

www.fisem.org/web/union
<http://www.revistaunion.org>

Modelos de análisis del conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza de los profesores

Juan Francisco Gonzalez Retana, Daniel Eudave Muñoz

Fecha de recepción: 08/09/2017
Fecha de aceptación: 20/12/2018

<p>Resumen</p>	<p>Uno de los temas que más ha interesado a los investigadores en el campo de la didáctica de las matemáticas, ha sido valorar cuáles son los conocimientos necesarios que un profesor debe poseer para el desarrollo de la práctica de la enseñanza y con ello favorecer el aprendizaje a los alumnos. En este texto se presenta una revisión de los modelos teóricos más empleados como marcos de referencia para el análisis de dichos conocimientos. Aunque la mayoría de los modelos que se presentan a continuación tienen su origen en el campo de la didáctica de las matemáticas, se considera que pueden ayudar al análisis de los conocimientos disciplinares y didácticos en otras áreas. Palabras clave: conocimiento del profesor, formación de profesores, didáctica de las matemáticas.</p>
<p>Abstract</p>	<p>One of the topics that has most interested researchers in the field of didactics of mathematics, has been to assess what are the necessary knowledge that a teacher should possess for the development of teaching practice and thereby to favor learning to the students. This paper presents a review of the theoretical models most used as frames of reference for the analysis of such knowledge. Although most of the models presented below have their origin in the field of didactics of mathematics, it is considered that they can help the analysis of the disciplinary and didactic knowledge in other areas. Key words: teacher knowledge, teacher training, mathematics didactics.</p>

Resumo

Um dos tópicos que os pesquisadores têm se interessado, no campo da didática da matemática, é o de avaliar os conhecimentos necessários que um professor deve possuir para o desenvolvimento da prática docente e, assim, favorecer a aprendizagem os alunos. Este artigo apresenta uma revisão dos modelos teóricos mais utilizados como quadros de referência para a análise de tais conhecimentos. Embora a maioria dos modelos apresentados tenha sua origem no campo da didática da matemática, considera-se que eles podem ajudar a analisar o conhecimento disciplinar e didático em outras áreas.

Palavras-chave: conhecimento do professor, treinamento de professores, didática de matemática.

1. Introducción

La investigación acerca de la formación de profesores es uno de los campos que más ha interesado a los investigadores en los últimos años. A nivel internacional, desde la aparición de los primeros textos acerca de la investigación sobre la enseñanza y los profesores, estuvo presente la investigación en educación matemática. Hoy en día existen una gran cantidad de publicaciones al respecto (por ejemplo, el Handbook of Mathematics Education, el Handbook of Mathematics Teacher Education o el Journal of Mathematics Teacher Education), con una multiplicidad de temáticas. Además, de manera regular se realizan una serie de eventos, seminarios y congresos, entre los que sobresalen los organizados por la National Council of Teachers of Mathematics (NTCM) o el Psychology of Mathematics Education Group (PME) (Krainer y Llinares, 2010) en donde la formación matemática de los profesores es una temática que está presente.

Un tema que ha interesado a los investigadores en el campo de la formación de profesores ha sido valorar cuáles son los conocimientos que un docente debe poseer para enseñar matemáticas. A lo largo del tiempo han surgido varias propuestas encaminadas a dicho propósito (Shulman, 1986, 1987; Ball, 2000, 2003; Ball, Thames, & Phelps, 2008; Godino, 2009; Rowland & Ruthven, 2011, entre otros más). En este texto presentamos un análisis de algunas propuestas empleadas como marcos de referencia para el estudio de dichos conocimientos

Los objetivos del análisis se centran en:

- a) Ofrecer un panorama acerca de propuestas que se interesan por el estudio de los conocimientos que debe poseer un profesor para enseñar matemáticas.
- b) Comparar las propuestas para analizar las semejanzas y diferencias que existen entre ellas.

Como bien comentan Pino-Fan & Godino (2015), las diversas propuestas existentes ofrecen maneras diferentes de caracterizar los componentes del conocimiento matemático y didáctico con que deben contar los profesores. Los modelos teóricos que se presentan se centran en profesores que dedican toda su actividad profesional a la enseñanza de las matemáticas. Aun así, cada modelo puede contribuir al análisis de los

conocimientos de un profesor que imparte todas las asignaturas, como en el caso de la educación primaria en México y otros países. Además, consideramos que, aunque muchos de los modelos que se presentan tienen su origen en el campo de la didáctica de las matemáticas, pueden ayudar al análisis en otras áreas.

2. Metodología

Los modelos que se presentan se localizaron a partir del análisis de diversos textos cuyo propósito se centró en el estudio de los conocimientos que los profesores requieren para enseñar matemáticas.

Para realizar la revisión de los modelos nos apoyamos en la propuesta de Okoli (2015) quien sugiere ocho pasos para la revisión de literatura. La secuencia de pasos se describe a continuación:

1. *Identificación del propósito de la revisión.* En el apartado anterior se especificó que el propósito de la presente revisión es ofrecer un panorama acerca de algunas propuestas que se interesan por el estudio de los conocimientos que debe poseer un profesor para enseñar matemáticas, así como en la comparación de éstas.
2. *Elaboración de un protocolo de búsqueda.* Implica contar con una guía clara del procedimiento a seguir para llevar a cabo la revisión. Tomando en cuenta lo anterior, la búsqueda se realizó a partir de los resultados que Sánchez (2011) presenta sobre las tendencias de investigación en el campo de la formación de profesores de matemáticas. Este autor menciona que los intereses de los investigadores pueden ser agrupados en tres categorías:
 - a) *Las preocupaciones o áreas prioritarias de los investigadores;* incluye temas tales como: creencias, percepciones y concepciones de los profesores; prácticas de los docentes; conocimientos y habilidades de los profesores; relaciones entre teoría y práctica; práctica reflexiva.
 - b) *Los conceptos teóricos que son más empleados;* como el Conocimiento Pedagógico del Contenido (Pedagogical Content Knowledge) y otros conocimientos; reflexión en la acción y reflexión sobre la acción; comunidades de práctica.
 - c) *Los objetos de estudio emergentes.* Por ejemplo, formación *online*; el diseño y el rol de las tareas educativas; educación y desarrollo de la formación de profesores de matemáticas; justicia social en la investigación sobre formación de profesores de matemáticas.

Las dos primeras categorías proporcionaron información acerca de términos que sirvieron para localizar los modelos que se analizan en este texto. Por ejemplo, en el primer grupo de investigaciones Sánchez (2011) menciona que existen un conjunto de estudios que se interesan por analizar los conocimientos y las habilidades de los profesores de matemáticas. Al revisarlos se encontraron conceptos como, por ejemplo: *conocimiento matemático para la*

enseñanza o conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En la segunda categoría, el autor identifica “conceptos teóricos con una notable influencia en la comunidad investigadora” (p. 136), tales como *Conocimiento Pedagógico del Contenido* y *Conocimiento del Contenido Matemático*. Resalta que en este grupo de investigaciones aparecen citados, de manera recurrente, autores como Shulman y Ball.

3. *Selección para la inclusión*. Respecto a este paso Okoli (2015) menciona que se debe ser completamente explícito acerca de qué estudios se consideraron para la revisión. Así, se consideraron estudios que, con base en los resultados presentados por Sánchez (2011), se interesaran por analizar los conocimientos y las habilidades de los profesores de matemáticas en los que además se emplearan conceptos como conocimiento matemático para la enseñanza, conocimiento especializado del profesor de matemáticas, conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento del contenido matemático.
4. *Búsqueda de la literatura*. Con base en los términos y autores presentes en la revisión que realizó Sánchez (2011) se realizó una búsqueda en índices de revistas especializadas como por ejemplo: Redalyc, Dialnet, Eric, Springer, Scielo, Google académico, entre otras. También se revisaron algunos sitios web de los autores encontrados en la búsqueda que se hizo en los índices. En total se revisaron 75 textos. En la tabla 1 se presenta la cantidad de textos encontrados por índice revisado.

Tabla 1- Cantidad de textos por índice revisado

Índice	Cantidad de textos
Google académico	25
Springer	12
Dialnet	9
ERIC	6
Redalyc	6
Latindex	4
Scielo	4
Web del autor	4
SAGE Journals	3
ProQuest	2

Se analizaron principalmente artículos de investigación, aunque también se encontraron otros tipos de texto como capítulos de libro y tesis de doctorado. La tabla 2 muestra la cantidad por tipos de texto revisados.

Tabla 2 - *Tipos y número de textos revisados*

Tipo de texto revisado	Cantidad
Artículos de investigación	62
Capítulos de libro	5
Tesis	5
Conferencias	1
Otros	2

5. *Extracción (obtención) de los datos.* En este paso es necesario que se establezcan los criterios que se emplearán durante el análisis de los textos encontrados (Okoli, 2015). De tal forma que, se consideraron —como se observa en la tabla 2— en su mayoría artículos de investigación cuya estructura mostrara la forma en que se empleó cada modelo para el análisis de los conocimientos matemáticos de los profesores.
6. *Valoración de la calidad.* En este paso Okoli (2015) plantea que se deben especificar los criterios que se utilizan para juzgar qué documentos se excluirán por calidad insuficiente. De tal forma que, para la revisión que ahora se presenta se incorporaron:
 - a) Textos publicados en revistas científicas incluidas en diversos índices académicos. Con ello se pretendió tener certeza de un rigor editorial sólido.
 - b) Investigación cuyos resultados fueran interpretados bajo la óptica de alguno de los modelos de análisis del conocimiento matemático que aquí se presenta.
 - c) Investigaciones realizadas por investigadores reconocidos en el campo de la didáctica de las matemáticas y, sobre todo, en la formación de profesores.

En las referencias sólo se presentan los textos más representativos.

7. *Síntesis de los estudios.* Como más adelante se muestra, la descripción de los modelos no sigue un orden en particular, aunque se puede decir que se parte de una propuesta teórica que marcó un punto importante en el interés por el análisis de conocimiento para la enseñanza de los profesores, es decir las ideas presentadas por Shulman (1986, 1987).
8. *Redacción de la revisión.* Este paso involucra la redacción de la revisión. Se sugiere que para ello se sigan los criterios estándar que demanda la escritura de artículos de investigación.

3. Modelos para el análisis de los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesores

La propuesta de Shulman (1986, 1987) aparece en prácticamente todos los textos analizados; éstos señalan que fue este autor quien, en principio, expuso la necesidad de que un profesor contara con diversos tipos de conocimientos para la enseñanza. Es por eso que en este análisis se incluyen las ideas de este autor. En el caso del análisis de los conocimientos de los profesores de matemáticas, es a la propuesta de Ball (2000, 2003) a la que se hace mayor referencia, sobre todo en investigaciones publicadas en inglés. Algunos de los modelos, como el que presentan Carrillo, Climent, & Muñoz-Catalán (2012) surgen como una propuesta que pretende complementar el trabajo de Ball. En la tabla 3 se presentan la cantidad de textos en los que se aborda alguno de los modelos que se analizan en la siguiente sección (en las referencias sólo se mencionan los más representativos).

Tabla 3 - Cantidad de textos por modelo analizado

Modelo	Cantidad de textos
Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) (Ball y colaboradores)	46
Modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (EOS) (Díaz-Godino)	16
Mathematical Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) (Carrillo y colaboradores)	9
Conocimiento base para la enseñanza (Shulman)	3
Teoría de la Proficiencia (Schoenfeld y Kilpatrick)	1

No está de más señalar que estos modelos no son los únicos que pretenden explicar la naturaleza de los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesores de matemáticas, y que si nos limitamos a ellos es por su importancia y trascendencia en el campo de la investigación en educación matemática. También hay que señalar que algunos modelos, como el de Carrillo y colaboradores y el de Díaz-Godino y Pino-Fan, al ser más recientes, aún es mucho lo que puede aportar y es esperable que en los próximos años se publiquen más trabajos sustentados en dichos modelos.

En 1986 Shulman propuso uno de los modelos que más impacto ha tenido en el estudio del pensamiento del profesor; planteó tres categorías que, desde su perspectiva, conforman el conocimiento del profesor:

- a) *Conocimiento del Contenido*. Que se refiere a la organización mental que tiene el profesor acerca de los contenidos que va a enseñar.
- b) *Conocimiento Pedagógico del Contenido*. Un tipo de conocimiento que va más allá del conocimiento de la materia a enseñar; que se orienta hacia la

comprensión de lo que facilita o dificulta el aprendizaje de temas específicos de la materia que se imparte.

- c) *Conocimiento del Currículo*. Que se centra en el conocimiento acerca del programa curricular del nivel educativo en el que se trabaja, así como la variedad de materiales (como los libros de texto) que se disponen para la enseñanza. (Shulman, 1986).

La categoría del *Conocimiento Pedagógico del Contenido* (Pedagogical Content Knowledge o PCK, por sus siglas en inglés) despertó un fuerte interés en el terreno de la investigación en educación matemática. Fue tanto el interés en torno a este concepto que después de la publicación del artículo de Shulman (1986) se realizaron una serie de estudios con el propósito de examinar este conocimiento en profesores en servicio. En específico, el PCK es un conocimiento que "incluye las formas usuales para representar las ideas, analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones, en otras palabras, los caminos para representar y formular un contenido matemático y hacerlo más comprensibles a los demás" (Shulman, 1986, p. 9).

En otro trabajo, el propio Shulman (1987) desarrolla aún más sus ideas y señala que los profesores necesitan poseer un *conocimiento base* para la enseñanza, el cual incluye:

1. *Conocimiento del contenido*. El dominio de los temas que serán enseñados.
2. *Conocimiento pedagógico en general*, que hace referencia a una serie de principios y estrategias para la gestión y organización del trabajo en el aula, independientemente de la asignatura de que se trate.
3. *Conocimiento del currículo*, esto es, la comprensión de los materiales y los programas de la asignatura que imparte.
4. *Conocimiento pedagógico del contenido*, comprende la integración del contenido a estudiar y la manera en que este puede ser acercado (enseñado) a los alumnos.
5. *Conocimiento de los estudiantes* y de sus características tanto afectivas como cognitivas.
6. *Conocimiento de los contextos educativos*, que comprende desde el entendimiento del trabajo en clase, la organización de las instituciones escolares, hasta las características de las comunidades.
7. *Conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación*, así como sus fundamentos filosóficos e históricos. (Shulman, 1987, p. 8)

Desde la publicación de los escritos de Shulman (1987) sobre el Conocimiento Base para la Enseñanza, muchos investigadores del campo han desarrollado, ampliado e integrado otros elementos al conocimiento necesario para enseñar, con el fin de contribuir a la comprensión de este fenómeno.

Bajo los supuestos de Shulman, los trabajos realizados por Ball (2000 y 2003), Hill, Schilling, y Ball (2004) Hill, Rowan y Ball (2005), Ball, Thames y Phelps (2008) así como el de Hill, Ball y Schilling (2008) constituyen una línea de investigación en la que se analiza el conocimiento matemático y pedagógico de los profesores. Estos trabajos retoman la idea de Shulman en cuanto al PCK, es decir consideran como elemento

importante el conocimiento del profesor acerca de lo que favorece o dificulta el aprendizaje de las matemáticas.

Ball (2000 y 2003) propone un modelo que denomina *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (*Mathematical Knowledge for Teaching* o *MKT*, por sus siglas en inglés). El MKT incluye el conocimiento matemático, las habilidades y hábitos mentales que son empleados para el trabajo de enseñanza. En otras palabras, es el conocimiento matemático utilizado para llevar a cabo el trabajo de enseñanza de las matemáticas. El trabajo de enseñanza son todas aquellas tareas y responsabilidades que tienen los profesores para enseñar las matemáticas, tanto dentro y fuera del aula (Ball et al., 2006).

En el MKT se clasifican los tipos de conocimiento matemático en: *Conocimiento del Contenido* y *Conocimiento Pedagógico del Contenido Matemático*, cada uno conformado por tipos distintos de conocimiento denominados subdominios (ver figura 1)

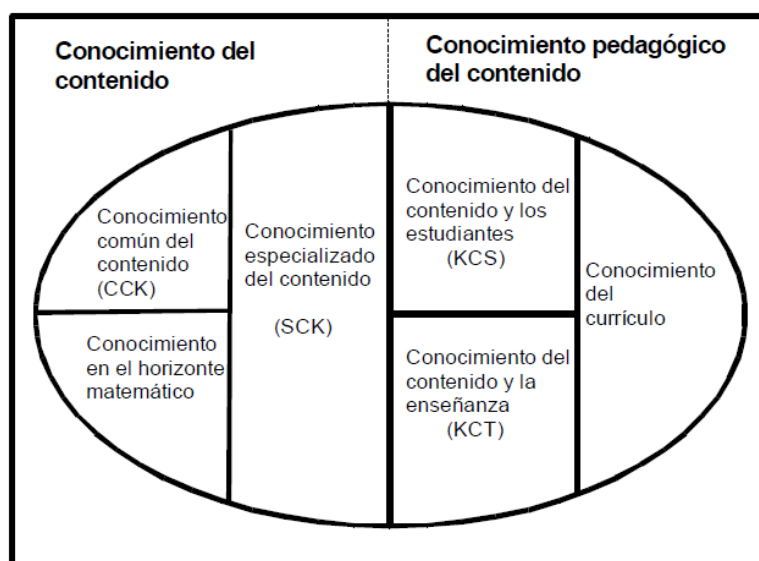


Figura 1. Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT)
Fuente: Hill, Ball y Schilling (2008, p. 377)

El *Conocimiento del contenido* se refiere a los conocimientos matemáticos que se supone posee una persona que se dedica a la enseñanza de las matemáticas, como producto de su paso por la escuela básica y de su formación en docencia. Se conforma por tres subdominios:

1. *Conocimiento Común del Contenido* (CCK, por sus siglas en inglés), definido como los conocimientos y las habilidades que son empleados no solo en la enseñanza de las matemáticas sino en una variedad de entornos (Hill, Ball & Schilling, 2008). Cuando se habla de conocimiento común no se debe entender que cualquier persona tiene este conocimiento; más bien se refiere a un conocimiento matemático que es utilizado en diferentes entornos, es decir, no es exclusivo de la enseñanza.

2. *Conocimiento Especializado del Contenido (SKC)*, es aquel que se compone de los conocimientos y las habilidades necesarias para el desarrollo del trabajo en el área de matemáticas. Normalmente no se necesita para fines distintos de la enseñanza. Es un tipo de conocimiento matemático que los maestros deben poseer porque la enseñanza implica hacer que las características de un contenido particular sean visibles y aprendibles por los estudiantes. (Hill et al., 2008).
3. *Conocimiento en el Horizonte Matemático*, hace referencia al conocimiento para poder establecer las relaciones entre contenidos matemáticos de diferentes niveles educativos: lo que se conoce como una relación vertical o articulación entre contenidos (de educación primaria con los de educación secundaria, por ejemplo). También hace referencia a las relaciones de los contenidos matemáticos entre sí o con otra asignatura de un mismo nivel o grado educativo, entendidas como relaciones horizontales. Este conocimiento “incluye las habilidades que tienen los profesores para saber la importancia que tiene un determinado contenido matemático durante su trayectoria curricular” (Sosa, 2011, p. 31).

El *Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK)* se concibe como los conocimientos fundamentales para el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Está integrado por los siguientes subdominios:

1. *Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS)*, que implica reconocer los procesos que siguen los estudiantes durante el aprendizaje de las matemáticas, así como la manera de corregir los errores que cometen.
2. *Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT)* que involucra conocer diversas maneras de acercar algún contenido matemático a los alumnos, esto es, cuáles son las ventajas de utilizar o seguir una determinada estrategia al estudiar un tema con los estudiantes.
3. *Conocimiento del Currículo* que supone el conocimiento de la composición y estructura curricular. El profesor tiene el conocimiento de la manera en que está organizado el currículo del nivel y el grado educativo donde se desempeña. Lo que le permite la planificación de las actividades para el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes (Ball, Thames & Phelps, 2008).

Otra propuesta es el aporte que hacen Carrillo, Climent y Muñoz-Catalán (2012), mismo que es fruto del refinamiento del MKT. Estos autores mencionan que las ideas de Deborah Ball y sus colaboradores acerca del Modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza presentan ciertas dificultades, específicamente las fronteras entre los subdominios Conocimiento Especializado del Contenido (SCK) y Conocimiento Común del Contenido (CCK). Los problemas radican, según Carrillo, Climent y Muñoz-Catalán, en:

- a) Decidir cuando el Conocimiento Común del Contenido termina y en qué momento comienza el Conocimiento Especializado del Contenido. Argumentan que, dado que el MKT se basa en la observación, es complicado decidir en qué momento el conocimiento de un profesor se corresponde con el Conocimiento Común o no,

pues es necesario compararlo con un conocimiento hipotético de un nivel de educación también hipotético, sin saber de verdad cuál es el conocimiento matemático común de esa persona.

- b) Demarcar los límites entre el Conocimiento Especializado del Contenido y el Conocimiento en el Horizonte Matemático. La definición del primero apunta a un conocimiento acerca de las matemáticas cuando se enseña un tema, lo que hace difícil determinar, al momento de observar, en qué momento un tema se relaciona con otro, es decir cuándo se recurre al Conocimiento del Horizonte Matemático.

Considerando lo anterior, Carrillo, Climent y Muñoz-Catalán (2012) redefinen el MKT dando origen al Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge, MTSK). El modelo se presenta en la figura 2.

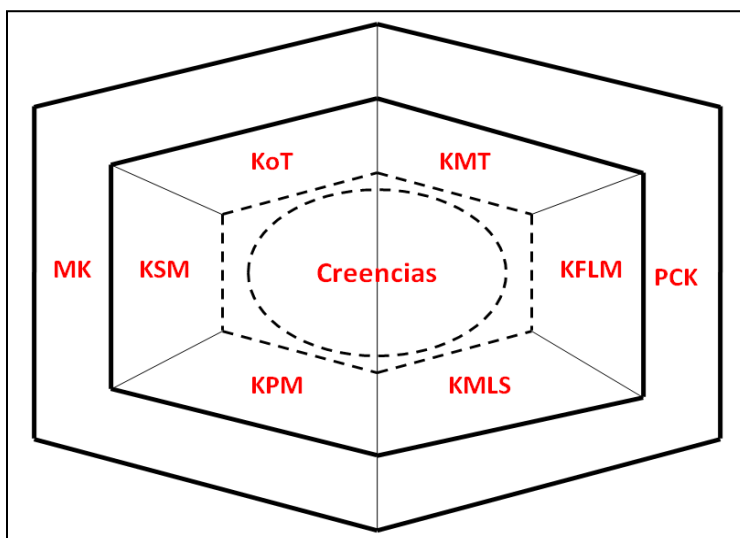


Figura 2. Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MSTK)¹
Fuente: Carrillo, Climent y Muñoz-Catalán (2012)

El MTSK conserva dos grandes tipos de conocimiento el Conocimiento Matemático (MK) y el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK)². En el centro del modelo se sitúan las creencias respecto a ambos tipos de conocimientos.

El Conocimiento Matemático (MK) está compuesto por tres subdominios:

- a) El *Conocimiento de los Temas* (KoT, *Knowledge of Topics*). "Es el conocimiento de los conceptos y procedimientos matemáticos" (Rojas, Flores y Carrillo, 2015, p. 147). Se refiere al contenido disciplinar de las matemáticas (Aguilar González et al., 2013).

¹ Los autores presentan su Modelo con las siglas en inglés.

² Conviene señalar que estos autores llaman Conocimiento Didáctico del Contenido al Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK).

- b) *Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM, Knowledge of the Structure of Mathematics)*. Incluye una visión de conjunto de la matemática, en donde se considera la conexión (interconceptual y temporal) y la complejidad del conocimiento matemático. La conexión interconceptual se refiere al enlace “entre ideas o conceptos matemáticos distintos, siendo los conectores las ideas matemáticas que vinculan representaciones de un concepto con el de otros” (Rojas, Flores y Carrillo, 2015, p. 148). La conexión temporal hace alusión a la relación entre el conocimiento del profesor y el contenido de enseñanza, lo que permite emplear un concepto o procedimiento en una situación nueva o más compleja. La idea de complejidad radica en que el docente debe analizar los contenidos matemáticos para saber cuáles se conectan.
- a) El *Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM, Knowledge of the Practice of Mathematics)*. Se refiere al conocimiento de las formas de conocer, crear y producir matemáticas, es decir, la manera de proceder en matemáticas. Por ejemplo, saber definir y usar definiciones, elegir representaciones, argumentar, generalizar, etc. (Rojas, Flores y Carrillo, 2015).

El Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) está integrado por los siguientes subdominios:

- a) El *Conocimiento de la enseñanza de las Matemáticas (KMT, Knowledge of Mathematics Teaching)*. Es el conocimiento de un profesor que le ayuda a elegir un material, ejemplo o tarea determinado para la enseñanza de un concepto o procedimiento. Incluye el conocimiento de teorías de la enseñanza de las matemáticas.
- b) El *Conocimiento de las características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM, Knowledge of Features of Mathematics Learning)*. Es un conocimiento que permite al profesor conocer la manera en que piensan los estudiantes sobre las matemáticas que, en otras palabras, comprende "todo lo relacionado con generar aprendizaje de las matemáticas" (Rojas, Flores y Carrillo, 2015, p. 149)
- c) El *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje (KMLS, Knowledge of Mathematics Learning Standards)*. Implica conocer la información que se ofrece en el currículo oficial; es decir, los contenidos, objetivos, orientaciones de enseñanza, materiales o recursos. Aunque este conocimiento puede extenderse a las recomendaciones de expertos en la materia.

Conviene resaltar el papel que juegan las creencias de los profesores en este modelo, pues sin ser propiamente un tipo de conocimiento, si pueden influir y aún determinar las concepciones y el actuar de los docentes al enfrentar las tareas de enseñanza. Las creencias, además pueden ser más estables y con raíces más profundas que los conocimientos.

Otro modelo muy completo es la llamada Teoría de la *Proficiencia*³ en la enseñanza de las matemáticas de Schoenfeld y Kilpatrick (2008) quienes proponen un marco de competencia para la enseñanza de las matemáticas, compuesto por las siguientes dimensiones:

1. *Conocer las matemáticas escolares en profundidad y amplitud.* Significa que los profesores deben contar con diversas maneras de conceptualizar un contenido matemático dependiendo del grado escolar o nivel educativo en el que se desempeñen. Además, deben ser capaces de representarlo en formas variadas, comprender sus aspectos claves y establecer relaciones con otros temas del mismo nivel. Este conocimiento permite al docente priorizar y organizar los contenidos para mostrar a los estudiantes “las grandes ideas” y ayudar a que no se pierdan en una gran cantidad de datos. Además, permite al profesor responder con flexibilidad a las interrogantes que le planteen los estudiantes.
2. *Reconocer a los estudiantes como personas que piensan.* Implica ser sensibles respecto a la manera en la que los alumnos conciben las matemáticas y cómo pueden llegar a construir sus conocimientos.
3. *Reconocer a los estudiantes como personas que aprenden.* Esta dimensión se relaciona de manera directa con la anterior, pero incluye otras cuestiones como por ejemplo ser consciente de la teoría del aprendizaje que se sigue para el desarrollo de las actividades en la clase y de las implicaciones que tiene en la interacción con los estudiantes.
4. *Diseñar y gestionar ambientes de aprendizaje.* Se refiere a la creación de entornos productivos de aprendizaje más que el solo hecho de gestionar la clase.
5. *Desarrollar normas para apoyar el discurso en el aula como parte de la “enseñanza para la comprensión”.* Implica el seguimiento de ciertas normas durante la clase. Entre las que destacan la explicación de las soluciones encontradas, así como el hecho de contraponer argumentos ante proposiciones de otros estudiantes o del profesor.
6. *Construir relaciones que favorezcan el aprendizaje.* Favorecer las relaciones al organizar la clase de manera que los estudiantes interactúen no solo con el contenido a aprender sino también con sus compañeros.
7. *Reflexionar sobre la propia práctica.* Pensar reflexivamente acerca de los problemas que se enfrentan y la manera en que pueden ser resueltos. (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008, p. 322).

Estos autores destacan el hecho de que su propuesta es apenas el inicio de la Teoría de la *Proficiencia* y que obviamente aún necesita ciertos ajustes.

El Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor diseñado por Godino (2009) es otra propuesta que intenta explorar qué es necesario que un profesor

³ El término *proficiencia* (del inglés *proficiency*) no existe en español, pero puede ser traducido como *competencia en, habilidad en, capacidad en o dominio de*. Así una posible traducción de la propuesta de Schoenfeld & Kilpatrick (2008) puede ser: Un marco de competencia para la enseñanza de las matemáticas.

sepa para realizar el trabajo de enseñar matemáticas. Esta propuesta tiene soporte teórico en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS)⁴; está compuesto por seis facetas y cuatro niveles que se pueden entender como las categorías o componentes del conocimiento del profesor. Cabe resaltar que Godino emplea el término *Conocimiento Didáctico-Matemático* del profesor a fin de concatenar tanto los conocimientos matemáticos como los relativos a la didáctica de las matemáticas, y que es lo que Ball (2000) denomina como *Conocimiento del Contenido* y *Conocimiento Pedagógico del Contenido*. La figura 3 muestra la organización de las facetas y los niveles que conforman el Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor, según el modelo propuesto por Godino.



Figura 3. Conocimiento base para enseñanza

Fuente: Godino (2009, p. 21)

Como se observa en el esquema, se trata de un modelo en forma de prisma hexagonal en donde la base representa “las facetas a tener en cuenta en un proceso de estudio y el alzado indica cuatro niveles de análisis sobre los cuales se puede fijar la atención” (Godino, 2009, p. 21)⁵.

Posteriormente Pino-Fan y Godino (2015) realizan una valoración de este modelo y proponen, empleando las mismas facetas y niveles, tres dimensiones para el análisis del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor (CDM) (figura 4).

⁴ El EOS “es un marco teórico que propone articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje” (Godino, 2009, p. 20)

⁵ Cada una de las facetas y niveles se describen en el modelo siguiente (Pino-Fan y Godino, 2015) pues son retomadas para su planteamiento.

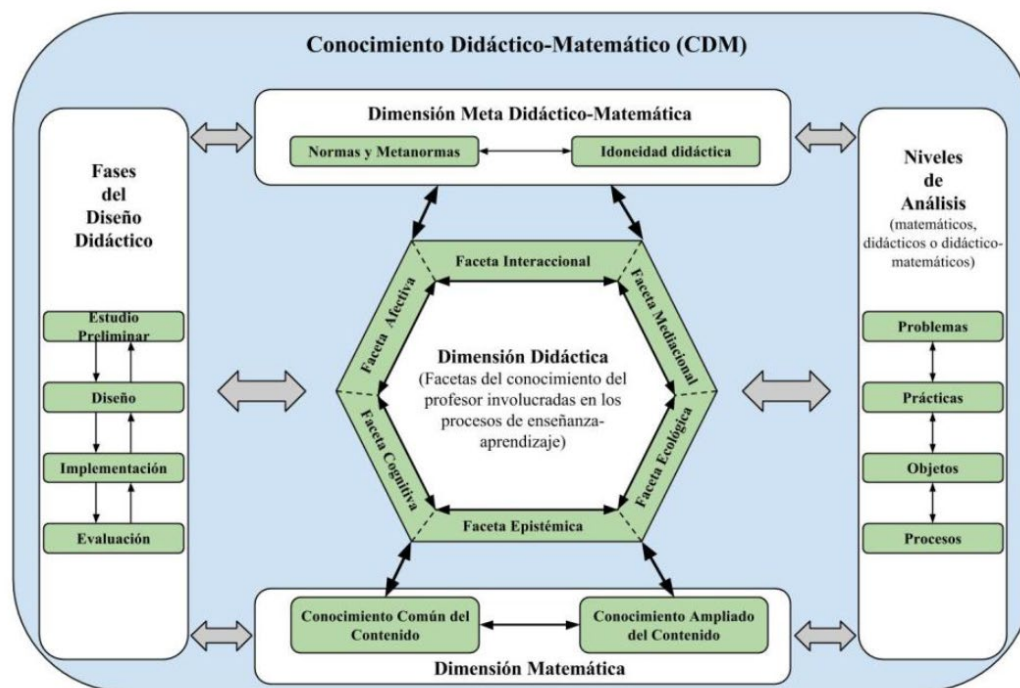


Figura 4. Dimensiones y componentes del CDM
Fuente: Pino-Fan y Godino (2015, p. 103)

La *Dimensión Matemática* incluye el *Conocimiento Común del Contenido* (CCC) y el *Conocimiento Ampliado del Contenido* (CAC). El CCC es “aquel conocimiento, sobre un objeto matemático concreto que se considera suficiente para resolver problemas o tareas propuestas en el currículo de matemáticas (...) y en los libros de texto de un nivel educativo” (Pino-Fan y Godino, 2015, p. 97). El CAC se refiere al conocimiento que tiene un profesor acerca de “las nociones matemáticas que, tomando como referencia a la noción matemática que se está estudiando (...) están más adelante en el currículo del nivel educativo en cuestión o en un nivel siguiente” (p. 97).

La *Dimensión Didáctica* se compone de las siguientes categorías o facetas:

1. *Epistémica*. Incluye un conocimiento para la enseñanza, esto es, un profesor debe ser capaz de resolver una tarea siguiendo diversos procedimientos y acciones, lo que implica contar con varias maneras de representar un objeto matemático; además, debe disponer de distintos argumentos y justificaciones al momento de resolver una tarea matemática.
2. *Cognitiva*. Es el conocimiento acerca de las características y las formas de pensar, conocer y actuar de los estudiantes en relación con el estudio de las matemáticas. Permite a los profesores planificar la enseñanza considerando los conocimientos previos de los alumnos infiriendo su zona de desarrollo próximo. Ayuda, durante el transcurso de la clase, a aprovechar los errores o conflictos para resolución de un problema.

3. *Afectiva*. Se refiere “a los conocimientos necesarios para comprender y tratar los estados de ánimo de los estudiantes, los aspectos que motivan o no a resolver un problema determinado” (Pino-Fan y Godino, 2015, p. 100)
4. *Interaccional*. Son los conocimientos indispensables para establecer, realizar y valorar las interacciones entre los agentes implicados en el proceso de aprendizaje matemático, incluyen relaciones de profesor-alumno, alumno-alumno, alumnos-contenido a estudiar y profesor-alumno-contenido. En esta faceta también se incluyen las normas (explicación, argumentación y fundamentación de las soluciones propuestas) que regulan la gestión de la clase.
5. *Mediacional*. Incluye los conocimientos de un docente para prever, emplear y valorar los diversos recursos, materiales o tecnológicos, con que cuenta con el fin de favorecer el logro del aprendizaje. Considera, además, la gestión del tiempo para las actividades en la clase.
6. *Ecológica*. Condensa los conocimientos del profesor acerca del currículo del nivel educativo en el que se desempeña, incluye las relaciones que se puedan establecer con otros currículos y también con aspectos sociales, políticos y económicos que condicionan tanto la enseñanza como el aprendizaje matemático. (Pino-Fan y Godino, 2015)

La *Dimensión Meta Didáctico-Matemática* se compone de los conocimientos referidos a las normas y metanormas, restricciones contextuales, la reflexión sobre la práctica y al análisis y valoración de la idoneidad didáctica. En Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006); Godino (2011); Godino, Rivas, Castro y Konic (2012); Godino, Batanero, Rivas y Arteaga (2013) pueden encontrarse elementos para el análisis de la idoneidad didáctica.

Como aparece en la figura 3, cada una de estas dimensiones puede ayudar a la valoración de los conocimientos de los profesores en diferentes etapas o fases del diseño didáctico: estudio preliminar, diseño, implementación o evaluación. Además, se pueden emplear para el estudio de los diferentes niveles de análisis (matemáticos, didácticos o didáctico-matemáticos) enfocados a problemas, prácticas, objetos o procesos.

4. Análisis de los distintos modelos del conocimiento del profesor: una comparación de semejanzas y diferencias

La tabla 4 es una propuesta para resumir y comparar las diferentes categorías y dimensiones de los modelos presentados. Muchas de estas categorías podrían superponerse o quizás aparecer en varias categorías de otros modelos. Por ejemplo, lo que Shulman (1987) denomina *Conocimiento Pedagógico del Contenido* podría incluirse también en la *Faceta mediacional* en el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático de Pino-Fan y Godino (2015). A continuación, se presenta un análisis de las coincidencias y semejanzas entre las propuestas.

4.1 Semejanzas

Consideramos importante resaltar, aunque resulte obvio, que la principal coincidencia en todas las propuestas radica en que para enseñar matemáticas es necesario contar con un repertorio de conocimientos que van más allá de un manejo de las reglas, teoremas, proposiciones y algoritmos. Es preciso un conocimiento matemático amplio y estructurado, lo mismo que un conocimiento didáctico que involucra las metodologías existentes. Lo anterior permite al profesor no solo contribuir al logro de los aprendizajes sino dotar de sentido y significado a su práctica. Esto es lo que se espera de un profesor, en especial en la educación básica en México: “Sin duda (enseñar matemáticas) reclama un conocimiento profundo de la didáctica de la asignatura que ‘se hace al andar’, poco a poco, pero es lo que puede convertir (una) clase es un espacio social de construcción del conocimiento” (Secretaría de Educación Pública, 2011, p. 350).

En todos los aportes se percibe al profesor con un rol activo que conoce no solo las matemáticas que enseña sino a sus alumnos y diversas maneras de hacer aprendibles las matemáticas. Un profesor sobre quien recae la responsabilidad del diseño y coordinación de las situaciones de aprendizaje. Lo anterior implica una participación activa del profesor y que tenga control de la actividad didáctica y del conocimiento matemático que se construye (Alanis et al, 2008).

Todas las propuestas contemplan que el profesor debe tener un conocimiento de los temas que enseña. Es decir que sea capaz de resolver los problemas y ejercicios que se plantean en el curso donde enseña, en otras palabras, resolver los problemas que plantea sus alumnos. Para Shulman (1987) es el Conocimiento del contenido; para Ball (2000, 2003) es el Conocimiento común del contenido; Carrillo, Climent y Muñoz Catalán (2012) lo llaman Conocimiento de los temas; Schoenfeld y Kilpatrick (2008) lo denominan Conocimiento de las matemáticas escolares con profundidad y amplitud; para Pino-Fan y Godino (2015) son el Conocimiento común del contenido y el Conocimiento ampliado del contenido.

Salvo Shulman (1987) en todas las propuestas se admite la necesidad de contar un conocimiento especializado del contenido matemático. Es decir, un conocimiento propio de los profesores que implica, entre otras tareas, el saber las razones por las que funcionan ciertos procedimientos matemático (Hill, Ball y Schilling, 2008); es un conocimiento que no se necesita en contextos distintos a la enseñanza (Ball, Thames y Phelps 2008). Para Carrillo, Climent y Muñoz Catalán (2012) se trata del conocimiento de la estructura de las matemáticas y también del conocimiento de la práctica matemática, lo que es la Faceta Epistémica para Pino-Fan y Godino (2015) y el Conocimiento de las matemáticas escolares con profundidad y amplitud en Schoenfeld y Kilpatrick (2008).

Un componente importante, presente en todos los aportes, es el conocimiento de los estudiantes, con diversos énfasis. Aunque como se verá más adelante, hay ciertos factores con respecto a los estudiantes, que no son tomados en cuenta en todos los modelos.

4.2 Diferencias

Son tres las diferencias que podemos resaltar. Aunque el conocimiento de los estudiantes está presente en todos los modelos, encontramos pequeños contrastes. Shulman (1986, 1987), Ball (2000, 2003) y Carrillo, Climent y Muñoz Catalán (2012) priorizan el conocimiento de los estudiantes desde una perspectiva cognitiva. Esto es, un profesor debe tener un conocimiento acerca de lo que saben, cómo piensan y cómo pueden aprender matemáticas los alumnos. Por su parte, Schoenfeld y Kilpatrick (2008) mencionan que un profesor debe ser consciente que los estudiantes son personas que piensan (con todo lo que ello implica: tener sentimientos, valores, actitudes, necesidades, afectos que muchas veces condicionan el aprendizaje de las matemáticas). Algo similar aparece en Pino-Fan y Godino pues no solo consideran una faceta cognitiva, sino que contemplan una afectiva, donde se concibe a los alumnos como sujetos que presentan diferentes “estados de ánimo, poseedores de aspectos que motivan o no al resolver un problema” (Pino-Fan y Godino, 2015, p. 100).

Shulman, Ball y Carrillo, Climent y Muñoz Catalán no hacen explícita la necesidad de la gestión de las relaciones entre el profesor, los alumnos y el contenido matemático que es estudiado. Mientras que en Pino-Fan y Godino esto se encuentra en la faceta interaccional, y para Schoenfeld y Kilpatrick se ubican en la dimensión donde proponen que un profesor debe ser capaz de construir relaciones que apoyen el aprendizaje.

Finalmente, salvo en Schoenfeld y Kilpatrick, todos los modelos convergen en que es necesario que un profesor tenga un conocimiento del currículo, acerca de cómo está constituido y de los diversos materiales de apoyo (libros de texto de los alumnos, libros de apoyo al docente, etc.). Tal vez para estos autores lo anterior se encuentra implícito en la dimensión que llaman “conocimiento de las matemáticas escolares con profundidad y amplitud”.

En general, son más las coincidencias entre los modelos, cuestión que no es de sorprender pues con ellos se aspira a explicar un mismo fenómeno. También existen categorías en algunas de las propuestas que no pueden ser comparadas de manera directa con otras pertenecientes a un modelo diferente. Por ejemplo, Schoenfeld y Kilpatrick (2008) proponen una categoría específica para la *Reflexión sobre la propia práctica*, la cual no aparece, al menos de forma explícita, en ninguno de los otros modelos.

www.fisem.org/web/union
<http://www.revistaunion.org>

Tabla 4. Comparación de las dimensiones de los distintos Modelos del conocimiento del Profesor

Conocimiento base para la enseñanza (Shulman, 1987)	Mathematical Knowledge Teaching (Ball, 2000 y 2003)	Mathematical Teacher's Specialized Knowledge (Carrillo, Climent y Muñoz-Catalán 2012)	Teoría de la Proficiencia (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008)	Conocimiento Didáctico-Matemático (Pino-Fan y Godino, 2015)
Conocimiento del contenido	Conocimiento común del contenido	Conocimiento de los temas	Conocimiento de las matemáticas escolares con profundidad y amplitud.	Conocimiento común del contenido.
	Conocimiento especializado del contenido. Conocimiento del horizonte matemático.	Conocimiento de la estructura de las matemáticas. Conocimiento de la práctica matemática.		Conocimiento ampliado del contenido. Faceta Epistémica.
Conocimiento de los estudiantes y sus características.	Conocimiento del contenido y los estudiantes.	Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas.	Conocimiento de los estudiantes como personas que piensan.	Faceta Cognitiva Faceta Afectiva
Conocimiento pedagógico general.				
Conocimiento pedagógico del contenido.	Conocimiento del contenido y la enseñanza.	Conocimiento Didáctico del Contenido Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas.	Diseñar y gestionar entornos de aprendizaje	Dimensión didáctica que involucra las diferentes facetas
			Construir relaciones que apoyen el aprendizaje.	Faceta Interaccional.
			Desarrollar normas de la clase como parte de la "enseñanza para la comprensión".	Faceta Mediacional.
Conocimiento curricular Conocimiento de contextos educativos. Conocimientos de los fines, propósitos y valores de la educación.	Conocimiento del currículo.	Conocimiento de los estándares de aprendizaje.		Faceta Ecológica.

Fuente: Construcción propia a partir de (Pino-Fan y Godino, 2015)

www.fisem.org/web/union
<http://www.revistaunion.org>

5. Conclusiones

La finalidad de este breve recorrido por algunos de los modelos que analizan el conocimiento que debe poseer un profesor para enseñar matemáticas es analizar las características generales de aquellas propuestas más empleadas en la investigación en didáctica de las matemáticas. Es evidente que el trabajo no es exhaustivo, pero con lo anterior puede tenerse una visión panorámica de los modelos que se han propuesto.

Como se apuntaba ya, todos tienen un fin común: analizar el conocimiento necesario para la enseñanza de matemáticas⁶. Los modelos concurren en que el conocimiento que necesitan los profesores para enseñar matemáticas debe estar formado por dos grandes bloques de conocimientos: uno propiamente matemático y otro didáctico.

En general encontramos más coincidencias que diferencias. Este recorrido proporciona elementos que esperamos motiven a profundizar en alguna de las propuestas a fin de contribuir en su desarrollo o aportar ideas para su mejora. De lo que estamos seguro es que los modelos que se analizan, aun con sus diferencias, constituyen una especie de carta de navegación para pensar, planear y llevar a cabo la formación, capacitación y actualización de los profesores de matemáticas.

Referencias

- Alanís, J., Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R., Garza, A. & Rodríguez, R. (2008). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Editorial Trillas
- Aguilar González, Á., Carreño, E., Carrillo Yáñez, J., Climent Rodríguez, N., González, C., Carlos, L. & Rojas, N. (2013). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK. Recuperado a partir de <http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/8268>
- Ball, D. L. (2000). Bridging Practices. Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51(3), 241–247.
- Ball, D. (2003). What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics. *Secretary's Summit on Mathematics, US Department of Education*. Recuperado a partir de http://www.erusd.k12.ca.us/projectalphaweb/index_files/MP/BallMathSummitFeb03.pdf

⁶ Con excepción del Conocimiento Base para la Enseñanza de Shulman (1987). Sin embargo, este se consideró pues fue un punto de partida para los que aquí se analizan.

- Ball, D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Carrillo, J., Climent, N. & Muñoz-Catalán, M. (2012). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. *PROCEEDINGS OF CERME*. Recuperado a partir de http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/wg17_papers.html
- Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13–31.
- Godino, J. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Conferencia presentada en la XIII CIAEM-IACME*. Recuperado a partir de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf
- Godino, J., Batanero, C., Rivas, H. & Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *Revemat: revista eletrônica de educação matemática*, 8(1). <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p46>
- Godino, J., Bencomo, D., Font, V. & Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, XXVII(2), 221–252.
- Godino, J., Rivas, M., Castro, W. F. & Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 7(2), 1–21.
- Hill, H., Ball, D., & Schilling, S. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372–400.
- Hill, H., Rowan, B. & Ball, D. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371–406. <https://doi.org/10.3102/00028312042002371>
- Hill, H., Schilling, S. & Ball, D. (2004). Developing measure of teachers Mathematics Knowledge for Teaching. *The elementary School Journal*, 105. Recuperado a partir de [https://www.google.com.mx/?gws_rd=ssl#q=Hill%2C+Ball+y+Schilling+\(2008\)](https://www.google.com.mx/?gws_rd=ssl#q=Hill%2C+Ball+y+Schilling+(2008))
- Krainer, K. & Llinares, S. (2010). Mathematics teacher education. *International Encyclopedia of Education* (Vol. 7, pp. 702–705). United States of America: Elsevier.
- Okoli, C. (2015). A Guide to Conducting a Standalone Systematic Literature Review. *Communications of the Association for Information Systems*, 37, 879–910.
- Pino-Fan, L. & Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, XXXVI(1), 87–109.

- Rojas, N., Flores, P., & Carrillo, J. (2015). Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales. *Boletim de Educação Matemática*, 20(51), 143–166.
- Rowland, T. & Ruthven, K. (Eds.). (2011). *Mathematical Knowledge in Teaching*. Dordrecht: Springer. Recuperado a partir de <http://link.springer.com/10.1007/978-90-481-9766-8>
- Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, 5(4), 129–145.
- Schoenfeld, A. & Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Vol. 2. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (Primera, Vol. 2). Sense publishers. Recuperado a partir de http://vocserve.berkeley.edu/faculty/AHSchoenfeld/Schoenfeld_Teaching_Proficiency.pdf
- Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica. Primaria. Cuarto grado* (Primera Edición Electrónica). México, D.F.: Secretaría de Educación Pública (SEP).
- Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 52(1). Recuperado a partir de <http://people.ucsc.edu/~ktellez/shulman.pdf>
- Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de dos casos*. (Tesis de Doctorado). España: Universidad de Huelva. Recuperada de <http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/4509>.

Autores:

Juan Francisco Gonzalez Retana: Doctor en Investigación Educativa, por la Universidad Autónoma de Aguascalientes, México. Líneas de investigación: Formación matemática de profesores, Educación Matemática.

juanfranciscoqonzalezretana@gmail.com

Daniel Eudave Muñoz: Doctor en Educación, por la Universidad Autónoma de Aguascalientes, México. Líneas de investigación: Educación Matemática, Formación en estadística.

deudave@correo.uaa.mx