

Creación de problemas sobre triángulos, jugando con varillas

Uldarico Malaspina

<p>Resumen</p>	<p>En este artículo se presenta y comenta actividades, preguntas y problemas creados acerca de triángulos, en una experiencia didáctica con 18 niñas y 12 niños de quinto grado de primaria, a partir de un material presentado a ellos, elaborado para tal ocasión. Fue una experiencia de indagación y aprendizaje en un ambiente lúdico, que despertó emociones positivas en los estudiantes y los estimuló al descubrimiento de propiedades de los triángulos y la creación de problemas relacionados con ellas. El problema con el que iniciamos este artículo, se originó en una interesante conversación entre los estudiantes de uno de los grupos de trabajo.</p> <p>Palabras clave: Creación y resolución de problemas; indagación; aprender jugando; matemática en primaria; dominio afectivo.</p>
<p>Abstract</p>	<p>In this article we present and comment on activities, questions and problems created about triangles, in a didactic experience with 18 girls and 12 boys from the fifth grade of primary school, based on a material presented to them, prepared for that occasion. It was an experience of inquiry and learning in a playful environment, which aroused positive emotions in the students and stimulated them to discover the properties of triangles and to pose problems related to them. The initial problem in this article originated in an interesting conversation between the students of one of the working groups.</p> <p>Keywords: Problem posing and problem solving; inquiry; learning by playing; mathematics in elementary school; affective domain.</p>
<p>Resumo</p>	<p>Neste artigo apresentamos e comentamos atividades, questões e problemas criados sobre os triângulos, em uma experiência didática com 18 meninas e 12 meninos da quinta série do ensino fundamental, a partir de um material apresentado a elas, elaborado para a ocasião. Foi uma experiência de investigação e aprendizagem em um ambiente lúdico, que despertou emoções positivas nos alunos e os estimulou a descobrir as propriedades dos triângulos e criar problemas a eles relacionados. O problema com o qual iniciamos este artigo teve origem em uma interessante conversa entre os alunos de um dos grupos de trabalho.</p> <p>Palavras-chave: Criação e resolução de problemas; investigação; aprender jogando; matemática no ensino fundamental; domínio afetivo.</p>

1. Problema

Julia recibe 5 conjuntos de varillas de madera, de tamaños y colores diferentes. Cada conjunto tiene 3 varillas de la misma longitud y del mismo color, como se muestra en la Figura 1 y se especifica en la Tabla 1. ¿Es posible mostrar dos triángulos rectángulos, de tamaños diferentes, uniendo algunas de las varillas por sus extremos? Justificar.



Color	Longitud de cada varilla
Azul	10 pulgadas
Verde	8 pulgadas
Amarillo	6 pulgadas
Rojo	4 pulgadas
Blanco	2 pulgadas

Figura 1. Material entregado en el aula, a cada grupo.

Tabla 1. Especificaciones sobre el material entregado.

Cabe aclarar que este problema no es el punto de partida en la experiencia didáctica que explicaremos a continuación. El problema emerge en el marco de las fases 4 y 5.

2. La experiencia didáctica

Fue una experiencia didáctica en cinco fases, desarrollada en octubre del 2019, con el apoyo de la profesora Maritza León Jordán, en la Institución Educativa Nuestra Señora del Carmen, de Lima Metropolitana, con 18 niñas y 12 niños del quinto grado de primaria, ubicados en un aula, en cinco grupos de 4 integrantes y dos grupos de 5, en sus respectivas mesas. El propósito fundamental fue estimular a los estudiantes a aprender matemáticas en un ambiente lúdico, indagando, creando actividades, formulando preguntas y creando problemas, usando un material didáctico especialmente diseñado y considerando como entorno matemático los triángulos.

Fase 1. A los siete grupos, se les repartió material similar al descrito en el enunciado del problema (Figura 1 y Tabla 1). Cada grupo recibió sus 15 varillas y se les pidió que, por unos minutos, exploren el material y jueguen libremente con él.

Fase 2. Se les pidió que, en unas hojas de papel que se les repartió, que tenían tres recuadros para escribir, en cada grupo escriban, en el primer recuadro, algunas actividades que se les haya ocurrido o se les ocurra hacer, relacionadas con triángulos, uniendo algunas de las varillas por sus extremos. En las Figuras 2 y 3 mostramos lo que escribieron en el Grupo 7, conformado por 3 niñas y 2 niños.

- Un triángulo con tres lados
de color verde del mismo
tamaño todos sus lados.

Figura 2

- Un triángulo con 2 colores
rojo y 1 amarillo.

Figura 3

Observamos que, como parte de su juego libre, hicieron una actividad que mostramos en la Figura 4. Al comentarles que era muy lindo lo que habían hecho y preguntarles por qué no la escribieron como una de sus actividades, manifestaron que era difícil de explicar. Ante la pregunta ¿Cómo se les ocurrió armar esas figuras? Respondieron que partieron del triángulo más grande que se podía formar con tres palitos.

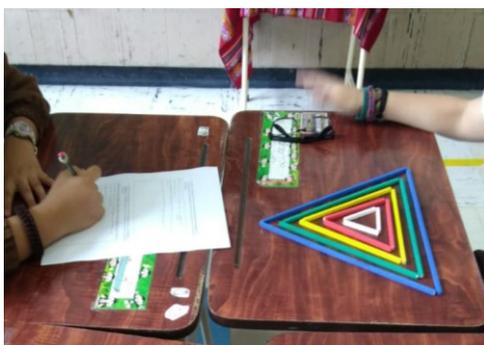


Figura 4. Una de las actividades con el material, en el juego libre de los participantes del Grupo 7

Fase 3. Se les pidió que ahora escriban, en el segundo recuadro de la hoja de papel, una o más preguntas teniendo en cuenta las actividades que habían escrito o habían hecho con las varillas, relacionadas con triángulos. Algunas de tales preguntas, formuladas en el Grupo 7, son las que mostramos en las Figuras 5 y 6.

¿Se puede crear un triángulo
dentro de otro triángulo?

Figura 5

¿Los triángulos pueden estar
encima de otros triángulos?

Figura 6

En el Grupo 5, integrado por 4 niñas, jugando libremente, descubrieron por indagación espontánea, que con tres varillas de longitudes diferentes, no siempre se puede construir un triángulo cuyos lados tengan las longitudes de las varillas. Para esta fase, una de las niñas preguntaba si se podía formar el triángulo o no al mostrar tres varillas escogidas al azar, pero de diferentes tamaños, y otra niña “adivinaba” si se podía formar o no el triángulo.

Fase 4. Se les pidió que esta vez escriban en el tercer recuadro de la hoja de papel, un problema que se les ocurra, relacionado con triángulos, teniendo en cuenta las actividades y preguntas que habían formulado antes. Además, deberían escribir una solución del problema que inventen. En la Figura 7 mostramos el problema y la solución que escribieron en el Grupo 7

¿Cuántos triángulos se pueden formar con los de verde, rojo y amarillo y cual sería su perímetro?
RPTA: Se puede formar 3 triángulos y el perímetro de cada 1 es 18.

Figura 7

En su mesa de trabajo observamos que habían construido los triángulos del problema, como se ve en la Figura 8:



Figura 8

Las niñas del Grupo 5 no escribieron la interesante actividad de “adivinación” que estuvieron haciendo, pero como problema escribieron:

¿Siempre se podrá formar triángulos con diferentes tamaños de palitos¹?

No escribieron una solución a tal problema. Cuando les hice notar que ellas ya tenían la respuesta, su reacción fue “Sí sabemos la respuesta, pero no sabemos cómo escribir una solución del problema”.

Otro problema, que lo propusieron con gran entusiasmo los del Grupo 4 (2 niñas y 2 niños) fue el siguiente:

¿Se puede formar un triángulo de perímetro 30 usando los 5 colores?

Tampoco escribieron su solución, pero al preguntarles, mostraron un caso concreto, usando las varillas: un triángulo cuyos lados eran: uno de ellos, las varillas blanca y roja (longitud: 6 pulgadas); otro lado, las varillas amarilla y verde (longitud: 14 pulgadas); y el tercer lado, la varilla roja (longitud: 10 pulgadas).

En el Grupo 6 (3 niñas y 2 niños) propusieron:

Encontrar el perímetro del triángulo rectángulo que se puede formar con tres palitos.

Estuvieron muy entretenidos en discusiones sobre diversos tipos de triángulos y no escribieron su solución, aunque la mostraron en su mesa, con las varillas de longitudes 6, 8 y 10 pulgadas.

Fase 5. Se permitió el intercambio intergrupar, libre, de las experiencias tenidas en las fases anteriores. Destaco una conversación que resumo a continuación:

¹ Se está usando la palabra palitos, al referirse a las varillas.

Niño 1: No se puede formar un triángulo rectángulo.

Niño 2: Sí se puede. (Y formó el triángulo de lados 6, 8 y 10)

Niño1: ¿Y cómo sabes que es rectángulo?

Niño 3: ¿No lo ves?

Niño 4: Mide el ángulo...

Niño 5: Va a traer al Niño 6 del Grupo 6

Niño 5: Él sabe (refiriéndose al niño 6) por qué este triángulo es rectángulo.

Niño 6 (Luego de mirar) Ese triángulo es rectángulo porque se cumple Pitágoras.

Miren: (y lo aplicó correctamente: 6 al cuadrado es 36; 8 al cuadrado es 64 y su suma es 100, que es el cuadrado de 10).

Los otros niños: Silencio y miradas escépticas.

Me llamó mucho la atención, tanto esta conversación como la seguridad del Niño 6. Luego de la sesión en el aula, en el intermedio para su siguiente clase, conversé brevemente con él y me mostró su gran actitud positiva hacia las matemáticas, fuertemente estimulada en su casa, principalmente por su padre, ingeniero de profesión. Tenía una inquietud muy grande para aprender mucho más de matemáticas. En la conversación le pregunté en relación al problema que propusieron en su grupo (*Encontrar el perímetro del triángulo rectángulo que se puede formar con tres palitos.*)

- ¿Por qué especificaron que el triángulo rectángulo que se forme tenía que ser con tres palitos?

Niño 6: Porque también se puede formar otro triángulo rectángulo con más palitos

- ¿Cómo?

Niño 6: Poniendo dos palitos del mismo tamaño en cada lado.

El tiempo del intermedio ya se había acabado y el niño fue corriendo a su siguiente clase. Evidentemente, el niño se refería al triángulo rectángulo de lados con longitudes $6 + 6$, $8 + 8$ y $10 + 10$ pulgadas, respectivamente, que seguramente lo habían construido ya en su grupo, con el material recibido y que es semejante al triángulo rectángulo de lados con longitudes 6, 8 y 10 pulgadas. Como puede advertir el lector, es a partir de esta conversación y de las indagaciones del Grupo 6, que surgió el problema con el que iniciamos este artículo y ya tiene su solución.

3. Observaciones

a) La Fase 1 despertó entusiasmo y relajó a los estudiantes, ante la presencia mía, como persona extraña de su entorno cotidiano. Las diversas representaciones libres que hicieron, les hizo llegar, en todos los grupos, a por lo menos una figura triangular, o a figuras con la presencia de una figura triangular.

b) Las actividades que escribieron en la Fase 2, no fueron todas las que realmente hicieron, en el marco de la Fase 1. Como ya lo comenté, la Figura 4 (un conjunto de triángulos equiláteros encajados) muestra una actividad interesante del Grupo 7, en la que podemos percibir la semejanza de triángulos, pero que no fue escrita "porque es difícil explicarla", como ellos manifestaron. Esto revela lo importante que es estimular a describir, y en general, a verbalizar experiencias. Desarrollar esta capacidad contribuirá fuertemente a desarrollar también la capacidad de crear problemas, pues una de las dificultades más presentes es la claridad en el texto del problema que se inventa.

Es interesante notar que la pregunta del Grupo 7, presentada en la Figura 5 (¿Se puede crear un triángulo dentro de otro triángulo?), tiene mucha relación con la actividad mostrada en la Figura 4 que acabo de comentar. Ciertamente, la pregunta es más amplia, pues el triángulo que esté en el interior de otro triángulo, no necesariamente debe ser semejante a tal triángulo; así, a partir de tal pregunta se puede crear otros problemas, como

Con el material descrito, ¿se puede construir dos triángulos, no semejantes entre sí, en el interior del triángulo equilátero de color rojo?

Con el material descrito, ¿se puede construir dos triángulos semejantes entre sí, no equiláteros, de modo que uno esté en el interior del otro?

c) La actividad de indagación, descubrimiento y “adivinación” del Grupo 5, que mencioné en la Fase 3, (no escrita, pero realizada muy dinámicamente) está directamente relacionada con el problema que propusieron (¿Siempre se puede formar triángulos con diferentes tamaños de palitos?). Las niñas no escribieron su solución, aunque, en verdad, la tenían, pues encontraron que no se puede formar un triángulo con las varillas de longitudes 2, 4 y 8 pulgadas, uniéndolas por sus extremos.

d) La pregunta formulada por el Grupo 7, mostrada en la Figura 6 (¿Los triángulos pueden estar encima de otros triángulos?) tiene relación con una actividad de construcción de triángulos “iguales”, colocados uno encima de otro, que está claramente vinculada con la congruencia de triángulos.

4. Comentarios

La experiencia didáctica muestra el gran valor que tiene, didáctica, matemática y emocionalmente, estimular la indagación en los niños y crear condiciones que favorezcan crear actividades, formular preguntas e inventar problemas. Es esencial propiciar el aprendizaje de las matemáticas teniendo muy en cuenta el aspecto emocional de los estudiantes, que está intensamente presente cuando los niños juegan; más aún cuando crean sus propios juegos (Malaspina, 2021b; Malaspina y Malaspina, 2020) y cuando desarrollan su creatividad (Domínguez et al., 2020). En ese sentido, las actividades lúdicas, empezando por una manipulación libre del material que se les entregó (Fase 1), resultó fuente de descubrimientos y de avances en su aprendizaje y contribuyó a que al final de la experiencia se adviertan actitudes positivas hacia el aprendizaje de la matemática. Lo lúdico estuvo totalmente a cargo de los estudiantes, pues no se les presentó ningún juego estructurado, sino se les pidió una manipulación libre del material didáctico preparado y se estimuló su creatividad.

La mayor riqueza de la experiencia quizás no está precisamente en la parte “formal” que tenían que cumplir los niños al describir por escrito las actividades que hicieron o al escribir preguntas y problemas, sino en lo que ellos fueron descubriendo “informalmente” mientras jugaban libremente en cada grupo, interactuando, desarrollando su creatividad y avanzando en su pensamiento matemático. En varios casos, estos descubrimientos y avances no fueron llevados al papel, como lo hago notar en las observaciones b) y c). Ciertamente, el rol del profesor de aula resulta esencial, tanto para estimular la creatividad de los estudiantes como para captar y retomar esos avances “informales”, cuando les

muestre un conjunto integrado de conocimientos, entre los que estén aquellos que los estudiantes han ido descubriendo o discutiendo.

Otro aspecto de la riqueza de esta experiencia, evidentemente relacionada con lo dicho en el párrafo anterior, es que las actividades, preguntas y problemas creados por los niños – “formal” o “informalmente” – son fuente de nuevas preguntas, actividades y problemas que el profesor puede crear y usar en su clase. Algunos de estos se muestran al final de la observación b). Inclusive el problema inicial de este artículo es una manera de darle forma a lo que trabajó el Grupo 6 y a mi conversación con el Niño 6. Notar que en la experiencia didáctica descrita, estuvieron presentes “informalmente”, los conceptos de semejanza y congruencia de triángulos, la existencia de triángulos, así como los teoremas de la desigualdad triangular y el de Pitágoras.

También es muy importante notar que los estudiantes propusieron problemas no típicos, como *¿Siempre se puede formar triángulos con tres palitos de tamaños diferentes?* Y que no escribieron la solución, a pesar de tenerla, por no reconocer en ella una “solución típica”, como las que usualmente se trabaja en las aulas. Esto revela la importancia de trabajar con los niños problemas con cuantificadores y de usar los contraejemplos para justificar la falsedad de algunas afirmaciones o la respuesta negativa a algunas preguntas que involucren el “siempre” o el “para todo”. En este marco, es muy importante que el Grupo 5 haya planteado la pregunta como un problema; más aún, la actividad – incluidas las “adivinanzas” – el problema y el caso que mostraron, constituyen una aproximación intuitiva al teorema de la desigualdad triangular, como consecuencia de indagaciones en un contexto lúdico creado por las propias niñas.

Finalmente, cabe destacar que para que los docentes desarrollen experiencias similares a la descrita y exploten muchas de sus potencialidades didácticas y matemáticas, es esencial que ellos mismos vivan experiencias similares en cursos de formación inicial y continua de profesores. Una de estas experiencias está ampliamente expuesta en Malaspina (2021a).

Bibliografía

- Domínguez, H. Crespo, S. del Valle, T. Adams, M. Coupe, M. Gonzalez, G. & Ormazabal, Y (2020). Learning to Transform, Transforming to Learn: Children's Creative Thinking with Fractions. *Journal of Humanistic Mathematics*, 10, (2): 76-101. DOI: 10.5642/jhummath.202002.06
<https://scholarship.claremont.edu/jhm/vol10/iss2/6>
- Malaspina, U. (2021a) Triángulos en un rectángulo. Situación, actividades, preguntas y problemas. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 61, 1 - 9
- Malaspina, U. (2021b). Creación de problemas y de juegos para el aprendizaje de las Matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 10(1), 1-17.
- Malaspina, M., & Malaspina, U. (2020). Game Invention as Means to Stimulate Probabilistic Thinking. *Statistics Education Research Journal*, 19(1), 57-72.
<https://doi.org/10.52041/serj.v19i1.119>

Autor: Malaspina Jurado, Uldarico
Doctor en Ciencias, Profesor Emérito de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Expositor en foros internacionales de Educación Matemática. Autor y coautor de libros y artículos de Matemática y Educación Matemática. Académico de Número de la Academia Nacional de Ciencias del Perú. Palmas Magisteriales - Grado Amauta