

www.fisem.org/web/union
<http://www.revistaunion.org>

Estrategias didácticas en libros de matemáticas españoles del siglo XIX: los tratados elementales de Juan Cortázar

Carmen León Mantero, Alexander Maz-Machado, María José Madrid,
 Noelia Jiménez-Fanjul

Fecha de recepción: 09/08/2016
 Fecha de aceptación: 21/02/2018

<p>Resumen</p>	<p>El siguiente trabajo analiza las estrategias didácticas halladas en los cuatro tratados elementales, <i>Tratado de Aritmética</i>, <i>Álgebra Elemental</i>, <i>Geometría Elemental</i> y <i>Trigonometría y Topografía</i>, del autor del siglo XIX, Juan Cortázar. Se encuentran en las obras numerosas estrategias destinadas a optimizar el aprendizaje de los alumnos y a servir de apoyo a los profesores que usaban sus libros de texto. Entre ellas destacan sugerencias, propuestas metodológicas, contenidos originales, aplicaciones teóricas y adaptadas a la realidad de la época, figuras y representaciones aclaratorias, así como el uso de materiales manipulativos.</p> <p>Palabras clave: Historia de la Educación Matemática, Juan Cortázar, siglo XIX, estrategias didácticas.</p>
<p>Abstract</p>	<p>The following study analyses the teaching strategies included in the four basic treatises: <i>Treatise on Arithmetic</i>, <i>on Elementary Algebra</i>, <i>on Elementary Geometry</i> and <i>on Trigonometry and Topography</i>, written by the nineteenth century author, Juan Cortázar. Through a didactic content analysis, there were found in the books several strategies to optimize the learning of the students and to provide support to teachers who used these treatises. Among these strategies, there are suggestions, methodological proposals, original contents, applications some of them purely theoretical and other adapted to the daily life of that century, figures and explanatory representations and the use of manipulative materials.</p> <p>Keywords: History of Mathematics Education, Juan Cortázar, nineteenth century, teaching strategies.</p>
<p>Resumo</p>	<p>O artigo a seguir analisa as estratégias de ensino encontrados nos quatro tratados fundamentais, <i>Tratado Aritmética (Tratado de Aritmética)</i>, <i>Álgebra Elemental (Álgebra Elemental)</i>, <i>Geometria Elemental (Geometría Elemental)</i> e <i>Trigonometria e Topografia</i></p>

(*Trigonometría y Topografía*), o autor do século XIX, Juan Cortázar. Estão em obras inúmeras estratégias para otimizar o aprendizado dos alunos e dar apoio aos professores usando seus livros . Estes incluem sugestões, propostas metodológicas , conteúdo original , teóricos e adaptados à realidade da época, figuras e aplicações representações explicativas eo uso de materiais manipuláveis.

Palavras-chave: História da Educação Matemática, Juan Cortazar, século XIX, estratégias de ensino.

1. Introducción

La evolución histórica de los conceptos matemáticos, su enseñanza y todos aquellos aspectos que permitan conocer la forma en la cual éstos adquirieron el significado que poseen actualmente, conforma el campo de estudio de la Historia de la Educación Matemática. Desde la invención de la imprenta en el siglo XV, el medio más usual de transmisión de información a lo largo del tiempo ha sido el libro. Por otro lado, es innegable la relevancia del libro de texto en el terreno educativo. La investigación histórica centrada en libros de texto escolares nos proporciona información tanto de los conocimientos científicos como de los conocimientos didácticos utilizados en una época determinada (Maz-Machado y Rico, 2015).

A nivel internacional se han realizado diversos estudios centrados en el análisis de libros de texto, algunos investigan sobre conceptos: por ejemplo, los números negativos en manuales españoles de los siglos XVIII y XIX (Maz y Rico, 2007; 2009a), el análisis de manuales de matemáticas alemanes y franceses para determinar el tratamiento que se le daba a los números negativos en la primera mitad el siglo XIX Schubring (1988), o el concepto de límite funcional en libros de bachillerato y Curso de Orientación Universitaria entre 1940-1995 (Sierra, González y López, 1999). En ocasiones se analizan los libros de matemáticas en un país: por ejemplo, el análisis que realiza Beyer (2006) sobre las aritméticas utilizadas en Venezuela durante el siglo XIX, o el estudio de Frejd (2013) en el que se analizan y comparan libros antiguos de álgebra publicados en Suecia entre 1794 y 1836. Otra línea de investigación se orienta al estudio de un autor de libros de matemáticas a través del análisis de sus obras. Ejemplo de esto son los estudios sobre los matemáticos españoles José Mariano Vallejo (Maz-Machado y Rico, 2013) y Thomas Cerdá (Maz y Rico, 2009b) o el estudio sobre Lacroix y el cálculo (Caramalho, 2008). Finalmente cabe señalar los estudios históricos sobre tipos de problemas en libros de matemáticas (Gómez, Sanz y Huertas, 2016; Meavilla y Oller, 2015) o sobre aspectos didácticos o representaciones (Madrid, Maz-Machado y León-Mantero, 2015; Maz-Machado y Rico, 2015).

Schubring (1987) señaló algunos aspectos metodológicos para el análisis histórico de libros de texto focalizado tres dimensiones. Las dos primeras dimensiones consisten en analizar los cambios entre las distintas ediciones de un libro de texto tomando un manual elemental como punto de partida y estudiando después otro texto

que se ocupe de un campo conceptualmente relacionado con el primero. Por último, en la tercera dimensión, se analizan los cambios dados en los libros de texto marcados por el contexto histórico en el que se desarrollan, como por ejemplo, la evolución de los materiales, debates didácticos, etc.

Son muchos los matemáticos españoles que se destacan como autores de libros de gran influencia educativa en la España del siglo XIX, entre ellos José Mariano Vallejo, Acisclo Fernández Vallín y Bustillo, Joaquín María Fernández y Cardin, Zoel García de Galdeano o Juan Cortázar entre otros (Rico y Maz, 2005). De ellos escogimos a Juan Cortázar (1809-1873), cuya relevancia se manifiesta entre otros aspectos porque fue uno de los dos primeros Catedráticos de matemáticas españoles de la Universidad Central de Madrid cuyos libros de texto tuvieron gran relevancia en la segunda mitad del siglo XIX y el primer cuarto del siglo XX (Vea, 1986). Éstos abarcan todas las ramas de las matemáticas y todas las etapas educativas, desde la educación primaria hasta la Universidad. Además, fueron reeditados en numerosas ocasiones y elegidos para formar parte del listado de libros de texto oficial para la enseñanza secundaria en el año 1846, muestra del notable éxito de su obra (Peset, Garma y Pérez-Garzón, 1978).

Cortázar estudió ingeniería en la Escuela Central de Artes y Manufacturas de París y, al volver a España, se licenció en Ciencias Físico-Matemáticas. Fue profesor de matemáticas desde que cumplió los 18 años, primero en la escuela en la que estudió Humanidades, después en secundaria en el Instituto de Noviciado de Madrid y, por último, en la Universidad Central en la asignatura Álgebra Superior y Geometría Analítica (León-Mantero y Maz-Machado, 2015). Por tanto, es posible considerarlo como un relevante e influyente autor que contribuyó tanto a la difusión de los conocimientos matemáticos como a la construcción de las matemáticas escolares de su época.

El interés didáctico que suscita este estudio se manifiesta en la importancia de conocer las estrategias didácticas que se planteaban en el pasado para la transmisión y enseñanza de los conocimientos matemáticos en los libros publicados por un autor de reconocido éxito en el panorama educativo español del siglo XIX. En la actualidad todos los implicados en el proceso de enseñanza de las matemáticas se preocupan por usar diversas estrategias docentes para beneficio de los alumnos. Conocer los recursos del pasado permite al profesor reconocer si los libros de texto actuales realmente innovan o simplemente reproducen las estrategias didácticas ya utilizadas en el pasado.

2. Objetivo

El presente estudio tiene por objetivo identificar y analizar las estrategias metodológicas o didácticas en los cuatro tratados elementales de Juan Cortázar (1809-1873).

3. Metodología

Esta investigación es descriptiva y cualitativa de carácter exploratorio.

De la abundante producción de Cortázar se seleccionaron los cuatro tratados elementales, por la amplitud y profundidad de los temas que presentan, por ser los que poseen un mayor número de ediciones y por ser los elegidos como libros de texto oficial en la enseñanza secundaria:

- *Tratado de Aritmética*, cuya primera edición es del año 1846 y constó de 45 ediciones. Se ha analizado la decimonovena edición, publicada en 1866 en Madrid por la Imprenta de D. Antonio Peñuelas.
- *Tratado de Álgebra Elemental*, cuya primera edición es del año 1848 y constó de 40 ediciones. Se ha analizado la decimoquinta edición publicada en 1865 en Madrid por la Imprenta de Antonio Peñuelas y Gabriel Pedraza.
- *Tratado de Geometría Elemental*, cuya primera edición es del año 1847 y constó de 37 ediciones. Se ha analizado la novena edición publicada en 1861 en Madrid por la Imprenta de D.F. Sánchez a cargo de D. Agustín Espinosa.
- *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y Topografía*, cuya primera edición es del año 1848 y constó de 24 ediciones. Se ha analizado la sexta edición publicada en 1859 en Madrid por la Imprenta de D.F. Sánchez a cargo de D. Agustín Espinosa.

Para su análisis seguimos el proceso llevado a cabo en otras investigaciones históricas sobre libros de texto de matemáticas siguiendo las recomendaciones de Maz (2009), para este tipo de estudios. Para ello recurrimos a la técnica del análisis de contenido. Se tomaron como unidades de análisis para cada libro:

- La introducción y el prólogo, en los que el autor señala a quienes estaban dirigidas y el propósito de las obras y la secuenciación y justificación de contenidos originales propuestos con respecto a obras contemporáneas.
- Las definiciones, los ejercicios, los ejemplos, los problemas y las actividades propuestas en cada obra. Así mismo, el propio planteamiento de cada obra.
- Las notas incluidas tras cada uno de los bloques de contenido, que incluyen sugerencias y propuestas metodológicas, así como materiales manipulativos recomendados, para que el alumno optimice su trabajo y alcance los conocimientos requeridos en el correspondiente nivel educativo.
- Los anexos, en los que se incluyen láminas con representaciones gráficas, que sirven de apoyo a las explicaciones y demostraciones de resultados y teoremas principales.

4. Resultados y discusión

Los matemáticos españoles de esta época conocían los hallazgos matemáticos alcanzados en la época, sin embargo, su dedicación se centró en la enseñanza, aplicación y difusión de éstos y no, en la creación de nuevos conocimientos. Gracias a sus estudios en Francia, Cortázar estaba en disposición de incorporar los conocimientos adquiridos sobre los nuevos métodos franceses a sus obras llenas de consideraciones y estrategias didácticas (León-Mantero y Maz-Machado, 2015).

Las obras fueron elegidas para que formaran parte del listado oficial de libros de texto en Universidades, Institutos y Escuelas Profesionales en 1848 (Gaceta de Madrid de 15 de septiembre de 1848). Por tanto, estaban dirigidas y servían de apoyo a los miembros de la comunidad académica en el desarrollo del curso escolar, tanto a profesores y alumnos de la enseñanza secundaria, universitaria y escuelas técnicas. Por otro lado, se trata, de obras versátiles que abrazan diferentes etapas educativas, gracias a que los párrafos o apartados que los profesores de filosofía o escuelas profesionales debían omitir en sus clases, venían señalados con un asterisco.

Además, se establecieron como obras de referencias entre los académicos de la época quienes hacían referencias a ella dentro de sus obras para indicar que podrían encontrar en ellas más información (Giol y Soldevilla y Goyanes y Soldevilla, 1864).

Su lenguaje es formal y metódico, estrictamente matemático, cuyo contenido se encuentra organizado en definiciones, resultados, proposiciones y teoremas con sus respectivas demostraciones, corolarios, notas, diferentes tipos de ejemplos, problemas variados con solución y, aunque escasos, ejercicios y problemas propuestos.

4.1. Tratado de Aritmética

Este tratado está dividido en dos partes: la primera se compone de cinco libros y está dedicada al cálculo de los números, en particular de los números naturales, enteros, quebrados, raíces cuadradas y cúbicas y proporciones. La segunda parte se compone de dos libros que tratan de operaciones y problemas de aplicación de la aritmética, en la que encontramos ejercicios y problemas, tanto teóricos como de aplicación a la vida diaria, resueltos de manera detallada, en numerosas situaciones económicas y de medida. Además, se incluye una lámina al final de la obra, que sirve de apoyo a las explicaciones.

Al contrario que otros autores de la época, Cortázar recomienda a los lectores del tratado que representen las cantidades sobre las que giran los razonamientos, mediante signos, ya sean guarismos (cifras) o letras. De otro modo, “no se fijan las ideas, los razonamientos son vagos, y por lo mismo difíciles de ser comprendidos” (Cortázar, 1866, p. V). También opina que no es conveniente el uso de las letras en las primeras proposiciones y, éstas se pueden demostrar usando guarismos siempre que “los guarismos elegidos sean independientes de sus valores particulares” (Cortázar, 1866, p. V). Sin embargo, en las cantidades que entran en un teorema en el que “deben satisfacer á condiciones que no llenan números tomados á arbitrio” (Cortázar, 1866, p. VI), es conveniente el uso de letras.

La exposición del sistema métrico se realiza en pocas páginas, sin embargo Cortázar considera su planteamiento más completo que el de resto de autores:

[...]partiendo de las equivalencias dadas por la Comisión de pesa y medidas, hemos hallado científicamente las equivalencias aproximadas entre las

medidas llamadas de Castilla y las métricas, y dado la regla para hallar equivalencias análogas entre las medidas de cualquier provincia y las métricas (Cortázar, 1866 p. IV).

Podemos encontrar a lo largo de toda la obra, estrategias que facilitan a los alumnos el estudio de la aritmética. Por ejemplo, a la hora de llevar a la práctica una multiplicación, propone “para mayor brevedad, tomar por multiplicador el factor que tiene menor número de cifras significativas: el producto será siempre el mismo, cualquiera que sea el factor que se tome por multiplicador” (Cortázar, 1866, p. 14).

4.2. Tratado de Álgebra Elemental

Sus seis libros están dedicados al cálculo algébrico, las ecuaciones de primer grado, los problemas determinados de primer grado, las potencias y raíces de las cantidades algébricas, las ecuaciones de segundo grado y los logaritmos y progresiones.

En general se utiliza metodología deductiva para demostrar resultados y teoremas, pero, en las ocasiones en las que lo considera necesario, enumera diferentes ejemplos y ejercicios, que recorren los posibles casos con los que el alumno puede llegar a encontrarse, para después deducir un resultado general.

Vea (1995) resalta capítulos de especial originalidad como la indeterminación cero entre cero, el tratamiento meticuloso de la radicación de monomios y polinomios, sobre todo en el caso de las raíces imaginarias o los conceptos de máximo y mínimo, así como el tratamiento dado a las progresiones y los logaritmos, que coincide con el que se le da en la actualidad y, es que Cortázar considera que los logaritmos deben ser incluidos dentro del álgebra y no dentro de la aritmética como lo hacen Bourdon o Fernández Vallín.

En el caso de la resolución de ecuaciones, una vez que se han planteado los métodos de resolución, se presentan diversos tipos de ejemplos particulares, mostrando después la resolución general de dichos problemas. Gracias a ello, recomienda a los lectores que intenten resolver los problemas por diferentes métodos usando una incógnita, usando dos o usando datos generales, en vez de particulares.

Cortázar establece a lo largo de toda la obra, algunas sugerencias para concienciar a los alumnos de los aspectos que poseen mayores dificultades. Por ejemplo, resalta la conveniencia de considerar la incógnita de una ecuación como representante tanto de un número positivo como de uno negativo, para así poder generalizar las soluciones de una ecuación en ambos sentidos. También, destaca la importancia de saber distinguir entre identidad y ecuación:

NOTA. Obsérvese con cuidado, pues es de gran importancia, la diferencia que hay entre identidad y ecuación: la primera se verifica por cualesquiera valores de sus letras, mientras que la segunda solo se verifica por ciertos valores de la incógnita ó incógnitas que contenga (Cortázar, 1865, p. 4).

Igualmente, Cortázar conecta nuevos conocimientos con ideas previas o adquiridas para facilitar el proceso de aprendizaje:

Ya hemos visto (Aritm. núm. 31) que para indicar el producto de varias cantidades literales, no hay mas que juntarlas sin interposición de ningun signo. [...]

Para indicar el producto de una cantidad literal por una numérica ó literal, se escribe el multiplicador, que en el Álgebra se llama coeficiente, y á continuación el multiplicando. (Cortázar, 1865, p. 3).

4.3. Tratado de Geometría Elemental

El *Tratado de Geometría Elemental* está dividido en capítulos, la mitad de ellos dedicados a geometría plana y los restantes a geometría del espacio. Como anexo, encontramos también un capítulo dedicado al estudio de las curvas elipse, parábola y hélice, que, aunque no está incluido en el programa del Gobierno español, Cortázar vio conveniente añadir por ser las curvas más usadas en la práctica después del círculo.

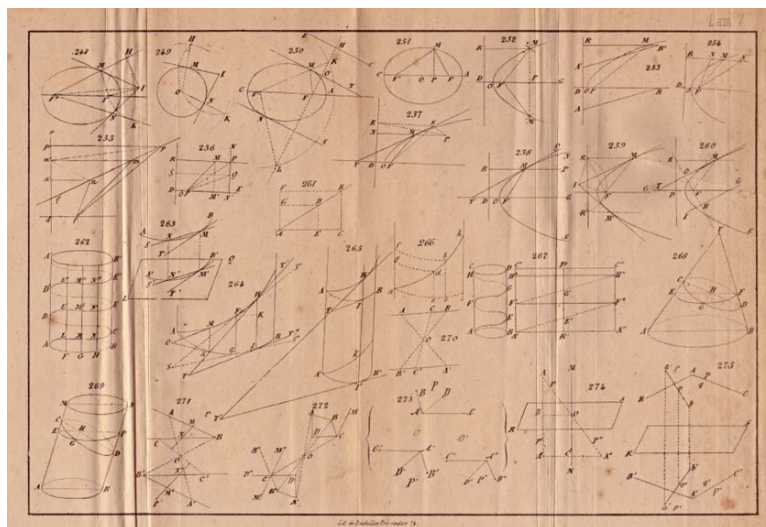


Figura 1. Lámina 7.

Fuente: *Tratado de Geometría Elemental* de Juan Cortázar (1861).

En la introducción del tratado, Cortázar destaca la utilidad de sus conceptos básicos y axiomas como herramientas para el posterior planteamiento de las bases de la geometría elemental. Se definen los conceptos de línea, punto, plano o los elementos y definición de circunferencia. Destaca, además, la tabla de la figura 2 donde presenta y organiza los dominios de las divisiones de estudio de la Geometría, es decir la plana y la del espacio.

DIVISION DE LA GEOMETRÍA.

GEOMETRÍA PLANA.	GEOMETRÍA DEL ESPACIO.
LIBRO I.	LIBRO I.
<i>Línea recta y ángulos.</i>	<i>Planos, ángulos diedros y ángulos poliedros.</i>
LIBRO II.	LIBRO II.
<i>Polígonos.</i>	<i>Poliedros.</i>
LIBRO III.	LIBRO III.
<i>Círculo.</i>	<i>Los tres cuerpos redondos.</i>
LIBRO IV.	LIBRO IV.
<i>Polígonos semejantes.</i>	<i>Poliedros semejantes.</i>
LIBRO V.	LIBRO V.
<i>Áreas de los polígonos y del círculo.</i>	<i>Áreas y volúmenes de los poliedros y cuerpos redondos.</i>

Figura 2. Tabla de la división de la Geometría.

Fuente: *Tratado de Geometría Elemental de Juan Cortázar (1861).*

La nota I, sobre la resolución de los problemas geométricos, que se incluye al finalizar el tratado, expone una clasificación de los diferentes tipos de problemas geométricos y diferentes estrategias de resolución, así como el método más adecuado a cada caso. Así,

- Para resolver los problemas gráficos y generales numéricos puede seguirse:
 - El método analítico, que “consiste en suponer que el problema está resuelto, haciendo un croquis de la construcción que se pide, y en llegar por medio de este croquis á la construcción desconocida” (Cortázar, 1861, p. 185).
 - El método sintético, que “consiste en ejecutar desde luego la construcción, y en demostrar después que dicha construcción satisface el problema” (Cortázar, 1861, p. 185).
- Para resolver los problemas particulares numéricos, “se despeja la incógnita en la ecuación del problema general en que está comprendido el problema particular, y en seguida se ejecutan las operaciones numéricas indicadas por el valor de la incógnita” (Cortázar, 1861, p. 186).

Cortázar apuesta por el uso de materiales manipulativos como la regla, escuadra y transportador para “trazar líneas rectas en el papel” (Cortázar, 1861, p. 36), para “tirar perpendiculares y paralelas en el papel” (Cortázar, 1861, p. 36) o “para construir en el papel un ángulo de un cierto número de grados” (Cortázar, 1861, p. 37). Esto

unido a la incorporación, en la última parte del tratado, de láminas con figuras que representan las explicaciones y demostraciones de los teoremas, así como la resolución de los ejemplos y problemas resueltos, muestra el interés de Cortázar por el apoyo visual como estrategia didáctica en el estudio de la Geometría.

4.4. Tratado de Trigonometría y Topografía

Al igual que el *Tratado de Geometría Elemental*, el *Tratado de Trigonometría y Topografía* incluye láminas con representaciones al final de la obra. Sus capítulos están estructurados en los dedicados a la trigonometría rectilínea, los dedicados a la trigonometría esférica, los dedicados a la topografía y el resto de capítulos para complementos. El propio autor señala en una advertencia al inicio de la obra que el *Tratado de Trigonometría* podía omitirse si lo que se buscaba era un tratado de Agrimensura complementario al *Tratado de Geometría Elemental*.

Cortázar fue fiel defensor de la simplificación de las teorías y métodos de resolución siempre que en la teoría o en la práctica fuera raro tener necesidad de ellos, para así evitar a los alumnos la dificultad de retener teoremas o resultados superfluos y poder facilitar el estudio de la asignatura. Es el caso, por ejemplo del estudio de las secantes y cosecantes, que pueden reducirse al estudio del seno o el coseno.

Al igual que el resto de tratados, establece algunas estrategias que ayudan a los alumnos en aspectos que puedan ayudar a simplificar cálculos y razonamientos:

NOTA. Obsérvese que el mayor valor absoluto del seno ó coseno es el radio, y el menor es cero; y que, dada una cantidad positiva menor que el radio, existe en el primer cuadrante un arco que tiene por seno á dicha cantidad, y otro que tiene por coseno á la misma: que el mayor valor absoluto de la tangente ó cotangente es ∞ , y el menor es cero; y que, dada una cantidad positiva ó negativa cualquiera, existe en el primero ó segundo cuadrante un arco que tiene por tangente á dicha cantidad, y otro que tiene por cotangente á la misma (Cortázar, 1859, p. 9).

El uso de métodos de resolución que se apoyan en materiales manipulativos, es constante en la segunda parte del tratado que trata sobre Topografía. Se usan cadenillas, escuadra y cartabón, cuerdas, grafómetros, brújulas o planchetas como herramientas que ayudan a resolver un mismo problema de varias formas diferentes.

La Tabla 1 resume los aspectos didácticos presentados en los cuatro tratados previamente analizados.

	Incluye representaciones gráficas	Incluye estrategias y sugerencias	Contenidos y secuenciación originales	Uso de materiales manipulativos	Incluye aplicaciones
Aritmética	X	X	X		Matemáticas y de la vida cotidiana

Álgebra Elemental	X	X	X		Matemáticas y de la vida cotidiana
Geometría Elemental	X	X	X	X	Matemáticas
Trigonometría y Topografía	X	X	X	X	Matemáticas y de la vida cotidiana

Tabla 1. Indicadores de actividad didáctica en las obras de Juan Cortázar

5. Conclusiones

La intención didáctica de Cortázar se manifiesta en todas las obras, las cuales poseen a cada paso, numerosas notas del autor sobre diferentes propuestas y sugerencias que el alumno podía seguir para facilitar el estudio de la materia. Además, la adición de láminas con las representaciones gráficas de los resultados de los teoremas o los problemas, constituyen un valor añadido a las explicaciones verbales ofrecidas por el autor. Entre las páginas de los *Tratados de Aritmética y Álgebra Elemental* se evidencian los esfuerzos del autor por trasladar a los alumnos de forma sencilla los contenidos de ambas materias.

Ya en el siglo XIX, Cortázar apostaba por el uso de materiales manipulativos, como la escuadra, el cartabón o el transportador de ángulos, que ayudaran al alumno a visualizar los resultados de los teoremas y demostraciones en el papel, favoreciendo que los procedimientos no se quedaran en el plano teórico. El *Tratado de Trigonometría y Topografía*, era de gran utilidad a los profesionales de la agrimensura ya que, mostraba la polivalencia de los numerosos materiales de medida, a través de los cuales pueden resolverse problemas usuales de su ámbito de trabajo.

De entre todas las obras analizadas, el *Tratado de Geometría Elemental* es, la obra más técnica; todas las aplicaciones incluidas son de tipo teórico y no se hace referencia a problemas asociados a la vida cotidiana. No obstante, por sus características, es el tratado que más se apoya en las representaciones gráficas a la hora de demostrar proposiciones y teoremas y de resolver problemas.

El interés didáctico que suscita este estudio se manifiesta en la importancia de conocer las estrategias didácticas que se planteaban en el pasado para la transmisión y enseñanza de los conocimientos matemáticos en los libros publicados por un autor de reconocido éxito en el panorama educativo español del siglo XIX. En la actualidad todos los implicados en el proceso de enseñanza de las matemáticas se preocupan por usar diversas estrategias docentes para beneficio de los alumnos. Conocer los recursos del pasado permite al profesor reconocer si los libros de texto actuales realmente innovan o simplemente reproducen las estrategias didácticas ya utilizadas en el pasado.

En resumen, este trabajo evidencia el interés de uno de los autores de mayor influencia en la formación de escolares del siglo XIX, por establecer estrategias

didácticas a favor de una enseñanza de calidad, a través del uso de materiales manipulativos, aplicaciones prácticas a la vida cotidiana, sugerencias de resolución, el uso de representaciones y una secuenciación de los contenidos sencilla y clara, sin perder la formalidad del lenguaje matemático.

Bibliografía

- Beyer, W. O. (2006). Algunos libros de Aritmética usados en Venezuela en el período 1826-1912. *Revista de Pedagogía*, XXVII(78), 71-110.
- Caramalho, J. (2008). *Lacroix and the calculus*. London: Springer Science & Business Media.
- Cortázar, J. (1859). *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y Topografía*. Sexta edición. Madrid: Imprenta de D.F. Sánchez a cargo de D. Agustín Espinosa.
- Cortázar, J. (1861). *Tratado de Geometría Elemental*. Novena edición. Madrid: Imprenta de D.F. Sánchez a cargo de D. Agustín Espinosa.
- Cortázar, J. (1865). *Tratado de Álgebra Elemental*. Decimoquinta edición. Madrid: Imprenta de Antonio Peñuelas y Gabriel Pedraza.
- Cortázar, J. (1866). *Tratado de Aritmética*. Decimonovena edición. Madrid: Imprenta de D. Antonio Peñuelas.
- Freijd, P. (2013). Old algebra textbooks: a resource for modern teaching. *BSHM Bulletin*, 28, 25-36.
- Giol y Soldevilla, I., y Goyanes y Soldevilla, J. (1864). *Tratado de topografía*. Madrid: M. Minuesa.
- Gómez, B., Sanz, M. T. y Huerta, I. (2016). Problemas descriptivos de fracciones. *Bolema*, 30(55), 586-604.
- León-Mantero, C. y Maz-Machado, A. (2015). Juan Cortázar y sus aportaciones a la Educación Matemática española del siglo XIX. *ENSAYOS, Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, 30(1), 55-62.
- Madrid, M. J., Maz-Machado, A. y León-Mantero, C. (2015). Representations in the Sixteenth-Century arithmetics books. *Universal Journal of Education Research*, 3(6), 396-401.
- Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En Gonzalez, M., González, M. y Murillo, J. (Eds.), *Investigación en Educación matemática XIII* (pp. 5-20). Santander: SEIEM.
- Maz, A. y Rico, L. (2007). Situaciones asociadas a los números negativos en textos de matemáticas españoles de los siglos XVIII y XIX. *PNA*, 1(3), 113-123.
- Maz, A. y Rico, L. (2009a). Negative numbers in the 18th and 19th centuries: phenomenology and representations. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology* 17(1), 537-554.
- Maz, A. y Rico, L. (2009b). Las Liciones de Thomas Cerda: doscientos cincuenta años (1758-2008). *Suma* (60), 35-41.
- Maz-Machado, A., y Rico, L. (2013). El Tratado elemental de matemáticas de José Mariano Vallejo en el bicentenario de su publicación. *Suma*(74), 55-63.
- Maz-Machado, A., y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *RELIME, Revista latinoamericana de Investigación Educativa* 18 (1), 49-76.

- Meavilla, V. y Oller, A. (2015). Problemas de relojes. Ejemplos históricos y consideraciones. *Bolema*, 29(51), 110-112.
- Peset, J. L., Garma, S., & Pérez-Garzón, J. S. (1978). *Ciencias y enseñanza en la revolución burguesa*. Madrid: Siglo veintiuno.
- Rico, L., y Maz, A. (2005). Matemáticas, libros y matemáticos: un recorrido por su historia y su relación con las enseñanzas en España. En *El libro español de Matemáticas* (pp. 11-35). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.
- Sierra, M., González, M. T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (COU): 1940-19951. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), 463-476.
- Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook authors. *For the learning of mathematics*, 7(3), 41-51.
- Schubring, G. (1988). Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur représentation dans les manuels allemands et français de mathématique entre 1795 et 1845. *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* (pp. 137-145). Editions La Pensée Sauvage.
- Vea, F. (1986). *Las matemáticas en los planes de estudios de enseñanza secundaria en España en el siglo XIX*. Zaragoza: Universidad de Zaragoza.
- Vea, F. (1995). *Las matemáticas en la enseñanza secundaria en España (s. XIX)*. Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

Autores:

León-Mantero, Carmen María: **Doctora por la Universidad de Córdoba (UCO) en el programa de Ciencias Sociales y Jurídicas. Máster en Investigación en la Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias Matemáticas por la Universidad de Huelva (UHU). Profesora de Didáctica de la Matemática. Departamento de Matemáticas. Universidad de Córdoba (UCO), Córdoba, España. E-mail: cmleon@uco.es. Tfno.: 957212543**

Maz-Machado, Alexander: **Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada (UGR). Profesor de Didáctica de la Matemática. Departamento de Matemáticas. Universidad de Córdoba (UCO), Córdoba, España. E-mail: ma1mamaa@uco.es. Tfno.: 957212543**

Madrid, María José: **Doctora en Matemáticas por la Universidad de Salamanca (USAL). Profesora de Didáctica de la Matemática. Departamento de Matemáticas. Universidad de Córdoba (UCO), Córdoba, España. E-mail: mmadrid@uco.es. Tfno.: 957212543**

Jiménez-Fanjul, Noelia: **Doctora por la Universidad de Córdoba (UCO) en el programa de Ciencias Sociales y Jurídicas. Profesora de Didáctica de la Matemática. Departamento de Matemáticas. Universidad de Córdoba (UCO), Córdoba, España. E-mail: noelia.jimenez@uco.es. Tfno.: 957218942**