REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 55.Abril 2019
Páginas 144-158

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Una nueva mirada a los poliedros regulares: Construcciones que generan sorpresas

Magali Lucrecia Freyre, Ana María Mántica

Fecha de recepción: 28/01/2019
Fecha de aceptación: 15/04/2019

Resumen

En este trabajo se plantea el análisis de lo realizado por estudiantes de tercer año de profesorado en matemática en la resolución de dos problemas de geometría tridimensional con GeoGebra y Polydron. Para lograr en los alumnos una imagen conceptual rica del concepto de poliedro regular se propone la construcción con GeoGebra de poliedros que cumplan sólo algunas de las condiciones solicitadas por la definición de este tipo de sólidos. Los poliedros construidos representan una sorpresa para los estudiantes quienes no vislumbran en un principio la posibilidad de existencia de los mismos.
Palabras clave: GeoGebra - Poliedro regular - Construcciones - Conjeturas

Abstract

In this paper, the analysis of what was done by third-year students of mathematics teachers in solving two problems of three-dimensional geometry with GeoGebra and Polydron is presented. In order to achieve a rich conceptual image of the concept image of regular polyhedron in the students, we propose the construction with GeoGebra of polyhedrons that fulfill only some of the conditions requested by the definition of this type of solids. The constructed polyhedrons represent a surprise for the students who do not foresee in the beginning the possibility of their existence.
Keywords: GeoGebra - Regular polyhedron - Constructions - Conjectures

Resumo

Neste artigo é apressentada uma análise do que foi feito pelos estudantes do terceiro ano do professorado de matematica na resolução de dois problemas de geometria tridimensional com GeoGebra y Polydron. A fim de obter uma imagem rica sobre o conceito de poliedro regular nos estudantes, propomos a construção com GeoGebra de poliedros que preenchem apenas algumas das condições solicitadas pela definição deste tipo de solido. Os poliedros construídos representam uma supresa para os estudantes, que não vislumbram de início a possibilidade de existência dos mesmos.
Palavras-chave: GeoGebra - Poliedro regular - Construções - Conjecturas

1. Introducción

El trabajo en geometría posee una destacada importancia en el plan de estudio del profesorado en matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral, como así también el uso de software de geometría dinámica (SGD) para la elaboración y validación de conjeturas.

Los problemas que se presentan en este trabajo tienen por objetivo resignificar el concepto de poliedro regular a partir de la construcción de poliedros no regulares que cumplen algunas de las condiciones exigidas por la definición de poliedro regular[1]. Los estudiantes de tercer año de este profesorado al resolver los problemas que se presentan en este trabajo, prueban la existencia de poliedros no regulares de caras triangulares que cumplen con esta característica. Esto permite no solo que se reflexione sobre los alcances de la definición de poliedro regular sino que al emplear GeoGebra y Polydron[2], se realicen exploraciones sobre las construcciones logradas para elaborar conjeturas acerca de la existencia de dichos poliedros y establecer argumentos que permitan validarlas. Los recursos posibilitan en este caso que se establezcan conjeturas que con lápiz y papel serían poco probables.

Este tipo de propuestas representa un ejemplo en el que la tecnología se integra a las prácticas favoreciendo especialmente que se cumplan los objetivos previstos. No solo por el dinamismo que ofrece el software para observar multiplicidad de casos con una única construcción, sino por las ventajas de construir representaciones dinámicas tridimensionales con solo hacer clic en las herramientas adecuadas (GeoGebra) o a partir del encastrado de polígonos (Polydron). Esto hace de la utilización del software un aspecto imprescindible para resolver los problemas, que revaloriza el trabajo en geometría tridimensional, particularmente en el desarrollo del concepto de poliedro regular. Los recursos empleados brindan la posibilidad de construir y explorar. Estas acciones tienden a formar imágenes conceptuales ricas de los conceptos (Vinner y Dreyfus, 1989).

Se pretende a través de la resolución de los problemas presentados enriquecer la imagen conceptual de poliedro regular que tienen los estudiantes, posibilitando que el conjunto de ejemplos de este concepto también se enriquezca. Esto permite que haya una mayor coincidencia entre ese conjunto y el determinado por la definición de poliedro regular.

La propuesta presentada tiende a sorprender a los estudiantes con la existencia de algunos poliedros en los que difícilmente hayan puesto su atención previamente. Cabe destacar que en numerosas oportunidades cuando los alumnos mencionan tetraedro, octaedro y dodecaedro por ejemplo, consideran que son regulares. Esto puede deberse a dos aspectos. Por un lado, el autor del material bibliográfico trabajado en la cátedra donde se desarrolla la experiencia, cuando

[1]Se consideran poliedros regulares convexos a aquellos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices concurren el mismo número de ellas.

[2]Polydron es un recurso didáctico formado por polígonos realizados en plástico que poseen bisagras que permiten encastre. Los tipos de polígonos que lo forman son: triángulos equiláteros (pequeños y grandes), triángulos isósceles acutángulos, triángulos isósceles rectángulos, cuadrados, rectángulos, pentágonos regulares, hexágonos regulares y octógonos regulares.

presenta los poliedros regulares, expresa que se va a referir a ellos sin agregar la condición de regular dado que generalmente emplea este tipo de poliedros. Si en algún caso especial considera alguno de ellos no regular, lo explicita. Por otro lado, el software GeoGebra ofrece una herramienta de construcción denominada *Tetraedro*, con la cual se construye un tetraedro regular.

Se analiza lo realizado por los estudiantes al resolver los problemas planteados en relación a la elaboración y validación de sus conjeturas a partir de grabaciones de audio y video y archivos del software.

2. Marco de referencia

Se consideran referentes teóricos que estudian por un lado la enseñanza de poliedros con distintos materiales y de las relaciones entre sus elementos. Por otro los que analizan las ideas referidas a la influencia de las imágenes mentales que se tienen de un concepto y su definición. Así mismo referentes que trabajan sobre la influencia de un software de geometría dinámica (SGD) en la formulación y validación de conjeturas y el tipo de construcciones que se realizan con los mismos.

En lo referente al empleo de diferentes materiales para la construcción de sólidos, Guillén (2010) sostiene que prismas y pirámides pueden realizarse empleando distintos procedimientos, considerando objetos del entorno o plegado de papel. Plantea cómo determinados modelos pueden orientar a los estudiantes "a contar de manera estructurada su número de caras, vértices, aristas y otros elementos de los poliedros (ángulos de las caras, ángulos diedros, diagonales de las caras, diagonales del espacio)" (p.32), obtener una generalización y expresarla simbólicamente, pero esto conlleva mayor dificultad. Propone utilizar variadas herramientas de construcción que permitan centrar la atención en distintos elementos del poliedro y lleven a diferentes estrategias para hallar el número de ellos. Es interesante que estos números puedan determinarse a partir del modelo físico pero también sin tener como referencia la construcción, "apoyándose en la fuerza de los razonamientos deductivos y en el conocimiento que se tienen de las propiedades" (p.33) siendo esto más interesante cuando se trata de familias de poliedros que no son las habitualmente consideradas.

Por otra parte, Guillen (2010) sostiene que el trabajo con poliedros regulares y arquimedianos es muy interesante. Plantea actividades que permiten determinar las relaciones entre ellos, realizando construcciones para determinar composiciones y descomposiciones entre los mismos, estableciendo inscripciones, truncamientos, etc.

Así mismo Vinner y Dreyfus (1989) en lo que refiere a las imágenes mentales de un concepto y su definición, afirman que todos los conceptos matemáticos excepto los primitivos tienen definiciones formales. Los estudiantes no necesariamente usan las definiciones, aún cuando son trabajadas, para decidir si un objeto matemático dado es un ejemplo o un no ejemplo de un concepto. En la mayoría de los casos deciden en base a su imagen conceptual. Este término refiere al conjunto de todas las imágenes mentales asociadas en la mente del estudiante con el nombre del concepto, junto con todas las propiedades que lo caracterizan. Por imagen mental se entiende a todo tipo de representación: símbolos, diagramas, gráficos, entre otras. La imagen del estudiante es un resultado de su experiencia con ejemplos y no ejemplos del concepto. El conjunto de los objetos matemáticos considerados por los estudiantes como ejemplos del concepto no es necesariamente el mismo que el conjunto de objetos matemáticos determinados por la definición. Si estos dos conjuntos no coinciden, el comportamiento del estudiante puede diferir de lo que el docente espera. Es importante entender por qué esta comunicación falla, explorando las imágenes de los estudiantes acerca de varios conceptos matemáticos.

Por otra parte, Tall (1989) sostiene que tradicionalmente la forma de enseñar matemática consiste en comenzar a partir de conceptos simples y familiares para el alumno para luego a partir de resolver secuencias de actividades, construir ideas más complejas. Esto puede causar serias dificultades en el aprendizaje dado que la mente humana no opera de una manera lógica. Si se presenta la matemática en un contexto simplificado, se muestran regularidades también simplificadas que aunque no sea la intención, se convierten en parte de la imagen conceptual del estudiante. De esta manera las estructuras cognitivas quedan arraigadas y pueden generar conflictos cognitivos que actúen como obstáculos para el aprendizaje. La computadora ofrece nuevas posibilidades en relación a este aspecto ya que permite que en un entorno de software, el alumno explore ideas más complejas desde el principio. Esta forma de aprendizaje implica una negociación del significado de los conceptos matemáticos modelados por la computadora en la que la organización del currículo y el papel del profesor es crucial.

Respecto al uso de software, Villella (2017) afirma que el hecho de incorporar TIC en la enseñanza de la matemática permite que los objetos matemáticos dejen de ser una sucesión de símbolos que a partir de algoritmos resuelven problemas estándar y se conviertan en objetos vivos para los que el estudiante puede formular conjeturas a partir de la exploración y verificarlas. Las construcciones logradas con software constituyen objetos de experimentación sobre la teoría contribuyendo a superar la tensión entre la visualización y la justificación. Aparecen prácticas directas que avala el software tales como arrastrar, ocultar, medir y dejar una traza, y también otras prácticas que el docente fomenta a partir de intervenciones planificadas tales como explorar, verificar y justificar. De esta manera no es suficiente con proponerles a los alumnos una construcción si se desea aprovechar el potencial al máximo. La tarea de construcción debe poner en juego los conocimientos previos y las posibilidades que brinda el software.

> Producir un dibujo en entornos favorecidos por las TIC implica preservar propiedades espaciales durante el arrastre; requiere del uso de propiedades geométricas para su construcción, y coloca en un segundo plano los procesos de ensayo y error controlados únicamente de manera perceptiva. (Villella, 2017, p.152)

También referido al uso de software, Arcavi y Hadas (2000) consideran que difícilmente los estudiantes experimenten de manera fructífera desde el comienzo de una actividad. Por esto es importante diseñar problemas de tal manera que los tipos de preguntas jueguen papeles significativos en la intensidad del aprendizaje experimental. Un tipo de preguntas que les permite acompañar la experimentación es proponer que los alumnos realicen predicciones explícitas e inteligentes sobre el resultado de las acciones que están por efectuar. De esta manera se logra alertar a los alumnos logrando claridad sobre cómo prevén lo que van a trabajar, orientarlos a la creación de predicciones propias que realizarán de manera cuidadosa comprometiéndose con la situación; creando motivaciones y expectativas sobre la experimentación real. Resulta un desafío entonces proponer situaciones en las que el resultado sea inesperado para que la sorpresa o desconcierto que se produce cree una diferencia clara con las predicciones enunciadas antes de la experimentación. La sorpresa, como característica de los entornos dinámicos, puede establecer de esta manera oportunidades para lograr aprendizajes significativos ya que nutre la necesidad propia de los estudiantes para re-analizar su conocimiento.

Por otra parte Healy (2000) expresa que es muy importante para los procesos de prueba que los objetos construidos con SGD sean manipulados por el estudiante de manera que pueda identificar propiedades y también clarificar las transformaciones, los pasos intermedios, por los cuales esas propiedades pueden ser inferidas de aquellas usadas por los estudiantes para la construcción. El software tiene un rol en ambos procesos, asistiendo en la formulación y validación de conjeturas y ofreciendo diferentes métodos a partir de los cuales los pasos de la prueba se pueden hacer más visibles. Distingue entre construcciones robustas y construcciones blandas. En las construcciones blandas no se utilizan todas las propiedades geométricas dadas. Una construcción robusta por otra parte, implica que la figura tiene todas las propiedades geométricas esperadas, por lo tanto, al realizar desplazamiento de puntos libres, la figura las mantiene. La diferencia entre los dos tipos de construcciones es la manera en que los estudiantes experimentan la dependencia geométrica. En construcciones robustas, la dependencia se demuestra con el hecho de que una relación permanece invariante a través del desplazamiento. Así, durante el desplazamiento se puede mover de lo general a una familia de dibujos con las mismas propiedades geométricas. En las construcciones blandas esto no ocurre. En este caso el desplazamiento es parte de la construcción, no una verificación. Los estudiantes observan cómo la propiedad dependiente se vuelve evidente en el punto en el que la otra propiedad es manualmente y visualmente satisfecha. Así, lo general puede emerger de lo específico a partir de la búsqueda de las posiciones en que las condiciones se cumplen.

3. Contexto de la experiencia

Los dos problemas presentados constituyen una parte de una secuencia didáctica cuyo objetivo es enriquecer la imagen conceptual de poliedro regular a partir de la construcción de poliedros no regulares que cumplan algunas de las condiciones exigidas por la definición de poliedro regular.

La experiencia tiene lugar dentro de un taller de GeoGebra propuesto en el marco de la cátedra Geometría Euclídea Espacial, al que asisten cuatro alumnos, correspondiente al tercer año del profesorado en matemática. El software es utilizado de manera fundamental en el cursado de la materia para realizar construcciones que permitan la exploración, la formulación de conjeturas acerca de propiedades y propiciar la validación de las mismas. Otro recurso utilizado por los estudiantes en las clases de la asignatura es el Polydron, que permite realizar construcciones tridimensionales a partir del encastrado de polígonos.

Para la resolución de los problemas presentados los alumnos cuentan además de GeoGebra con el Polydron. Trabajan en parejas y las producciones son socializadas posteriormente al grupo clase. Se consideran para el análisis de lo realizado por los estudiantes, los archivos en GeoGebra, que permiten identificar los procedimientos llevados a cabo a través del Protocolo de construcción que ofrece el software y las grabaciones de audio y video de los distintos momentos de la clase.

4. Discusión y resultados

Presentamos lo realizado por los estudiantes que participaron del taller, en cada uno de los problemas.

4.1. Problema 1

Se expone el análisis no solo de los procedimientos llevados a cabo por los estudiantes de los dos grupos con el software, sino del debate generado durante la puesta en común de los resultados del primer problema.

Consigna
Construir, si es posible, un poliedro no regular de modo que todas sus caras sean triángulos equiláteros iguales. Si no es posible, justifica la no existencia.

Tabla 1. Consigna del Problema 1

Los estudiantes comienzan a resolver el problema y se plantea un debate entre ellos. Consideran inicialmente que para que un poliedro sea regular debe cumplir solamente la condición que las caras sean polígonos regulares iguales. De esta manera, atienden sólo a una parte de la definición y por tanto no a todas las condiciones que debe cumplir un poliedro para ser regular.

Recurren en primera instancia a poliedros que corresponden a familias trabajadas en la cátedra: prismas, pirámides y poliedros regulares. La familia que primero consideran es la de prisma y dan muestras de una imagen conceptual estereotipada de la misma. Emplean las expresiones "arriba" y "abajo" para referirse a las bases de un prisma, lo que daría cuenta que lo consideran apoyado sobre una de sus bases. Intentan así, partiendo de un prisma realizar transformaciones de modo de obtener un poliedro que cumpla las condiciones pedidas.

Parecería que no consideran los polígonos caras del poliedro a construir, ni analizan los ángulos poliedros del mismo ya que no logran un análisis global del sólido que les permita desprenderse del modelo físico. La construcción es la referencia y no utilizan razonamientos deductivos más allá de la misma (Guillén, 2010). Los estudiantes comienzan a pensar en transformaciones de un poliedro conocido dado que el poliedro buscado no corresponde a una familia de las habitualmente trabajadas.

Como no logran obtener el sólido pedido, abandonan la construcción a partir de prismas y recurren al tetraedro regular. Comienzan a analizar qué ocurre si modifican el número de triángulos que concurren en uno de sus vértices. No obstante, no realizan un análisis similar al que hicieron para probar que no existen más de cinco poliedros regulares. Sólo consideran ese único vértice al que podrían concurrir cuatro triángulos pero piensan que en ese caso la quinta cara sería un cuadrilátero y por tanto no cumple la consigna (Figura 1).

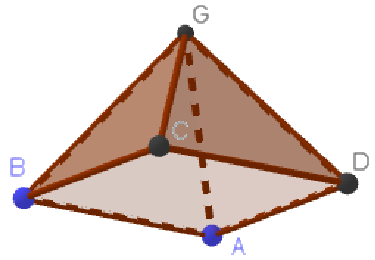


Figura 1. Construcción a partir de un tetraedro regular.

Vuelven a considerar el poliedro regular sin recurrir a la definición, por tanto tienen la imagen de los cinco poliedros regulares y consideran que negar la regularidad equivale a que las caras no sean iguales. Esto evidencia que el conjunto de ejemplos determinado por su imagen conceptual no se corresponde con el conjunto de ejemplos de la definición (Vinner y Dreyfus, 1989). Puede decirse que vuelven constantemente a sus imágenes de poliedros regulares, pero desde una visión global de las mismas, considerando sólo forma y regularidad de las caras y no los ángulos poliedros del sólido. La imagen conceptual que tienen de poliedro regular es tan resistente y estereotipada que condiciona un análisis minucioso de la definición.

Los estudiantes continúan debatiendo siempre refiriéndose a los cinco poliedros regulares convexos y haciendo hincapié en los polígonos que forman sus caras.

El docente sugiere la lectura de la definición de poliedro regular. Luego de analizarla los grupos logran realizar una construcción que cumple con lo pedido en la consigna sin mayores inconvenientes, no obstante utilizan distintas herramientas en sus procedimientos.

Un grupo emplea la herramienta Tetraedro y luego realiza una simetría central respecto de uno de sus vértices. Construyen de esta manera un sólido a partir de dos triedros opuestos por el vértice (Figura 2).

El docente al advertir la construcción plantea un debate en el grupo clase en torno a si la figura construida es o no un poliedro. Se discute sobre la definición acordada de poliedro[3] y se concluye que la figura obtenida no es un poliedro ya que

[3] "Llamaremos superficie poliédrica al conjunto de un número finito de polígonos, llamados caras de la superficie, que cumplan las siguientes condiciones:
- Cada lado de una cara pertenece también a otra y sólo otra. Ambas caras se llaman contiguas.
- Dos caras contiguas están en distinto plano.
- Dos caras no contiguas pueden unirse por una sucesión de caras contiguas.

dos caras no contiguas no pueden unirse por una sucesión de caras contiguas, que es lo que establece la definición.

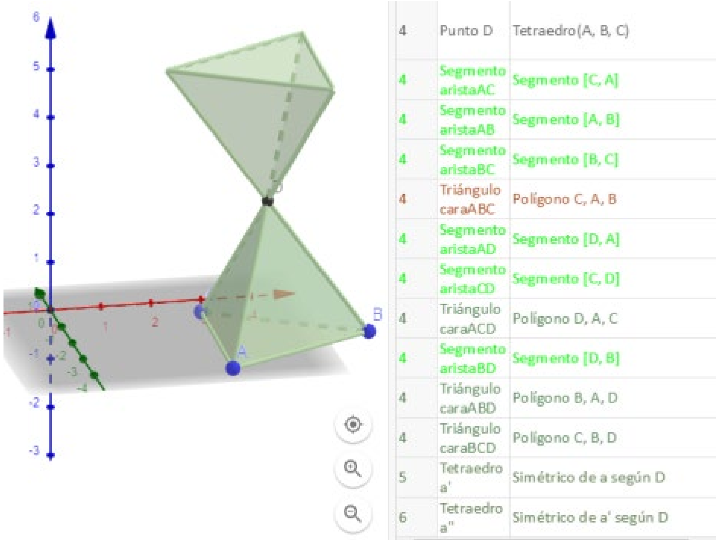
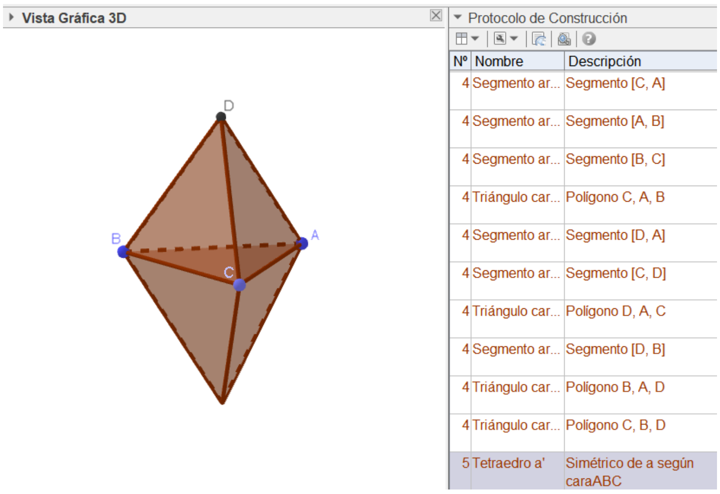


Figura 2. Tetraedros opuestos por el vértice

A continuación, realizan una nueva construcción partiendo de un tetraedro regular al que le aplican una simetría especular respecto del plano que contiene a una de sus caras, obteniendo en este caso un poliedro que cumple con las condiciones solicitadas en la consigna (Figura 3).



- Dos caras no contiguas no pueden tener más punto común que un vértice y si lo tienen deben pertenecer ambas a un mismo ángulo poliedro.

La superficie poliédrica se llama convexa si además de las condiciones de la definición anterior se cumple que el plano de cada cara deja en un mismo semiespacio a las demás.
Llamaremos poliedro al conjunto de los puntos de la superficie poliédrica y los interiores a la misma. Los vértices y lados de las caras se llaman vértices y aristas del poliedro.
Si la superficie que determina al poliedro es convexa el poliedro se llama convexo. De lo contrario lo denominaremos poliedro cóncavo". (Mántica y Götte, 2018)

Figura 3. Bipirámide con la herramienta Simetría Especular.

Los estudiantes del otro grupo construyen un triángulo equilátero, determinan su circuncentro D y trazan una recta perpendicular al plano que contiene al triángulo por D. Luego emplean la herramienta Esfera (centro, punto) para determinar los vértices restantes del poliedro buscado (Figura 4).

Estos poliedros obtenidos son semejantes aunque involucran distintas herramientas y procedimientos de construcción.

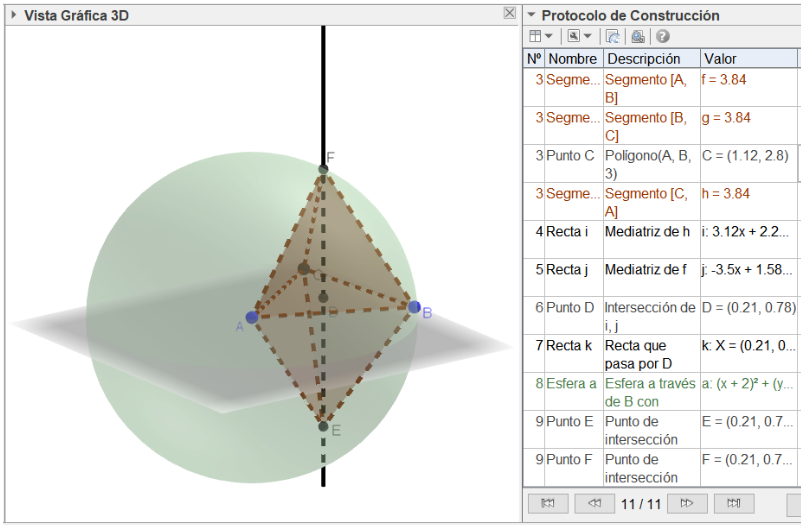


Figura 4. Bipirámide con la herramienta Esfera

Analizando las construcciones realizadas por los estudiantes en este problema puede decirse que son robustas puesto que todas las propiedades geométricas esperadas se cumplen en ambas (Healy, 2000).

Esta construcción genera en los estudiantes un elemento de sorpresa porque difiere de su supuesto en el que los poliedros, cuyas caras son triángulos equiláteros iguales, son siempre regulares. Esta desigualdad entre lo esperado por los alumnos antes de la experimentación y las construcciones realizadas con el software posibilita que reanalicen su conocimiento relacionado en este caso con el concepto de poliedro regular (Arcavi y Hadas, 2000).

4.2. Problema 2

Se presenta el análisis de lo realizado por las parejas de estudiantes durante la resolución del segundo problema, en la que utilizan Polydron y GeoGebra.

Consigna
Construir, si es posible, un tetraedro de caras iguales no regulares. Si no es posible, justifica la no existencia.

Tabla 2. Consigna del Problema 2

Los estudiantes conjeturan que sí es posible construir un tetraedro que cumpla con las condiciones solicitadas. Comienzan pensando que las caras del tetraedro pueden ser triángulos rectángulos, isósceles o escalenos y recurren al Polydron para la construcción, utilizando como caras, en primer lugar, triángulos isósceles acutángulos (Figura 5).

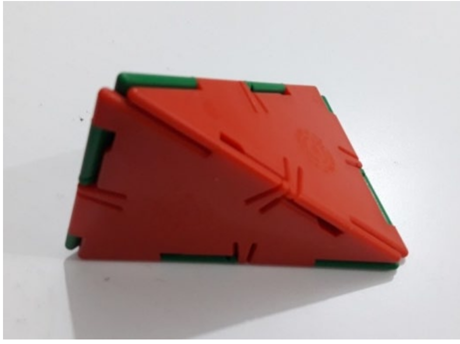


Figura 5. Tetraedro con Polydron

Luego intentan construir el tetraedro pedido empleando los triángulos isósceles rectángulos que les brinda el Polydron, pero no lo logran (Figura 6).

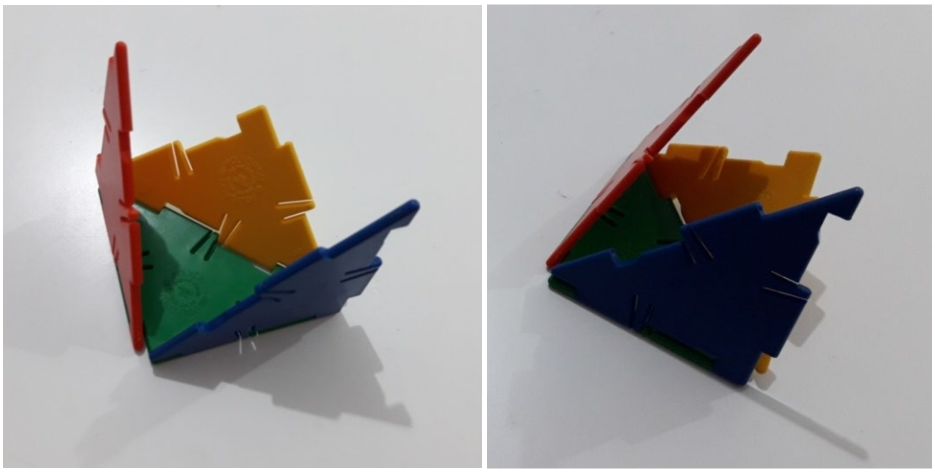


Figura 6. Ensayo de tetraedro.

Los estudiantes no analizan mientras ensayan la construcción con el Polydron si variando las longitudes de los lados de estos triángulos existe el tetraedro buscado, cuestión que podrían descartar rápidamente analizando los ángulos interiores de cada cara que concurren en un vértice (Figura 7). No obstante no disponen de otros triángulos no equiláteros para continuar explorando la posibilidad de la construcción, lo que evidencia la limitación del recurso utilizado.

Figura 7. Ensayo de desarrollo plano

Recurren al GeoGebra construyendo un triángulo isósceles y determinan esferas para asegurar la igualdad de los triángulos que forman las caras del poliedro. Consideran una circunferencia intersección de dos esferas en la que se encuentra el cuarto vértice (Figura 8).

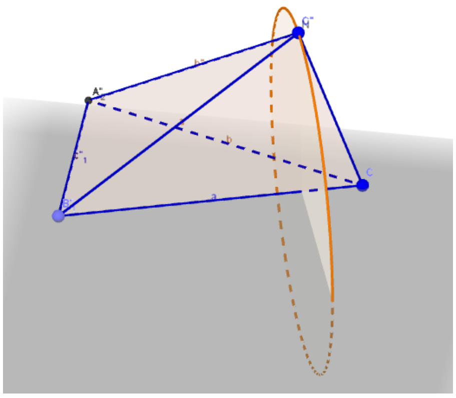


Figura 8. Tetraedro realizado con GeoGebra.

Si bien la figura presentada corresponde a un poliedro que cumple la consigna, los estudiantes se encargan de determinar el cuarto vértice de modo que esto ocurra. Si se hace uso del arrastre, se identifica que se trata de una construcción blanda (Healy, 2000). El vértice fue considerado a ojo dado que la construcción no cumple todas las propiedades geométricas esperadas y esto se comprueba al desplazar objetos libres. Los triángulos que quedan determinados en otras posiciones de los vértices del tetraedro no son congruentes, por lo tanto no cumplen lo solicitado (Figura 9).

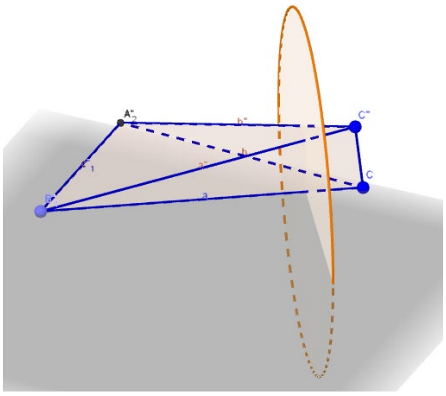


Figura 9. Tetraedro que no cumple con lo solicitado

La construcción blanda obtenida de esta manera no permite reflexionar acerca de la existencia de poliedros cuyas caras sean otros triángulos isósceles.

Los estudiantes del otro grupo abordan el problema considerando el desarrollo plano de un tetraedro cuyas caras son triángulos escalenos. Construyen un triángulo escaleno y a partir de este, otros iguales que compartan un lado con el primero. Intentan "levantar" estos últimos a partir del empleo de la herramienta Rotación Axial. Vale destacar que lo hacen considerando rotar los puntos con ángulos de 90° lo que imposibilita desplazar los triángulos para determinar si existe en este caso el cuarto vértice (Figura 10).

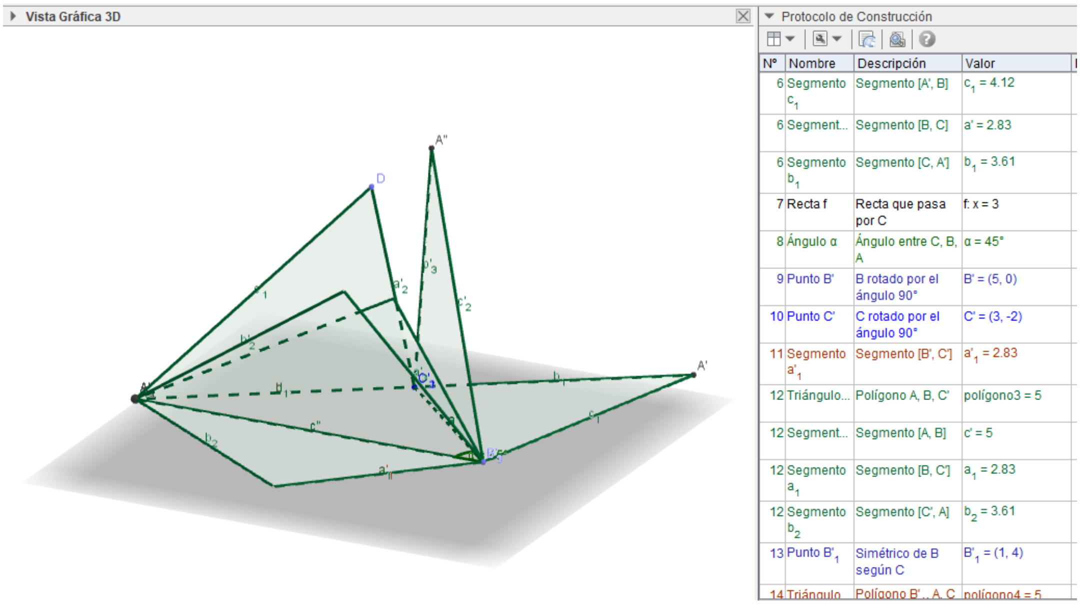


Figura 10. Figura tridimensional con la herramienta Rotación Axial

Estos estudiantes realizan un procedimiento similar al utilizado para probar la existencia de algunos poliedros regulares a partir de la construcción del desarrollo plano comenzando por una cara tratando de lograr el ángulo poliedro del sólido buscado. Vale destacar que no utilizan el arrastre para encontrar otros triángulos con esa misma construcción.

El uso del software para la elaboración de construcciones posibilita en este caso que se explore acerca de la posible existencia de los sólidos requeridos en la consigna utilizando herramientas disponibles que permiten de manera muy sencilla el empleo de propiedades geométricas. Así, la experimentación ensayo y error queda en segundo plano dando vida a los objetos matemáticos y empleando las construcciones como medio de experimentación (Villella, 2017).

Las construcciones presentadas por los estudiantes en este problema son blandas y no permiten por este motivo reflexionar sobre las condiciones posibles para la construcción del sólido solicitado. Por esta razón se decide presentar un archivo a los alumnos con una posible construcción robusta que da solución al problema y que permite visualizar que no siempre es posible encontrar el poliedro buscado (Figura 11).

El hecho de que los estudiantes puedan explorar sobre este archivo presentado revisando el protocolo de construcción, arrastrando objetos libres, entre otras acciones, permiten que el trabajo en el entorno de software no sea simplificado. Se pretende a partir de ideas complejas obtener conjeturas generales (Tall, 1989), en este caso relacionadas con las condiciones de existencia de un tetraedro de caras iguales no regulares.

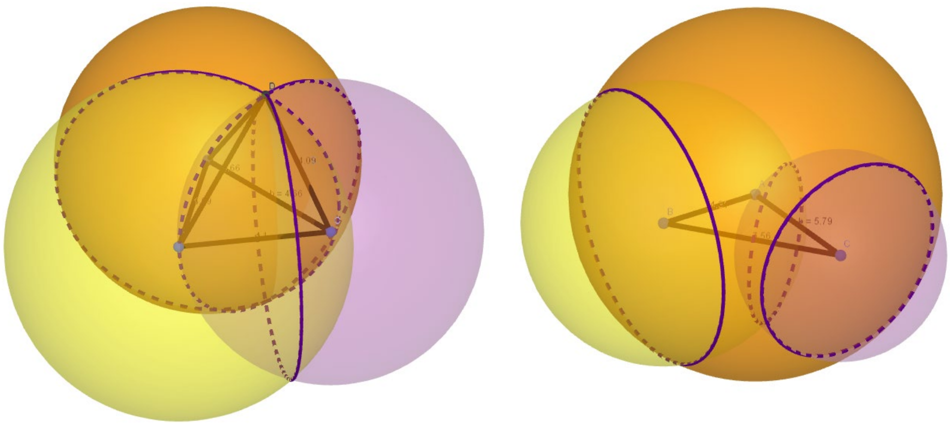


Figura 11. Construcción robusta presentada por el docente

5. Algunas reflexiones

El trabajo realizado por los estudiantes al resolver los problemas planteados permite que se reflexione en torno a algunos aspectos. Por un lado, si se consideran las relaciones que logran establecer entre los elementos de los poliedros construidos, puede decirse que determinan analogías y diferencias con los poliedros regulares, teniendo en cuenta la clase de polígonos de las caras y cuántas concurren en un vértice. Sin embargo, este análisis no es global ni exhaustivo ya que parecería que no consideran las condiciones que deben cumplirse para que el poliedro exista, y se limitan a ensayar construcciones que resultan de modificaciones de poliedros regulares. De esta manera juntan, descomponen y recomponen con la intención de generar sólidos que cumplan con lo solicitado, y estas acciones resultan interesantes en el contexto rico que ofrece el trabajo con poliedros según Guillén (2010).

Cabe destacar que la manipulación mencionada no solo se da con el Polydron sino también con el software, ambos recursos fundamentales para la resolución de los problemas. El Polydron por su parte permite que el estudiante conjeture rápidamente en algunos casos acerca de la posibilidad de existencia de los poliedros que solicita la consigna. Así, este recurso resulta útil para la elaboración de conjeturas sin aplicar necesariamente propiedades geométricas, como se da en una construcción robusta con GeoGebra. Este tipo de software posibilita una exploración más profunda y sistematizada habilitando al alumno al trabajo con situaciones complejas desde el principio y no en un contexto simplificado, lo que se opone a la tradicional forma de enseñar que según Tall (1989), conlleva grandes dificultades para los estudiantes. Las herramientas con las que cuentan los alumnos a la hora de realizar una construcción con GeoGebra les permiten en cuestión de minutos considerar propiedades geométricas y con el recurso del arrastre explorar con una multiplicidad de sólidos, lo que no sucede con el Polydron que sólo permite construcciones rígidas a partir de los polígonos disponibles.

De esta manera, los no ejemplos de poliedro regular que los alumnos ensayan con ambos recursos para la resolución de los problemas contribuyen a la formación de la imagen conceptual de poliedro regular. Así, teniendo en cuenta la influencia de las imágenes mentales que se tienen de un concepto y su definición, como sostienen Vinner y Dreyfus (1989), el trabajo analizado contribuye a que el conjunto de ejemplos determinados por la definición de poliedro regular coincida con el conjunto de ejemplos que consideran los estudiantes.

Presentarles a los estudiantes una construcción robusta es un ejemplo de una práctica planificada que pretende que experimenten con la construcción sobre los elementos teóricos involucrados (Villella, 2017). Esto posibilita la visualización, exploración y reflexión acerca de las posibilidades de construcción del poliedro pedido. De esta manera, si bien no son los estudiantes quienes realizan la construcción, pueden identificar propiedades y pasos intermedios empleados en la misma (Healy, 2000). Este tipo de propuestas les permiten apreciar las ventajas de estas construcciones empleando el software y las propiedades geométricas específicas involucradas, haciendo uso de la herramienta Distancia o longitud, revisando el Protocolo de construcción y arrastrando puntos libres, entre otras acciones posibles.

Resolver los problemas propuestos les permite a los alumnos encontrarse con situaciones inesperadas: poliedros no regulares que cumplen sólo algunas de las condiciones exigidas por la definición. La consigna en si misma se plantea para generar desconcierto (Arcavi y Hadas, 2000), y por esta razón representa una oportunidad para sembrar en el estudiante la necesidad no solo de considerar especialmente las definiciones y propiedades geométricas disponibles, sino de elaborar argumentos que validen sus conjeturas, más allá de los recursos utilizados, contribuyendo al método propio de la geometría euclídea.

Bibliografía

Arcavi, A y Hadas, N. (2000). *Computer mediated learning: an example of an approach. Revista International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5*, 25 -45.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación?. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21-68). SEIEM, Lleida.

Healy, L. (2000). *Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions. In Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 1, 103-117.

Tall, D. (1989) *Concept Images, Computers, and Curriculum Change. Revista For the Learning of Mathematics,* (9),3 37- 42.

Villella, J. (2017). Revisitando la enseñanza de la geometría con ojos TIC: otro desafío para el desarrollo profesional docente. En G. Fioriti (Comp.), *Recursos tecnológicos en la enseñanza de la matemática* (pp. 143-157) Miño y Dávila Editores, Buenos Aires. Argentina.

Vinner, S y Dreyfus, T. (1989). *Images and definitions for the concept of function. Revista Journal for Research in Mathematics Education* (20), 4 356-366.

Magali Lucrecia Freyre,
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral - Argentina
magali.freyre@gmail.com

Ana María Mántica
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral - Argentina
ana.mantica@gmail.com