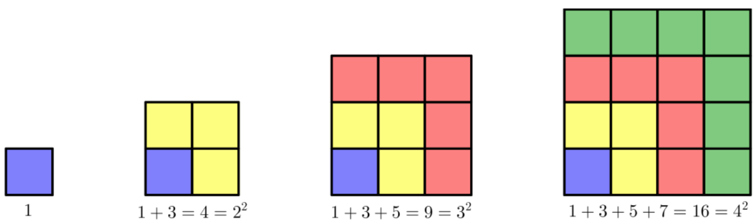

Figura 1. Representação dos 4 primeiros quadrados perfeitos como soma de números ímpares consecutivos. Fonte: Os autores (2020).

O recurso a este algoritmo só permite encontrar a raiz quadrada quando o número é um quadrado perfeito. Quando tal não acontece, ele fornece-nos a sua parte inteira. No entanto, desenvolvimentos posteriores, que podem ser vistos em Melo (2016), dão uma forma de se obterem aproximações da raiz quadrada de um número utilizando o método das subtrações.

De acordo com o método original e com o que foi apresentado acima, para verificar se um número natural é ou não quadrado perfeito basta subtrair dele a sucessão de números ímpares $(1, 3, 5, 7, \ldots)$. Isto é, calculando sucessivamente:

$$\begin{gathered} n_1 = n - 1 \\ n_2 = n_1 - 3 \\ n_3 = n_2 - 5 \\ \vdots \\ n_k = n_{k-1} - (2k - 1) \end{gathered}$$

O algoritmo termina quando $n_k \leq 0$ e conclui-se da seguinte forma:

- Se $n_k = 0$, o número n é um quadrado perfeito e k, número de subtrações realizadas, é a sua raiz quadrada, ou seja, $\sqrt{n} = k$.
- Se $n_k < 0$, o número n não possui raiz quadrada exata, ou seja, $\sqrt{n} \in]k-1, k[$. Contudo, sabe-se que a parte inteira de $\sqrt{n}$ é $k - 1$.

3.4. Métodos Gregos

3.4.1. Método de Euclides

Este método aparece na literatura associado ao nome de Descartes. No entanto, Katz (2010, p.93) atribui-o a Euclides, estando presente no Livro II dos Elementos e sendo referenciado como proposição II-14: *Construir um quadrado igual a uma determinada figura retilínea dada*. Em terminologia algébrica, Euclides gostaria de obter a solução para a seguinte equação $x^2 = k$.

Observando geometricamente esta proposição, seja k o valor do qual se gostaria de obter a raiz quadrada. Numa reta considere os pontos A, B e C, por esta ordem, tais que $\overline{AB} = k$ e $\overline{BC} = 1$. Em seguida trace uma semicircunferência de diâmetro $\overline{AC}$. Por B, traça-se a perpendicular ao segmento de reta $\overline{AC}$ até esta intersectar a semicircunferência, determinando assim o ponto R (Figura 2).

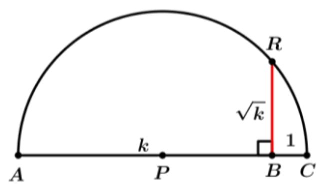

Figura 2. Representação geométrica da raiz quadrada. Fonte: Os autores (2020).

Note que o segmento $\overline{BR}$ é a altura do triângulo retângulo ACR, retângulo em R. Das relações métricas do triângulo retângulo resulta que $\overline{BR}$ representa a $\sqrt{k}$.

Ressalta-se que este método permite-nos construir um segmento cujo comprimento, numa dada unidade, tem medida $\sqrt{k}$, e não calcular seu valor.

3.4.2. Método de Heron

Heron de Alexandria (sec I d.C) se destacou pelos seus trabalhos em Matemática aplicada, seus escritos mostram e enfatizam com maior frequência as aplicações práticas em comparação ao embasamento teórico. Heron desenvolveu um método iterativo para o cálculo da raiz quadrada de um número k, e que consiste nos seguintes passos:

i) Seja a^2 o quadrado perfeito mais próximo de k.

ii) Calcular o quociente de k por a. $\frac{k}{a}$

iii) Calcular a média aritmética entre a e o quociente obtido em (*ii*), obtendo $\frac{a+\frac{k}{a}}{2}$

iv) $\sqrt{k}$ é o valor obtido em *(iii)*

Repara-se que $\frac{k}{a} = a + \frac{k-a^2}{a}$, pelo que de (*iii*) resulta em $\frac{a+\frac{k}{a}}{2} = a + \frac{k-a^2}{2a}$

Elevando ao quadrado o segundo membro desta igualdade resulta

$$\left(a + \frac{k-a^2}{2a}\right)^2 = a^2 + k - a^2 + \left(\frac{k-a^2}{2a}\right)^2 = k + \left(\frac{k-a^2}{2a}\right)^2$$

Assim, uma aproximação para $\sqrt{k}$ é dada por $\sqrt{k} \cong a + \frac{k-a^2}{2a}$

Note que o erro máximo cometido nesse processo é tal que

$$\left|\left(a + \frac{k-a^2}{2a}\right) - \sqrt{k}\right| \leq \frac{|k-a^2|}{2a}$$

O pensamento de Heron, segundo Carvalho (2010), "menciona explicitamente a ideia de repetir o cálculo, a partir do valor obtido anteriormente, a fim de aproximar tanto quanto quisermos a raiz quadrada procurada." Deste modo obtém-se uma sequência recursiva $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right)$ que converge para $\sqrt{k}$, ou seja, $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{k}$ e cujos termos são sucessivas aproximações de $\sqrt{k}$.

3.4.3. A escada de Theon

Theon de Smirna apresentou um algoritmo para o cálculo da raiz quadrada de 2, que foi generalizado para o cálculo de raiz quadrada de um número natural qualquer. Tal generalização é apresentada por Carvalho (2010).

O método consiste na definição de duas sequências definidas recursivamente, a saber: $x_{n+1} = x_n + y_n$ e $y_{n+1} = x_{n+1} + (k-1)x_n$

sendo k, o número cuja raiz quadrada se pretende encontrar e $x_1 = y_1 = 1$.

É imediato que $y_{n+1} = kx_n + y_n$.

Considere para cada n a razão $r_n = \frac{y_n}{x_n}$.

A sequência r_n é convergente para um número r. Ora,

$r_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{kx_n+y_n}{x_n+y_n} = \frac{k+\frac{y_n}{x_n}}{1+\frac{y_n}{x_n}} = \frac{k+r_n}{1+r_n} \to \frac{k+r}{1+r}$, quando $n \to \infty$

Como $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ e $\lim_{n\to\infty} r_n = \frac{k+r}{1+r}$ temos que $r = \frac{k+r}{1+r}$ e, portanto, $r = \sqrt{k}$. Os termos da sequência (r_n) são sucessivas aproximações de $\sqrt{k}$.

3.5. Método Hindu

Dos relatos que chegam até nós da matemática hindu, ressalta a sua vertente aritmética em detrimento de uma abordagem geométrica. Contudo, por volta de (800-600) a.C., foram escritos na Índia os *Sulbasutras* (textos que forneciam instruções cuidadosas de como construir altares para rituais religiosos).

Nesses textos foi proposto o seguinte método para o cálculo de $\sqrt{2}$: "Aumentada a medida de sua terça parte, e essa terça parte da sua própria quarta parte menos a trinta e quatro-ésima parte dessa quarta parte" (Mankiewicz, 2001, p. 40). Na Figura 3 ilustra-se o cálculo descrito da afirmativa anterior.

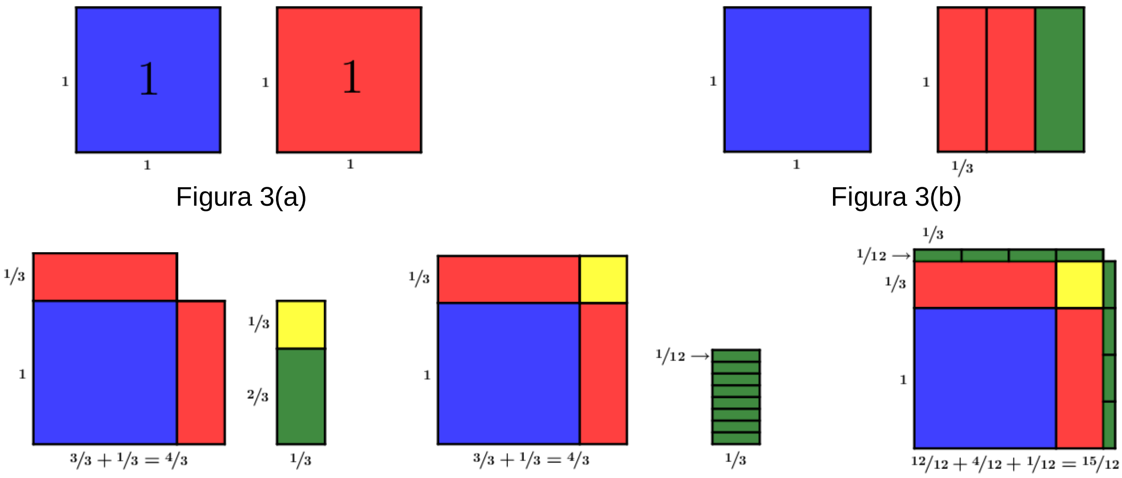

Figura 3(a) Figura 3(b)

Figura 3(c) Figura 3(d) Figura 3(e)

Figura 3. Representação geométrica para o método hindu no cálculo de $\sqrt{2}$. Fonte: Os autores (2020).

Sendo assim, o valor dado pela expressão abaixo era utilizado como aproximação para $\sqrt{2}$, possuindo as cinco primeiras casas decimais exatas.

$$\sqrt{2} \cong 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{3 \times 4 \times 34}$$

Na expressão anterior, a parcela com sinal negativo se deve a uma compensação a fim de se obter uma melhor aproximação para raiz quadrada que será explicada no exemplo a seguir.

Baseado no raciocínio então usado e descrito por Hogdson (2008, p. 16-18) será apresentado a seguir o cálculo de $\sqrt{5}$. Nesse desenvolvimento os erros de aproximação para a raiz pretendida serão calculados em diferentes passos para que seja observada a evolução das aproximações e consequentemente o decréscimo do erro cometido.

Tendo por objetivo construir um quadrado com área igual a 5, começa-se por decompor o número como uma soma (com o menor número de parcelas) de quadrados perfeitos: $5 = 4 + 1$. Assim, vai-se partir de dois quadrados com áreas 4 e 1 (Figura 4(a)). Esses valores são escolhidos pois 4 é o quadrado perfeito mais próximo e menor que 5. Resumidamente, o método consiste em utilizar a área do quadrado menor para ampliar o quadrado maior de forma a se obter um novo quadrado cuja área seja o mais próximo possível de 5.

Para uma primeira aproximação, tome o quadrado menor e divida-o em 4 retângulos iguais (Figura 4(b)). Cada um dos retângulos possui lados de valores 1 e $\frac{1}{4}$ e esses retângulos serão colocados, dois a dois, sobre os lados do quadrado maior (Figura 4(c)). Faltando, assim, um quadrado de lado $\frac{1}{4}$ para formar um novo quadrado de lado $2 + \frac{1}{4}$, como se vê na Figura 4(d).

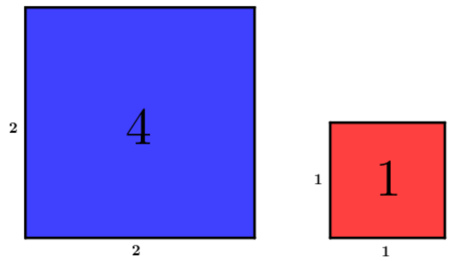

Figura 4(a)

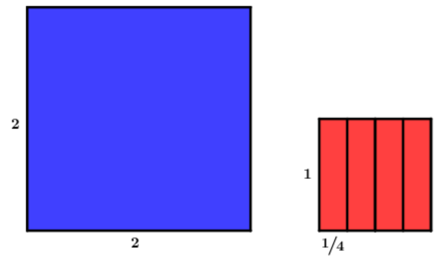

Figura 4(b)

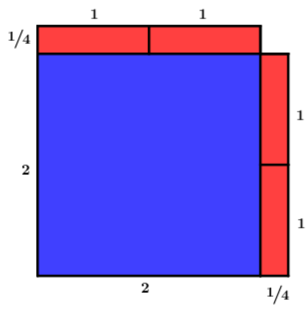

Figura 4(c)

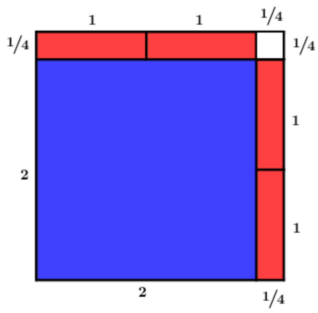

Figura 4(d)

Figura 4. Representação geométrica do erro cometido para o cálculo da $\sqrt{\square}$. Fonte: Os autores (2020).

A área desse novo quadrado excede 5 em exatamente $\left(\frac{1}{4}\right)^2$. Assim, é preciso retirar a este quadrado, tanto na vertical, quanto na horizontal uma “tirinha”, ou seja, para reequilibrar o todo, é necessário “repartir” a área deste quadradinho ao longo dos lados do quadrado recortando-o. Desta forma imagine que seja retirada uma banda de largura x ao longo de cada um dos lados do quadrado tal que a área das duas bandas totalize $\frac{1}{16}$, ou seja, $2x\left(2+\frac{1}{4}\right)-x^2=\frac{1}{16}\#(1)$

Desprezando o termo x^2, obtemos uma equação de 1º grau cuja solução é $\frac{1}{9\times 8}$, pelo que a equação (1) tem este valor como solução aproximada e consequentemente obtém-se uma aproximação para $\sqrt{5}$ que será calculada por $2+\frac{1}{4}-\frac{1}{9\times 8}$.

O que ocorreria se inicialmente tivéssemos dividido o quadrado menor em mais partes? Vamos dividi-lo em 5 retângulos iguais de dimensões 1 e $\frac{1}{5}$, como na Figura 5(a). Vamos colocar 4 desses retângulos sobre os lados do quadrado maior de lado 2 para formar um novo quadrado de lado $\frac{11}{5}$. Do retângulo restante vai ser retirado 1 quadrado de lado $\frac{1}{5}$, restando um retângulo de lados $\frac{1}{5}$ e $\frac{4}{5}$. Este quadrado irá completar o quadrado de lado $\frac{11}{5}$. (Figura 5(b)). O retângulo restante será dividido em 22 partes iguais de forma que estas possam ser alocadas à volta deste último quadrado (Figura 5(c)).

Observando a Figura 5(d) nota-se que está faltando um quadrado de lado $\frac{2}{55}$ para ser gerado um quadrado com lado $2+\frac{1}{5}+\frac{2}{55}=\frac{123}{55}$

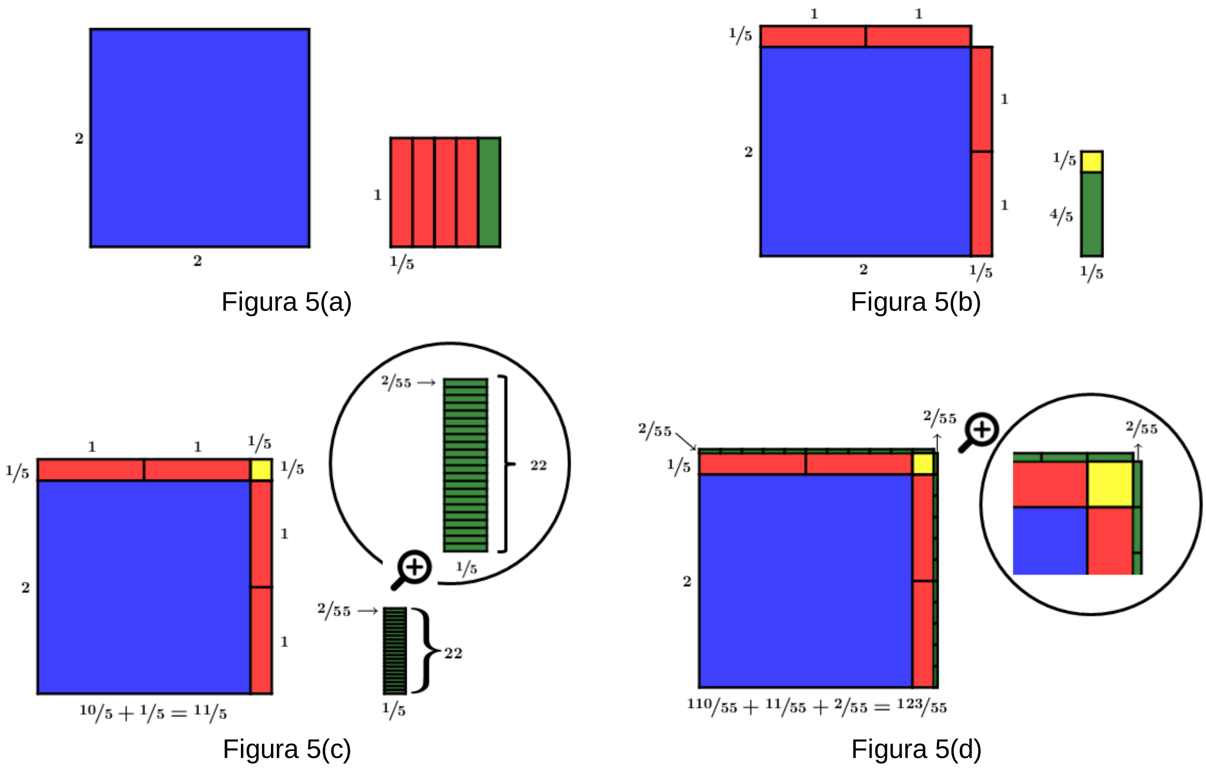

Figura 5. Representação do passo a passo para uma aproximação da $\sqrt{\square}$. Fonte: Os autores (2020).

Este valor encontrado é uma aproximação de $\sqrt{5}$. Contudo, vamos continuar o processo, para reequilibrar o todo, sendo necessário retirar a área deste quadradinho ao longo de dois lados consecutivos do quadrado. Desta forma, imagine que sejam retiradas bandas de largura x ao longo desses lados, tal que a área das duas bandas totalize $\left(\frac{2}{55}\right)^2$, ou seja, $2x\left(2+\frac{1}{5}+\frac{2}{55}\right)-x^2=\left(\frac{2}{55}\right)^2$.

Esta última equação tem como solução aproximada $x \approx \frac{1}{55\times 123}$ que se obtém desprezando o termo x^2. Logo uma aproximação para $\sqrt{5}$ é dada por $2+\frac{1}{5}+\frac{2}{55}-\frac{1}{55\times 123}=2{,}2362158167$. Usando uma calculadora, temos que a $\sqrt{5}\approx 2{,}2360679775$ e comparando com a aproximação anterior observa-se que as três primeiras casas decimais são exatas.

3.6. Método Chinês

O método chinês de cálculo da raiz quadrada, que se apresenta a seguir, se baseia na decomposição de um número em unidades, dezenas, centenas, etc e no processo geométrico de multiplicação por decomposição, e que está na base do algoritmo ensinado na educação básica (BARONE, 1983).

Sabe-se que o quadrado de um número de p algarismos tem $2p-1$ ou $2p$ algarismos. Reciprocamente, o número de algarismos da raiz quadrada de um número de p algarismos é $\frac{p}{2}$, se p é par ou $\frac{p+1}{2}$, se p é ímpar.

Assim, por exemplo, se $n=273529$, $k=\sqrt{263169}$ tem 3 algarismos e por isso $k=100.c+10.d+u$, com c,d e u representando algarismos $(c\neq 0)$. O problema da determinação de k consiste em encontrar c,d e u tais que $(100.c+10.d+u)^2=273529$.

Para isso, vai recorrer-se à representação geométrica do primeiro membro desta igualdade: um quadrado de lados $100.c+10.d+u$ (Figura 6(a)). Começa-se por determinar o algarismo de maior ordem, neste caso c. Para isso procura-se o maior c tal que $(100.c)^2\leq 273529$. Se $c=5$ obtemos $(100.5)^2=250000\leq 273529$. Faça-se a diferença entre o número $n=273529$ e $(100.5)^2$ obtendo $273529-250000=23529$ que, na Figura 6(b), corresponde à área do gnómon maior. Para determinar d tem que se ter em consideração a sua presença em dois retângulos e num quadrado (Figura 6(b)), ou seja, d tem que ser tal que

$$2.100.5.10.d+(10.d)^2\leq 23529 \qquad (2)$$

Para simplificação de cáculos observemos quais valores de d satisfazem $2.100.5.10.d \leq 23529$. Esta desigualdade vale para $d=0,1,2$. Por experimentação, vejamos qual é o maior destes valores que satisfaz (2). Ora, se $d=2$, vem $2.100.5.10.2+(10.2)^2=\ 20400<23529$. Assim, conclui-se que $d=2$.

Faça-se, agora, a diferença entre 23529 e 20400, $23529-20400=3129$ que corresponde, na Figura 6(c), à área do gnómon menor.

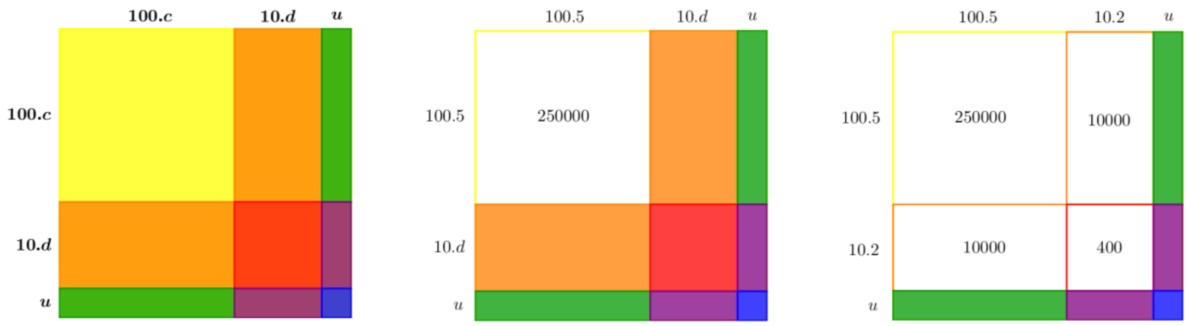

Figura 6(a) Figura 6(b) Figura 6(c)

Figura 6. Representação da decomposição em classes para o cálculo da $\sqrt{\square\square\square\square\square\square}$. Fonte: Os autores (2020).

Finalmente, para determinar u tem que se ter em consideração a sua presença em dois retângulos e num quadrado (Figura 6), ou seja, u tem que ser tal que

$$2.(100.5 + 10.2).u + u^2 \leq 3129 \quad (3)$$

Para simplificação de cáculos vejamos que valores de d satisfazem $2.(100.5 + 10.2)u \leq 3129$. Esta desigualdade vale para $u \leq 3$. Por experimentação obtenhamos qual é o maior valor que satisfaz (3). Ora, se $u = 3$, vem $2.(100.5 + 10.2).3 + 3^2 = 3129$. Assim, conclui-se que $u = 3$. E a raiz é exata: $k = \sqrt{263169} = 523$.

De acordo com Hodgson (2008, p.18), se o número n não fosse um quadrado perfeito, tal não seria impedimento para usar o mesmo processo, uma vez que “o algoritmo dá, um a um, os algarismos da raiz quadrada, qualquer que seja o seu valor posicional”, a discussão feita “podia ser assim facilmente transposta para o caso de uma raiz quadrada não inteira”.

Para finalizar a presente seção convém referir que a determinação da raiz quadrada de número que não seja quadrado perfeito é um tipo de problema que pode levar à utilização de métodos numéricos que conduzem a uma solução aproximada, como os métodos des Heron e Theon. Nestes métodos, se incluem os chamados métodos iterativos, que estão associados aos conceitos de aproximação por repetição sucessiva de um processo (iteração) e ao de aproximação local.

Assim, é gerada uma sequência de soluções aproximadas que vão melhorando à medida que as iterações são executadas e que convergem para o valor procurado. Entre os métodos iterativos, destacamos o método de Newton-Raphson, o método do ponto fixo, o método da bisseção e o método dos babilônicos.

A implementação destes métodos pode levar a cálculos fastidiosos que, com o advento da computação, deixaram de ser efetuados a mão, fazendo com que suas soluções fossem obtidas de forma bem mais rápida. Não é nosso objetivo fazer aqui a exposição desses métodos, a sua explicação pode ser encontrada nas referências citadas no início da seção.

4. Como os Egípcios calculavam raízes quadradas

O problema 50 do papiro de Rhind trata de encontrar a área de um círculo, dado seu diâmetro, e aproxima-a pela área do quadrado cujo lado é igual a $\frac{8}{9}$ do referido diâmetro. Uma questão intrigante é saber de onde surge este valor. Ora, esse valor surge no problema 48 do mesmo papiro, e decorre do cálculo da área de um óctogono inscrito num quadrado de lado igual ao diâmetro do referido círculo. Na sequência do problema 48, ao procurar o quadrado com área igual à do octógono, surge a necessidade de representar um quadrado de área igual a $\frac{63}{81}$, o que equivale a calcular a raiz quadrada de $\frac{63}{81}$. (Katz, 2012 p. 28).

Para resolver este problema, os egípcios começaram por procurar um retângulo com igual área. Dos possíveis retângulos por eles conhecidos, escolheram aquele que tem lados mais próximos, ou seja, cuja forma é mais próxima do quadrado. Assim, para encontrar um quadrado com área $\frac{63}{81}$, partiram do retângulo de lados $\frac{7}{9}$ e $\frac{9}{9}$ (Figura 7(a)).

Após isso, numa tentativa de transformar o retângulo no quadrado desejado, consideravam no retângulo inicial um quadrado de lado $\frac{7}{9}$ (o menor lado do retângulo), sobrando um retângulo de lados $\frac{7}{9}$ e $\frac{2}{9}$ (Figura 7(b)). Dividiam o retângulo restante, de lados $\frac{7}{9}$ e $\frac{2}{9}$, em dois retângulos iguais (Figura 7(c)). Em seguida colavam um destes pequenos retângulos sobre um dos dois lados consecutivos do quadrado. Originando um gnomon (Figura 7(d)).

Os egípcios não estavam interessados no cálculo da raiz quadrada em si, mas na sua utilização para obter uma aproximação para a área do círculo. Apesar do erro cometido, eles estavam satisfeitos com a aproximação obtida e consideraram que o quadrado de lado $\frac{8}{9}$ era uma aproximação suficiente para a área pretendida, não se importando com o pequeno quadrado a mais, de área $\frac{1}{81}$. Assim, eles tinham que $\sqrt{\frac{63}{81}} \approx \frac{8}{9}$, esta aproximação por excesso com um erro inferior a $\frac{1}{9}$ (Figura 7(e)).

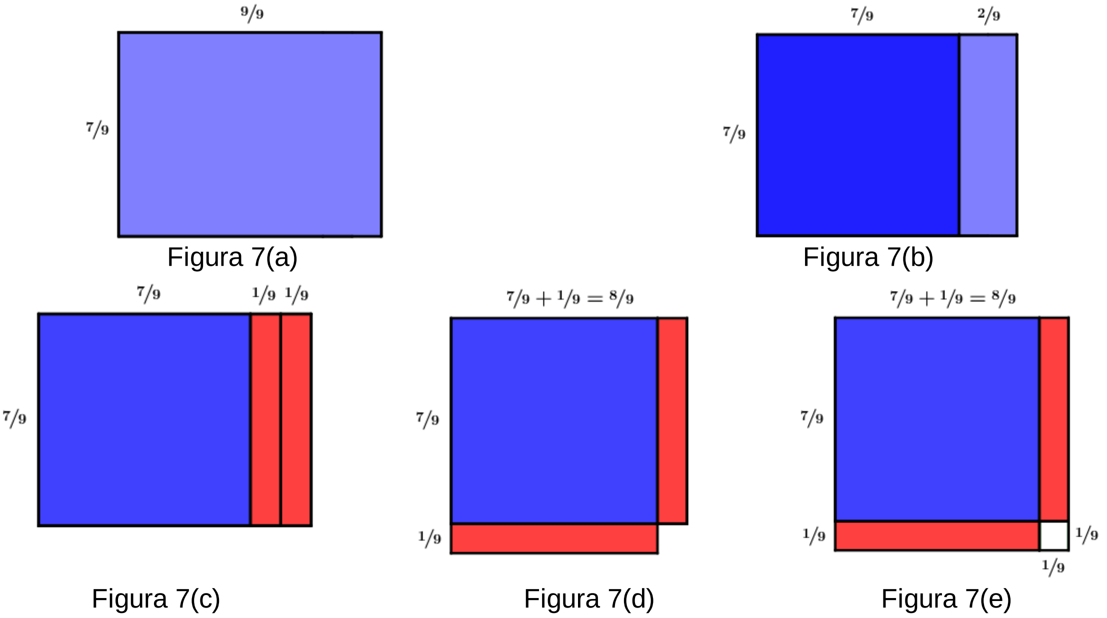

Figura 7. Representação do retângulo de área $\frac{□□}{□□}$ e a decomposição em lados $\frac{□}{□}$ e $\frac{□}{□}$. Fonte: Os autores (2020).

Apesar de não se terem encontrado outros exemplos de cálculo da raiz quadrada, existe num papiro a referência que $\sqrt{\frac{61}{4}}$ é $\frac{21}{2}$. Repare-se que o erro cometido neste caso é muito grande já que $\left(\frac{21}{2}\right)^2 = \frac{441}{4}$. Terá sido um erro do escriba ao fazer a anotação? Ou o erro é cometido no cálculo pelo método anterior e se deve ao fato de 61 ser um número primo o que dificultaria a decomposição em fatores, necessária para o quadrado inicial?

Esta e outras questões nos levaram a fazer algumas considerações sobre o presente método e que serão vistas na próxima seção.

5. Complementando os cálculos dos Egípcios

Objetivando refletir sobre os questionamentos feitos na seção anterior e ampliar alguns estudos relacionas ao cálculo de raízes quadradas utilizando o mesmo método que os egípcios, vamos fazer algumas considerações que decorrem do fato de $\frac{63}{81} = \frac{7}{9}$. Vale ressaltar que o uso de $\frac{63}{81}$ e não da fração geratriz $\frac{7}{9}$, por parte dos egípcios, deve-se a motivos já mencionados.

Para calcular $\sqrt{\frac{7}{9}}$, se pode pensar no resultado obtido pelos egípcios para $\sqrt{\frac{63}{81}}$ atendendo a que $\frac{63}{81} = \frac{7}{9} \times \frac{9}{9}$, eles partiram de um retângulo de lados $\frac{9}{9} = 1$ por $\frac{7}{9}$ e obtiveram $\sqrt{\frac{63}{81}} \approx \frac{8}{9}$ com erro inferior a $\frac{1}{9}$. Repare-se que pelo fato de $\frac{9}{9} = \frac{k}{k} = 1, k \in IN^*$, qualquer que fosse o valor de k eles obteriam sempre o mesmo valor aproximado e o mesmo majorante do erro, desde que utilizassem um retângulo de lados $\frac{7}{9}$ e $\frac{k}{k} = 1$.

Generalizando o raciocínio dos egípcios, pode se enunciar a seguinte

Proposição 1: Sejam $a, b, k \in \mathrm{IN}^*$, com $a < b$. Se para o cálculo aproximado da $\sqrt{\frac{a}{b}}$ se utiliza uma qualquer fração equivalente e a decomposição feita for $\frac{a}{b}$ e $\frac{k}{k}$, então $\sqrt{\frac{a}{b}} \approx \frac{a+b}{2b}$ e o erro cometido é inferior a $\frac{b-a}{2b}$.

Prova: Faz-se inicialmente a diferença $\frac{k}{k} - \frac{a}{b} = \frac{(b-a)k}{bk} = \frac{b-a}{b}$ para, a partir de um retângulo de lados $\frac{k}{k} = 1$ e $\frac{a}{b}$, obter um quadrado de lado $\frac{a}{b}$ e um retângulo de lados $\frac{k}{k} = 1$ e $\frac{b-a}{b}$. Continuando, este retângulo será dividido em dois retângulos congruentes de dimensões $\frac{k}{k} = 1$ e $\frac{b-a}{2b}$. Um desses retângulos será deslocado para um lado consecutivo do quadrado gerando um gnomon, que difere $\left(\frac{b-a}{2b}\right)^2$ de um quadrado de lado $\frac{a}{b} + \frac{(b-a)}{2b} = \frac{a+b}{2b}$, completando assim a prova.

Uma pergunta que ocorre, agora, é a seguinte:

Será que, partindo de uma fração equivalente a $\frac{7}{9}$ e usando a construção de um outro tipo de retângulo, se consegue obter uma melhor aproximação de $\sqrt{\frac{7}{9}}$ e que minimize o majorante do erro encontrado?

Para responder a essa questão vamos decompor a fração $\frac{7k}{9k}, k \in IN^*$ num produto de duas frações da seguinte forma: $\frac{7k}{9k} = \frac{7}{k} \times \frac{k}{9}$. Partindo, assim, de um retângulo de dimensões $\frac{7}{k}$ e $\frac{k}{9}$. Para construir o quadrado e posteriormente o gnomon, tem que ser calculada a diferença entre o maior e o menor lado do retângulo.

Assim, deve se considerar a seguinte diferença, em módulo: $\left|\frac{7}{k} - \frac{k}{9}\right| = \left|\frac{63-k^2}{9k}\right|$ e ver o quanto ela permite obter um erro inferior a $\frac{1}{9}$. $\left|\frac{63-k^2}{9k}\right| < \frac{2}{9} \#(4)$

Representando graficamente a desigualdade (4) e restringindo apenas aos números inteiros positivos, temos que $k = 8$ é a única solução (Figura 8).

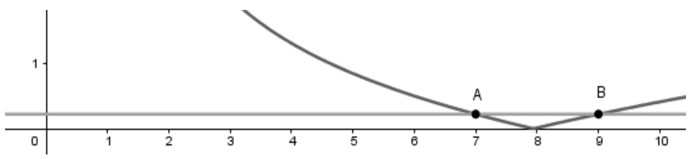

Figura 8. Representação gráfica das funções $\mathbf{f(x) = \left|\frac{63-k^2}{9k}\right|}$ e $\mathbf{g(x) = \frac{2}{9}}$. Fonte: Os autores (2020).

Algebricamente, o desenvolvimento de (4) é dado por: $-\frac{2}{9} < \frac{63-k^2}{9k} < \frac{2}{9}$.

$$-2 < \frac{63 - k^2}{k} < 2$$

Como $k > 0$ vem $-2k \underbrace{<}_{(*)} 63 - k^2 \underbrace{<}_{(**)} 2k$. De $(*)$ temos que $k^2 - 2k - 63 < 0$

Assim, o subconjunto dos naturais que satisfaz esta inequação é $S = \{k \in IN^* : k < 9\}$. Analogamente, de $(**)$ temos que $k^2 + 2k - 63 > 0$.

Que é satisfeito para $S' = \{k \in IN^* : k > 7\}$. Qualque valor de $S \cap S'$ melhora o erro encontrado anteriormente, o que no caso ocorre apenas com $k = 8$.

Assim, para calcular a $\sqrt{\frac{7}{9}}$ vamos utilizar $\sqrt{\frac{56}{72}}$, iniciando o processo com um retângulo de lados $\frac{8}{9}$ por $\frac{7}{8}$ (Figura 9(a)).

Ao construir o quadrado de lado $\frac{7}{8}$, vai restar um retângulo de dimensões $\frac{7}{8}$ por $\frac{1}{72}$ (Figura 9(b)). Em seguida, o retângulo restante é dividido em dois retângulos iguais de dimensões $\frac{7}{8}$ por $\frac{1}{144}$, em que um destes retângulos será deslocado para o lado adjacente (Figura 9(c)). O que nos leva a obter para a raiz quadrada a fração $\frac{127}{144}$ e um majorante do erro igual a $\frac{1}{144}$ (Figura 9(d)).

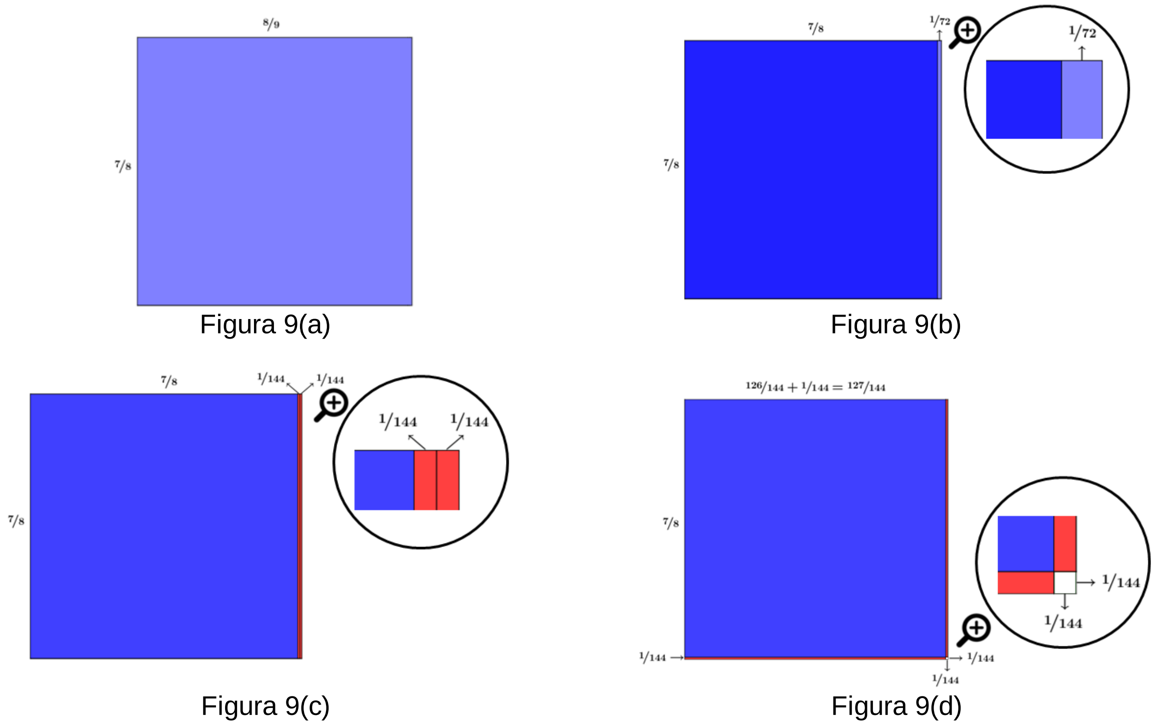

Figura 9. Retângulo de área $\frac{\square\square}{\square\square}$ e lados $\frac{\square}{\square}$ e $\frac{\square}{\square}$. Fonte: Os autores (2020).

O que foi observado, leva-nos a enunciar a seguinte proposição:

Proposição 2: Sejam $a, b, k \in \mathrm{IN}^*$, com $a < b$. Se para o cálculo aproximado da $\sqrt{\frac{a}{b}}$ for utilizada uma qualquer fração equivalente a $\frac{a}{b}$ e se a decomposição feita for $\frac{a}{k}$ e $\frac{k}{b}$, então o valor de k, que minimiza, o erro pertence ao conjunto $U = \{k \in IN^* : a < k < b\}$

e é aquele cujo quadrado perfeito é o mais próximo de ab e um majorante do erro é $\frac{|k^2-ab|}{2kb}$.

Prova: Para construir o quadrado e obter o majorante do erro, faz-se a diferença entre o maior e o menor dos lados, que é dada por $\left|\frac{a}{k}-\frac{k}{b}\right|$. Pretende-se saber quando esta diferença é menor do que a obtida na Proposição 1

Como consequência tem-se $\left|\frac{a}{k}-\frac{k}{b}\right| = \left|\frac{ab-k^2}{kb}\right| < \frac{b-a}{b}$

Ou seja, $\frac{a-b}{b} < \frac{ab-k^2}{kb} < \frac{b-a}{b}$. Assim, temos $a-b < \frac{ab-k^2}{k} < b-a$.

Logo, $(a-b)k \underbrace{<}_{(*)} ab-k^2 \underbrace{<}_{(**)} (b-a)k$

De $(*)$, temos a seguite desigualdade $k^2+(a-b)k - ab < 0$. Ou $k^2-(b+(-a))k - ab < 0$

Assim, se $k \in IN$ satisfaz a inequação, temos que $S = \{k \in IN^* : k < b\}$. Analogamente, para a inequação $(**)$, temos $k^2+(b-a)k - ab > 0$

Ou melhor, $k^2-(a+(-b))k - ab > 0$

Assim, se $k \in IN$ satisfaz a inequação, temos que $S' = \{k \in IN^* : k > a\}$. O conjunto $S \cap S' \neq \emptyset$, se $b \neq a+1$. Então, o valor que minimiza a situação proposta está neste conjunto. Se $S \cap S' = \emptyset$, então $b = a+1$ e $k = a$ ou $k = a+1$.

Para concluir a demosnstração, temos que o majorante do erro é dado por $\left|\frac{ab-k^2}{2kb}\right|$ e o valor de $k \in]a,b[$ que minimiza esta expressão é o valor de k que torna mínimo o valor da expressão $|k^2-ab|$, ou seja, é aquele cujo quadrado é o mais próximo de ab. ■

De acordo com o que foi visto anteriormente, observar-se uma melhora considerável na aproximação para $\sqrt{\frac{7}{9}}$ ao tomar $k=8$ em comparação ao $k = 9$ e, além disso, concluí-se que a aproximação utilizada minimiza o majorante do erro, respondendo assim aos questionamentos propostos anteriormente.

Considerando ainda, como referencial, o método utilizado pelos egípcios para o cálculo de raízes quadradas, passamos a analisar a aproximação obtida para raízes cujo radicando é do tipo $\frac{a}{b}$, com $a > b$ e $b \neq 0$. Sendo assim, as duas próximas proposições analisarão esses casos.

Proposição 3: Sejam $a, b, k \in IN^*$, com $a > b$, $b = 1$ e seja k^2 o quadrado perfeito mais próximo de *a*. Se, para o cálculo aproximado da $\sqrt{a}$ e utilizar a fração equivalente $a \times \frac{k^2}{k^2}$ e a decomposição feita for $\frac{a}{k}$ e $\frac{k^2}{k}$, então $\sqrt{a} \approx \frac{a+k^2}{2k}$ e o erro cometido é inferior a $\left|\frac{k^2-a}{2k}\right|$.

Prova: Calcula-se inicialmente o módulo da diferença $\left|\frac{k^2}{k}-\frac{a}{k}\right| = \left|\frac{k^2-a}{k}\right|$ para, a partir de um retângulo de lados $\frac{k^2}{k} = k$ e $\frac{a}{k}$, obter um quadrado de lado $m = min\left\{\frac{a}{k}, k\right\}$ e um retângulo de lados m e $\left|\frac{k^2-a}{k}\right|$. Continuando, este retângulo será dividido em dois retângulos congruentes de dimensões m e $\left|\frac{k^2-a}{2k}\right|$. Um desses retângulos será deslocado para um lado consecutivo do quadrado gerando um gnomon, que difere $\left(\frac{k^2-a}{2k}\right)^2$ de um quadrado de lado $m + \left|\frac{k^2-a}{2k}\right| = \frac{a+k^2}{2k}$, completando assim a prova. ■

A proposição anterior indica-nos um processo para a determinação de valores aproximados de raízes quadradas de números inteiros, no entanto nada garante se este processo nos fornece a "melhor" aproximação. Sabemos apenas, que quanto mais próximo de k^2 se encontrar o radicando, melhor será a aproximação obtida. Vejamos os seguintes exemplos:

Exemplo 1: Para a aproximação de $\sqrt{24}$, temos que o quadrado perfeito mais próximo de 24 é o $25 = 5^2$. Assim, usando $24 = 24 \times \frac{25}{25} = \frac{24}{5} \times \frac{25}{5}$, iremos obter $\sqrt{24} \approx \frac{24}{5} + \frac{1}{10} = 4{,}9$, com erro inferior a $\frac{1}{10}$. Repare que a aproximação dada pela calculadora fornece $\sqrt{24} \approx 4{,}8989794856\ldots$

Exemplo 2: Para a aproximação de $\sqrt{5}$, temos que o quadrado perfeito mais próximo de 5 é $4 = 2^2$. Assim, usando $5 = 5 \times \frac{4}{4} = \frac{5}{2} \times \frac{4}{2}$, iremos obter $\sqrt{5} \approx \frac{4}{2} + \frac{1}{4} = 2{,}25$, com erro inferior a $\frac{1}{4}$. Note que o valor fornecido pela calculadora é $\sqrt{5} \approx 2{,}2360679775\ldots$

Exemplo 3: Para a aproximação de $\sqrt{2}$, temos que o quadrado perfeito mais próximo de 2 é $1 = 1^2$. Assim, usando $2 = 2 \times \frac{1}{1} = \frac{2}{1} \times \frac{1}{1}$, iremos obter $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5$, com um erro inferior a $\frac{1}{2}$. Vale ressaltar que ao usar $k^2 = 4 = 2^2$ viria $2 = 2 \times \frac{4}{4} = \frac{2}{2} \times \frac{4}{2}$, que origina a mesma aproximação! Por que ocorreu esta situação? Isso se deve ao fato de $x = 1$ e $x = 2$ serem os inteiros que minimizam $f(x) = \frac{|x^2-2|}{x}$, Figura 10.

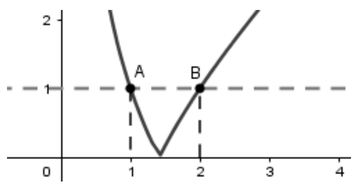

Figura 10. Parte do gráfico da função $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \frac{|\mathrm{x}^2-2|}{\mathrm{x}}$. Fonte: Os autores (2020).

Também para o cálculo aproximado de $\sqrt{7}$, há dois valores inteiros consecutivos que originam a mesma aproximação, o quadrado perfeito 9 (como indicado na proposição) e o 8.

Vimos, no exemplo 3, que ao utilizar a proposição 3 que ao encontrar uma aproximação para $\sqrt{2}$, foi obtido $1{,}5$ com erro inferior a $0{,}5$. Porém, a aproximação dada pela calculadora é $\sqrt{2} \approx 1{,}4142135624\ldots$, pelo que aquela está longe de ser a melhor aproximação que o método dos egípcios nos permite obter. Ora, $2 = \frac{24}{12}$ e ao calcular $\sqrt{\frac{24}{12}}$ fazendo a decomposição $\frac{24}{12} = \frac{6}{4} \times \frac{4}{3}$ vamos obter $\sqrt{\frac{24}{12}} \approx \frac{4}{3} + \frac{1}{12} = 1{,}41\overline{6}$. Da mesma forma ocorre para $3=\frac{24}{8}$, pois ao calcular $\sqrt{\frac{24}{8}}$ e fazendo a decomposição $\frac{24}{8}=\frac{6}{4}\times\frac{4}{2}$ vamos obter $\sqrt{\frac{24}{8}}=\frac{6}{4}+\frac{1}{4}=1{,}75$.

Nos casos anteriores obteve-se uma melhor aproximação para o cálculo de raízes quadradas de números primos do que a obtida com a proposição 3. Do mesmo modo, melhores aproximações também podem ser obtidas em alguns casos para números compostos, por exemplo, no cálculo de $\sqrt{6}$ pode-se usar a fração equivalente $\frac{60}{10}$ e, fazendo a decomposição $\frac{60}{10}=\frac{12}{5}\times\frac{5}{2}$, vamos obter $\sqrt{\frac{60}{10}}=\frac{12}{5}+\frac{1}{20}=2{,}45$. Assim, após vários experimentos efetuados com o GeoGebra surgiram as seguintes conjecturas:

Conjectura 1: Sejam $a,k\in IN$. Se para o cálculo aproximado de $\sqrt{a}$ se utiliza a fração equivalente $a\times\frac{k}{k}$ e $k=m\times n$ é tal que m, n são fatores consecutivos de k, com $m\leq n$. Então, o valor de k que dever ser escolhido para melhorar a aproximação de $\sqrt{a}$ é aquele que minimiza $|a\times m^2-n^2|$.

Conjectura 2: Se $a\times\frac{k}{k}$ for decomposto de forma que $a\times k=m\times n$ e $k=p\times q$ pode-se escrever $a\times\frac{k}{k}=\left(\frac{m}{p}\right)\times\left(\frac{n}{q}\right)$ de forma que $\left|\frac{m}{p}-\frac{n}{q}\right|$ seja mínima, para que o retâncgulo se aproxime do quadrado.

Para finalizar e com o objetido de responder o questionamento feito sobre $\sqrt{\frac{61}{4}}$, vamos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 4: Sejam $a,b,k\in IN^*$, com $a>b$ e seja k^2 o quadrado perfeito mais próximo de $\frac{a}{b}$. Se, para o cálculo aproximado da $\sqrt{\frac{a}{b}}$ se utilizar a fração equivalente $\frac{a}{b}\times\frac{k^2}{k^2}$ e a decomposição feita for $\frac{a}{k^2}$ e $\frac{k^2}{b}$, então $\sqrt{\frac{a}{b}}\approx\frac{ab+k^4}{2bk^2}$ e o erro cometido é inferior a $\left|\frac{k^4-ab}{2bk^2}\right|$.

Prova: Considerem-se os dois fatores da decomposição, calcule-se inicialmente o módulo da sua diferença, $\left|\frac{k^2}{b}-\frac{a}{k^2}\right|=\left|\frac{k^2-ab}{bk}\right|$ para, a partir de um retângulo de lados $\frac{k^2}{b}$ e $\frac{a}{k^2}$, obter um quadrado de lado $m=min\left\{\frac{a}{k^2},\frac{k^2}{b}\right\}$ e um retângulo de lados m e $\left|\frac{k^4-ab}{bk^2}\right|$. Este retângulo será dividido em dois retângulos congruentes de dimensões m e $\left|\frac{k^4-ab}{2bk^2}\right|$. Um desses retângulos será deslocado para um lado consecutivo do quadrado gerando um gnomon, cuja área difere $\left(\frac{k^4-ab}{2bk^2}\right)^2$ de um quadrado de lado $m+\left|\frac{k^4-ab}{2bk^2}\right|=\frac{ab+k^4}{2bk^2}$, completando assim a prova. ■

A proposição anterior nos permite responder, em parte, aos questionamentos colocados acerca da $\sqrt{\frac{61}{4}}$. Utilizando a decomposição $\frac{61}{4}=\frac{61}{16}\times\frac{16}{4}$ e obtem-se $\sqrt{\frac{61}{4}}=\frac{61}{16}+\frac{3}{32}\approx 3{,}90625$ e o valor dado pela calculadora é $3{,}905124838\ldots$

Nos vários experimentos efetuados com o GeoGebra sempre testamos o $\frac{61}{4}$ e em nenhum deles foi obtido algum valor próximo de $\frac{21}{2}$. Assim, parece ser, o engano do escriba ao efetuar a anotação, a razão mais plausível.

6. Algumas considerações finais

Este artigo se propôs realizar uma viagem pela História da Matemática, compilando e resgatando diferentes estudos sobre formas de calcular/aproximar a raiz quadrada de um número positivo, trazendo também as implicações desses estudos para os dias atuais.

A presença do pensamento, historicamente produzido e presente na literatura, constituiu instrumento basal para a generalização de um processo de cálculo da raiz quadrada. Diferentes processos e diferentes representações geométricas podem ser usadas para se obter de forma aproximada a raiz quadrada. Além disso, o uso de tecnologias é elemento facilitador do entendimento da essência dos processos e das representações.

O desenvolvimento das representações tem sido objeto de estudo por diversos autores e, a partir deles, se pode observar a sua evolução histórica e a sua importância não só no estímulo ao desenvolvimento do pensamento matemático, como também, na transposição didática dos objetos geométricos.

Neste contexto, insere-se a utilização dos softwares de geometria dinâmica, (em particular o GeoGebra) que são instrumentos que auxiliam o professor e os alunos não só na visualização geométrica dos métodos, como também por serem ferramentas de grande valor e importância para a pesquisa em Matemática.

Dentre os diversos métodos apresentados para uma possível aproximação da raiz quadrada, focou-se no método egípcio, pois além de ser um método de fácil compreensão, permite obter resultados satisfatórios. Recorrendo à utilização do GeoGebra para a representação geométrica, este método pode ser facilmente entendido por alunos da educação básica e ser utilizado em atividades diversas para sala de aula.

Aperfeiçoamentos e generalizações desse método foram propostos, baseados em proposições demonstradas e conjecturas, de forma a que se desse resposta aos questionamentos colocados.

Referências

Barone, M. (1983). O algoritmo da raiz quadrada. *Revista do Professor de Matemática (RPM)*, n. 2.

Bastos, C. L. (2016). *Representações em Matemática: Observações para o Ensino e a Aprendizagem em Geometria* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Brasil.

Carvalho, J. B. P. (2010). A raiz quadrada ao longo dos séculos. *In: V Bienal da SBM*, Anais. Paraíba.

D'Ambrosio, U (1999). A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (org.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: UNESP, 97-115.

Duval, R.; Moretti, Trad. M. T. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Revista Eletrônica de Educação Matemática,* Florianópolis, 7(2), 266-297.

Flores, C. R. (2003) *Olhar, Saber, Representar: Ensaios sobre a representação em perspectiva*, (Tese de Doutorado). Universidade Federal de Santa Caratina. Floranópolis, Brasil.

Katz, V. J. (2010). *História da Matemática*.Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

Lima, M. V. A. (2013). *Uma contribuição ao ensino do cálculo de raízes quadradas e Cúbicas*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, Brasil.

Hefez, A. (2011) *Elementos de Aritmética* (2ª ed). Rio de Janeiro: SBM.

Hogdson, B. (2008). Uma Breve História da Quinta Operação. *Gazeta de Matemática,* 156, 7-30.

Mankiewicz, R. (2001) *L'histoire des mathématiques*. França: Le Seuil.

Makowiecky, S. (2003). Representação: a palavra, a idéia, a coisa. *Cadernos de Pesquisa Interdisciplinar em Ciências Humanas*, 4(57), 1-25.

Melo, H. S. (2016). Raízes quadradas sem calculadora. *Correio dos Açores*. Portugal. Último acesso em: 29 junho de 2020, de https://repositorio.uac.pt/bitstream/10400.3/4016/1/Raizes%20quadradas%20sem%20calculadora_25_08_2016.pdf

Petla, R. J. (2008). *GeoGebra – Possibilidades para o Ensino de Matemática*. Unidade Didática no Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE – Universidade Federal do Paraná, União da Vitória.

Rampazzo, L. (1985). A Raiz Quadrada sem Tabus. *Revista de Ensino de Ciências*. São Paulo, 14, 28-32.

Ribeiro, F. N. F. (2008) *Internet e Imagem: representações de jovens universitários.* (Tese de Doutorado). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

Silva, A.O. (2013). *O Cálculo da Raiz Quadrada Através dos Séculos*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal da Paraíba, Paraíba, Brasil.

Autores:

Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa: Doutora em Matemática pela Universidade de Aveiro – Portugal. É professora do Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, RJ – Brasil onde atua na Educação Básica e nos cursos de formação de professores da pós-graduação. É pesquisadora do Núcleo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática - NEPEM. E-mail: lmgccosta@gmail.com / liliana.costa.1@cp2.edu.br.

João Domingos Gomes da Silva Junior: Mestre em Matemática Aplicada pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Brasil. Atualmente é professor do Colégio Pedro II, ministrando aulas para alunos de Ensino Fundamental e Médio e no curso de pós-graduação na formação de professores. É pesquisador do Núcleo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática - NEPEM. E-mail: joao.dgomes@gmail.com.

Daniele Simas Pereira Alves: Mestre em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Atualmente é professora do município de São Gonçalo e professora do Colégio Santa Teresa de Jesus, no Rio de Janeiro, onde atua na Educação Básica. É pesquisadora do Núcleo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática - NEPEM. E-mail: daniele.simas@gmail.com.