

www.fisem.org/web/union
<http://www.revistaunion.org>

Determinación de procedimientos de transferencia entre representaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica

Ortelio Nilo Quero Méndez, Aldo Medardo Ruiz Pérez

Fecha de recepción: 26/03/2017
 Fecha de aceptación: 26/01/2018

Resumen	<p>En el presente artículo se expone un procedimiento didáctico para la determinación de procedimientos de transferencia entre representaciones de elementos de conjuntos bases de estructuras geométricas, el cual se ejemplifica con las rectas del plano. Este procedimiento es una componente del análisis didáctico del contenido en la planificación del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica para la carrera de Licenciatura en Educación, especialidad Matemática y Física de Cuba. En el artículo se expone, además, una síntesis de los fundamentos teóricos del procedimiento didáctico que constituye una sistematización novedosa de los conceptos de representación, sistema de representación y transferencia entre representaciones en el contexto de la Geometría Analítica.</p> <p>Palabras clave: transferencia entre representaciones, sistema de representación, geometría analítica y procedimiento didáctico.</p>
Abstract	<p>This article presents a didactic procedure for the determination of procedures for transfer between representations of elements of sets-base on geometric structures. This procedure is a component of the didactic analysis of the content in the planning of the teaching-learning process of Analytical Geometry for degree in education, specialty math and physics of Cuba. Article presents, in addition, a synthesis of the theoretical foundations of teaching procedure which constitutes a new systematization of the concepts of representation, representation and transfer system between representations in the context of analytic geometry.</p> <p>Keywords: transfer between representations, system of representation, analytic geometry and didactic procedure.</p>
Resumo	<p>Este artigo apresenta um procedimento didático para a determinação dos processos de transferência entre representações de elementos de conjuntos-bases de estruturas geométricas, que é exemplificado com as linhas retas do plano. Este procedimento é um componente da análise do conteúdo do treinamento no planejamento do processo ensino-aprendizagem de Geometria Analítica para licenciatura em educação, especialidade matemática e física de Cuba. Artigo apresenta, além disso, uma síntese dos fundamentos teóricos de procedimento didático que constitui uma nova sistematização dos conceitos de representação,</p>

	sistema de representação e transferência entre representações no contexto da geometria analítica. Palavras-chave: transferência entre representações, sistema de representação, geometria analítica e procedimento de ensino.
--	---

1. Introducción

En Cuba, se ha modificado el sistema de líneas directrices para la enseñanza de la Matemática en la Educación General (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014), incluyéndose procesos que no se habían tenido en cuenta explícitamente en etapas anteriores, como es el caso de la inserción del trabajo con representaciones en la directriz “adiestramiento lógico-lingüístico”.

Según esta directriz los estudiantes de la Enseñanza Media Básica (12-14 años) y de la Enseñanza Media Superior (14-18 años) deben ser capaces de: identificar las distintas formas de representar los objetos y las situaciones matemáticas y establecer relaciones entre ellas, seleccionar y aplicar la forma más conveniente de representación de acuerdo con la situación planteada y transferir de una representación a otra.

Estas transformaciones deben conducir a modificaciones en la formación de profesores de Matemática para lograr que los graduados puedan dirigir el proceso de enseñanza y aprendizaje (PEA) de esta disciplina según las exigencias establecidas en el sistema de líneas directrices para la enseñanza de la Matemática.

Tales modificaciones en la formación de profesores han de implementarse tanto en la disciplina Didáctica de la Matemática como en el resto de las disciplinas y especialmente en aquellas cuyo contenido tiene relación directa con los contenidos escolares como es el caso de la Geometría Analítica que se estudia en el tercer año de la carrera Matemática y Física.

Actualmente el trabajo con representaciones en el PEA de la Geometría Analítica para la formación de profesores de Matemática y Física transcurre espontáneamente, según la lógica de la exposición del contenido matemático tal cual aparece en los libros, sin prestar mucha atención al papel de la asignatura en la formación didáctica de los estudiantes.

Respecto a la transferencia entre representaciones de la recta en el plano se presta poca atención al tratamiento de todos los casos que se pueden presentar, quedando varios de ellos sin incluir en el contenido de la asignatura: no se analizan en clase, no se proponen tareas que los incluyan y no se orienta su estudio.

La causa fundamental de esta situación problemática tiene sus orígenes en la planificación de la enseñanza, entendida como “la determinación y elaboración de los programas de influencias sobre los alumnos por parte del docente para que se produzca el aprendizaje” (Ruiz, 2007, p.37).

Los métodos y procedimientos para la planificación de la enseñanza de la Matemática han sido muy tratados por autores de obras sobre metodología de la enseñanza de la matemática que se utilizan en Cuba (Jungk, 1978; Ballester y otros, 2000), pero estos autores no tratan explícitamente la planificación del trabajo con representaciones.

En el extranjero es muy interesante el procedimiento, para la planificación a corto plazo, desarrollado por Gómez y Rico (2002) con el nombre de análisis didáctico que incluye el análisis del contenido abarcando varios elementos no considerados explícitamente por Jungk, 1978; Ballester y otros, 2000, entre ellos, el análisis de las representaciones.

Aunque en el procedimiento propuesto por Gómez y Rico (2002) se presta atención al examen de las representaciones, en lo que se refiere a las operaciones y las relaciones entre representaciones, en el análisis del contenido concebido por estos autores no es objeto de atención la transferencia entre representaciones en lo que respecta a la determinación de cuántos y cuáles son los casos posibles y qué procedimiento de transferencia utilizar en cada caso.

En el presente artículo se expone un procedimiento didáctico para resolver esta situación problemática del análisis del contenido y se ejemplifica con la transferencia entre representaciones de la recta en el plano en el contexto del PEA de la Geometría Analítica en la carrera de Licenciatura en Educación, especialidad Matemática y Física de las universidades cubanas.

El desarrollo de este artículo está dividido en dos partes. En la primera se exponen fundamentos teóricos de la teoría de las representaciones contextualizadas en la geometría analítica en torno a los conceptos de representación, sistema de representación y transferencia entre representaciones. En la segunda parte se presenta un procedimiento didáctico para la determinación de procedimientos de transferencia entre representaciones de elementos de conjuntos bases de una estructura geométrica y se ejemplifica en el caso de la recta en el plano.

2. Fundamentos teóricos de la determinación de procedimientos de transferencia entre representaciones

Los tres conceptos centrales de la teoría de las representaciones de los objetos matemáticos son los conceptos de **representación**, **sistema de representación** y **transferencia entre representaciones**, los cuales están muy relacionados entre sí y con el concepto de estructura.

El contenido de esta sección se ha organizado según la siguiente idea de Kaput:

Cualquier especificación particular de la noción de representación debiera describir, al menos, cinco entidades: los objetos representados, los objetos representantes, qué aspectos del mundo representado se representan, qué aspectos del mundo representante realizan la representación y la correspondencia entre ambos mundos o conjuntos (Kaput, 1987, p. 23).

2.1. Los objetos representados. Su relación con el concepto de estructura

Considerando la idea de Kaput es necesario partir del concepto de estructura, para precisar los objetos representados:

Una estructura es un n -uplo ordenado $(C_1, C_2, \dots, C_m, R_1, R_2, \dots, R_{n-m})$ cuyos primeros m elementos ($m < n$), son conjuntos no vacíos, llamados conjuntos bases de la estructura y los restantes $n-m$ elementos son relaciones o conjuntos de relaciones entre los conjuntos bases de la estructura (Castro, Díaz, Martínez, López, Bermúdez y González, 1992, p.3).

De esta definición se infiere que cada conjunto base interviene en por lo menos una de las relaciones de la estructura. También se aprecia que la esencia de una estructura es la existencia de, al menos, una relación entre sus conjuntos bases: si no hay relación, no existe estructura.

Cuando en una estructura los conjuntos bases están formados por objetos de la geometría, decimos que la estructura es geométrica.

La pregunta referida a ¿qué objetos de una estructura se representan en el PEA de la Geometría?, tiene varias posibles respuestas en dependencia del nivel educativo en el cual se produce este proceso. En general se representan: los conjuntos bases de la estructura y sus elementos, las relaciones de la estructura y sus elementos y la propia estructura.

2.2. Los objetos representantes, sus tipos y formas

Por **representación** de un objeto geométrico (objeto representado) se entiende el objeto material o mental (objeto representante) que lo sustituye y lo determina unívocamente en el pensamiento, el lenguaje y la comunicación.

En este contexto la palabra **representar** designa el proceso dirigido a obtener una representación de un objeto, ya sea, la primera de sus representaciones o una representación a partir de otra existente.

En las representaciones de los objetos matemáticos se suelen utilizar nombres comunes para estos que no los determinan unívocamente y que a diferencia del lenguaje común pueden ser letras o signos especiales. El uso de estos nombres está sujeto a reglas. Por ejemplo, en general para los puntos se utilizan letras latinas mayúsculas; para las rectas, letras latinas minúsculas y para los planos letras griegas minúsculas. Como estas letras por sí solas no tienen significado matemático, deben escribirse anteceditas de palabras al estilo de: “el punto P”, “la recta a” o “el plano β ”, a menos que en el contexto esté entendido su referente.

Frases tales como: “la recta a” no determina unívocamente ninguna recta y por tanto no es una representación de una recta, pero si se escribe: “la recta a que pasa por los puntos A(2,3) y B(5,6)”, esta frase sí determina de forma única una recta para un sistema de coordenadas, es decir, es su representación. De igual manera la frase: “el punto B”, no es una representación de ningún punto porque no lo determina unívocamente, en cambio la frase: “el punto B(5,6)”, representa el punto B porque lo determina unívocamente en un sistema de coordenadas. En estos ejemplos se observa como los nombres comunes de los objetos matemáticos están presentes en representaciones de estos objetos.

Para agrupar las representaciones de los objetos de la geometría analítica en tipos¹, se utiliza como criterio “la naturaleza de las componentes predominantes en el objeto representante”. Es así, por ejemplo, que si en el objeto representante predominan las palabras, las representaciones que tienen esta característica se agrupan en el tipo verbal y cada una de ellas pertenece a este tipo.

El concepto de tipo de representación permite concretar las exigencias de Kaput referidas a qué aspectos del mundo representado se representan, qué aspectos del mundo representante realizan la representación y la correspondencia entre ambos mundos o conjuntos.

Los autores de este artículo consideran que los **tipos** fundamentales de representaciones de los objetos de la geometría analítica son: verbal, gráfico y analítico. Las representaciones tabulares en la mayoría de los casos no se utilizan como un fin, sino como auxiliares en el proceso de transferencia.

Representación verbal de un objeto de la geometría analítica: es una representación del objeto mediante una frase o proposición que lo determina unívocamente y que está compuesta por palabras del lenguaje común, palabras de la terminología matemática y eventualmente por signos matemáticos. Las representaciones verbales de los elementos de los conjuntos bases de una estructura geométrica son frases y las de los elementos de las relaciones son proposiciones verdaderas. Por ejemplo:

La frase “La recta que pasa por los puntos $A(2,3)$ y $B(5,6)$ ” es una representación verbal de una recta, es decir, de un elemento de un conjunto base, y la proposición “La recta que pasa por los puntos $A(2,3)$ y $B(5,6)$ es paralela a la recta que pasa por los puntos $C(4,6)$ y $D(10,12)$ ” es una representación verbal del paralelismo de dos rectas, es decir, de un elemento de una relación.

Representación gráfica de un objeto de la geometría analítica: es una representación en la cual predomina una figura geométrica, es decir, es una representación que siempre contiene una figura geométrica y eventualmente frases, proposiciones o signos matemáticos.

Representación analítica de un objeto de la geometría analítica: es una representación en la que predomina una ecuación, inecuación, sistema de ecuaciones o sistema de inecuaciones, es decir, es una representación que siempre contiene uno o varios de estos objetos y eventualmente frases, proposiciones o signos matemáticos.

¹ Los tipos se diferencian de las clases en que estos pueden no agotar toda la extensión del concepto a partir del cual se generan y las clases sí. Ambos tienen en común: 1) son conjuntos que se generan a partir de la extensión de un concepto según un criterio, 2) cada tipo o clase generado por un criterio a partir de un concepto es un subconjunto propio de la extensión de ese concepto, 3) los tipos y las clases son no vacíos y 4) la intersección de dos tipos generados por el mismo criterio o de dos clases generadas por el mismo criterio, es vacía.

Además del concepto de tipo de representación, en este trabajo se utiliza como herramienta teórica el concepto de **forma de representación**², entendida como la configuración general del objeto representante, de modo que dos representaciones de diferentes tipos tienen distintas formas, mientras que dos representaciones del mismo tipo pueden tener la misma forma o formas distintas. Por ejemplo, en las siguientes representaciones de tres rectas, los objetos representantes son frases. Las dos primeras se diferencian esencialmente de la tercera en que en estas se utilizan dos puntos por donde pasa la recta representada y en la tercera, se emplea un punto por donde pasa la recta representada y dos puntos por donde pasa una recta paralela a ésta.

1) Recta que pasa por los puntos $A(1, 4)$ y $B(5, 8)$.

2) Recta que pasa por los puntos $C(4, 1)$ y $D(8, 6)$.

3) Recta que pasa por el punto $P(5, 9)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $Q(6, 9)$ y $R(3, 1)$.

En las tres representaciones predominan las palabras y no los signos matemáticos que sirven de complemento. Es por eso que se trata de representaciones verbales, aunque contienen signos matemáticos. Estas representaciones tienen como característica esencial común el predominio de palabras y las dos primeras se diferencian de la tercera en la forma. Es decir, las tres son representaciones del tipo verbal y las dos primeras tienen igual forma, que se diferencia de la forma de la tercera.

El conocimiento matemático tiene un carácter institucional porque se construye en el marco de una comunidad científica y como cualquier otro conocimiento es un producto histórico-cultural. Una de las implicaciones de este carácter institucional en la teoría de las representaciones de los objetos matemáticos es que los elementos de los conjuntos bases de las estructuras tienen formas de representación establecidas por la institución matemática, a las cuales llamamos **formas de representación reconocidas**.

2.3. Sistemas de representación y transferencia entre representaciones

En este trabajo el concepto de sistema de representación que se asume se restringe a objetos de estructuras geométricas y es el resultado de un análisis conceptual realizado por los autores a partir del estudio de publicaciones sobre el tema y de la generalización de los sistemas singulares de representación de objetos de estructuras geométricas.

² En la bibliografía que trata la teoría de las representaciones de los objetos matemáticos se suelen utilizar indistintamente los conceptos de forma de representación y tipo de representación y en algunas fuentes se utilizan indistintamente los conceptos de forma de representación y sistema de representación. En este trabajo se asume que estos tres conceptos no son idénticos y cada uno tiene una función diferente en la teoría de las representaciones.

Un **sistema de representación** de elementos de un conjunto base C de una estructura geométrica E , es un subsistema del sistema de conocimientos relativos a E (conceptos, proposiciones, razonamientos, reglas y procedimientos) con las características siguientes: 1) establece y fundamenta la existencia y eventualmente la unicidad de una forma de representación para cada uno de los elementos de C o de una parte de C , 2) contiene los procedimientos o reglas para representar los elementos de C en la forma establecida, 3) Incluye definiciones, proposiciones o reglas que caracterizan las relaciones de E en las que los elementos de C intervienen representados en la forma establecida.

Si, por ejemplo, denotamos por P y R , respectivamente, el conjunto de los puntos y de las rectas del plano y por I la relación de incidencia entre puntos y rectas, se tiene la estructura (P, R, I) . El sistema de representación de las rectas del plano de esta estructura en la forma general es el subsistema de conocimientos relativos a la estructura (P, R, I) que tiene las características siguientes:

1) Establece y fundamenta que toda recta del plano se puede representar en la forma $Ax + By + C = 0$, donde A , B y C son números reales tales que $|A| + |B| \neq 0$ y las variables x y y representan, respectivamente, la abscisa y ordenada de un punto cualquiera.

2) Incluye los procedimientos para representar toda recta del plano en la forma $Ax + By + C = 0$.

3) Incluye la definición siguiente que caracteriza la relación de incidencia entre puntos representados por pares ordenados $(x; y)$ de números reales y rectas representadas por una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$:

Decimos que un punto $P(x_1; y_1)$ pertenece a una recta r representada por la ecuación $Ax + By + C = 0$, si y sólo si, las coordenadas de P satisfacen esta ecuación, es decir, si se cumple $Ax_1 + By_1 + C = 0$. En este caso se escribe $P \in r$ y se dice que P pasa por r o que P incide con r .

Como se aprecia en la definición de sistema de representación, en este concepto juega un papel central la forma de los objetos representantes, de manera que cada forma determina un sistema de representación. Las formas de representación reconocidas por la comunidad matemática, determinan sistemas de representación reconocidos por esta comunidad.

Hay que diferenciar el primer sistema de representación que se construye para los elementos de un conjunto base de una estructura del resto de los sistemas de representación.

Cuando una estructura geométrica contiene varios conjuntos bases, las representaciones de los elementos de estos conjuntos deben estar coordinadas. Por ejemplo, si en la estructura (P, R, I) las rectas se representan por una ecuación, los puntos deben representarse mediante pares ordenados de números reales.

Para definir adecuadamente la transferencia entre representaciones se debe partir de un conjunto base de una estructura E para cuyos elementos se conocen por lo menos dos sistemas de representación S_1 y S_2 , lo cual significa que existen al menos dos formas de representación de estos objetos.

Si O es un elemento de un conjunto base de una estructura de la geometría analítica, determinado por su representación R_1 en la forma F_1 del tipo T_1 correspondiente al sistema de coordenadas C_1 y se desconoce su representación R_2 en la forma F_2 del tipo T_2 correspondiente al sistema de coordenadas C_2 , el proceso mediante el cual se obtiene R_2 a partir de R_1 se llama transferencia de R_1 a R_2 . Si inversamente se conociera R_2 y desconociera R_1 , el proceso que permite obtener R_1 a partir de R_2 se llama transferencia de R_2 a R_1 .

Cuando $C_1 = C_2$ la transferencia se llama transferencia intrasistema, si en cambio $C_1 \neq C_2$, ésta se denomina transferencia intersistemas.

Cuando $T_1 = T_2$ la transferencia se llama transferencia intratipo, si en cambio $T_1 \neq T_2$, ésta recibe el nombre de transferencia intertipos.

Si quien realiza la transferencia de R_1 a R_2 o de R_2 a R_1 no utiliza una tercera representación reconocida del objeto O como representación intermedia, la transferencia se llama directa. En otro caso la transferencia se llama compuesta.

Los conceptos de transferencia directa y de transferencia compuesta son relativos al procedimiento utilizado. Existen casos en que a partir de una representación dada se puede obtener la buscada por transferencia directa o transferencia compuesta. En otros casos sólo es posible obtener la representación buscada mediante transferencia compuesta.

Una transferencia entre representaciones de un objeto O será directa o compuesta en dependencia del desarrollo del sistema de representación y de la estrategia utilizada por el sujeto que la realiza. Por ejemplo, si se da la representación verbal de una recta determinada por dos puntos y se pide su ecuación general, la transferencia debe ser compuesta porque el sistema de representación relativo a la ecuación general no contiene ningún procedimiento para realizar esta transferencia de forma directa.

La transferencia entre dos representaciones de un objeto geométrico es un proceso que requiere de la aplicación de un procedimiento que garantice el tránsito por cada uno de sus estados. En lo adelante a la representación conocida se le llamará **representación dada** y a la desconocida, **representación buscada**.

Según la definición del concepto de transferencia entre representaciones, este proceso solo tiene sentido para aquellos objetos que tienen al menos dos sistemas de representación, es decir, objetos para los cuales existen dos formas distintas de representarlos. También la definición establece que dos formas de representación determinan dos transferencias diferentes en que una es la inversa de la otra.

De acuerdo con la definición de transferencia entre representaciones la palabra “representar”, en el contexto de la teoría de las representaciones de los objetos matemáticos se utiliza con dos acepciones. La primera se refiere a la creación de una representación, es decir, al establecimiento por primera vez de la forma del objeto representante para un objeto representado, lo cual se realiza en la propia conformación del sistema de representación. La segunda acepción se refiere a la transferencia entre representaciones.

Al confrontar las definiciones de sistema de representación y transferencia entre representaciones con el significado contextual de la palabra “representar”, se observa que según la segunda característica de los sistemas de representación, estos incluyen los procedimientos de transferencia entre representaciones de los elementos de los conjuntos bases de las estructuras geométricas.

La definición de transferencia entre representaciones se refiere a representaciones de los elementos de un conjunto base de una estructura (objetos geométricos), pero no incluye la transferencia entre relaciones donde estos elementos intervienen.

3. Determinación de procedimientos de transferencia

La determinación de procedimientos de transferencia entre representaciones de un elemento de un conjunto base de una estructura geométrica en el PEA no puede ser espontánea porque se corre el riesgo de no considerar algunos casos de transferencia. Para lograrlo se debe seguir el procedimiento didáctico siguiente:

- 1) Determinar los tipos de representación del objeto.
- 2) Determinar las formas de representación de cada tipo.
- 3) Determinar los casos de las transferencias intratipo e intertipos.
- 4) Identificar cuáles procedimientos se exponen en la bibliografía recomendada por el programa de la asignatura.
- 5) Elaborar procedimientos de las transferencias para las cuales en la bibliografía no se expone ningún procedimiento y analizar la existencia de procedimientos alternativos de los expuestos en la bibliografía.
- 6) Ordenar las transferencias para su uso en el PEA.

A continuación se explican cada una de las fases del procedimiento utilizando como objeto la recta en el plano.

- 1) Determinar los tipos de representación del objeto:

En el estudio analítico de las rectas en el plano que se realiza en la formación de profesores de Matemática y Física en Cuba, se identifican como tipos fundamentales de representación el verbal, el gráfico y el analítico.

2) Determinar las formas de representación de cada tipo:

Existen diferentes formas³ de representación analítica y de representación verbal para cada sistema de coordenadas; el tipo gráfico tiene una única forma para cada sistema de coordenadas (Tabla 1).

Tabla 1: tipos y formas de representación de la recta en el plano en la Geometría Analítica	
Tipo de representación	Forma de representación
Representación verbal	1) Frase con dos puntos de la recta, 2) frase con un punto de la recta y un vector de dirección, 3) frase con un punto de la recta y un vector normal y 4) frase con un punto de la recta y su pendiente.
Representación analítica	1) Representación paramétrica, 2) ecuación general y 3) ecuación con un punto y la pendiente.
Representación gráfica	Es única para cada sistema de coordenadas.

3) Determinar los casos de las transferencias intratipo e intertipos:

Para determinar los casos de las transferencias intratipo e intertipos se determinará primero su número y después cuáles son. Para ello se utiliza la regla del producto de la combinatoria teniendo en cuenta sólo la representación dada y la buscada.

3.1) Casos de transferencias entre representaciones verbales de una recta en el plano.

Para la representación de la recta en el plano se han considerado cuatro formas. Cada transferencia entre representaciones con alguna de estas formas se puede modelar con el concepto de par ordenado sin componentes repetidas. Para la representación dada (RD) son posibles cuatro opciones, después de elegida cada una de estas opciones, para la representación buscada (RB) son posibles tres opciones. Al multiplicar cuatro por tres se obtienen 12 casos posibles.

Si etiquetamos las formas de representación con siglas y utilizamos una flecha como símbolo de la transferencia, se pueden determinar los 12 casos de transferencias entre representaciones verbales (Tabla 2).

Tabla 2: casos posibles de transferencia entre representaciones verbales			
Rep. dada: DP	Rep. dada: PVD	Rep. dada: PVN	Rep. dada: PP

³ Se hace referencia solo a las formas de representación analítica estudiadas en el curso y a las más conocidas de las representaciones verbales.

1) DP→PVD	4) PVD→DP	7) PVN→DP	10) PP→DP
2) DP→PVN	5) PVD→PVN	8) PVN→PVD	11) PP→PVD
3) DP→PP	6) PVD→PP	9) PVN→PP	12) PP→PVN

Etiquetas:
 DP: recta representada verbalmente utilizando dos puntos.
 PVD: recta representada verbalmente por un punto y un vector de dirección.
 PVN: recta representada verbalmente por un punto y un vector perpendicular.
 PP: recta representada verbalmente por un punto y su pendiente.

3.2) Casos de transferencias entre representaciones analíticas de una recta en el plano.

Con razonamientos análogos a los realizados para el caso de representaciones verbales, resulta que existen seis casos de transferencias entre representaciones analíticas (Tabla 3).

Rep. dada: EP	Rep. dada: EG	Rep. dada: EPP
13) RP→EG	15) EG→RP	17) EPP→RP
14) RP→EPP	16) EG→EPP	18) EPP→EG

Etiquetas:
 RP: representación paramétrica de la recta.
 EG: recta representada por una ecuación general.
 EPP: recta representada por una ecuación con un punto y pendiente dada.

Ahora se determinan los casos posibles para transferencias intertipos.

3.3) Casos de transferencias intertipos a partir de una representación verbal de una recta en el plano.

Si se aplica el mismo razonamiento a las transferencias en que la representación dada es verbal y la buscada es analítica, resultan 12 casos posibles (Tabla 4).

Rep. dada: DP	Rep. dada: PVD	Rep. dada: PVN	Rep. dada: PP
19) DP→RP	22) PVD→RP	25) PVN→RP	28) PP→RP
20) DP→EG	23) PVD→EG	26) PVN→EG	29) PP→EG
21) DP→EPP	24) PVD→EPP	27) PVN→EPP	30) PP→EPP

Etiquetas:
 Se utilizan las etiquetas de las tablas 2 y 3.

Como existe una única representación gráfica de una recta para cada sistema de coordenadas, existen cuatro casos posibles de transferencias de una representación verbal a una gráfica. Si denotamos la representación gráfica por G, estos son los casos: 31) DP→G, 32) PVD→G, 33) PVN→G y 34) PP→G.

3.4) Casos de transferencias intertipos a partir de una representación analítica de una recta en el plano.

Existen 12 casos posibles de transferencias en que la representación dada es analítica y la buscada es verbal (Tabla 5).

Tabla 5: casos posibles de transferencia de una representación analítica a una verbal		
Rep. dada: EP	Rep. dada: EG	Rep. dada: EPP
35) RP→DP	39) EG→ DP	43) EPP→DP
36) RP→PVD	40) EG→PVD	44) EPP→PVD
37) RP→PVN	41) EG→PVN	45) EPP→PVN
38) RP→PP	42) EG→PP	46) EPP→PP
Etiquetas: Se utilizan las etiquetas de las tablas 2 y 3.		

Existen tres casos posibles de transferencias de una representación analítica a una gráfica. Estos son: 47) RP→G, 48) EG→G y 49) EPP→G.

3.5) Casos de transferencias a partir de una representación gráfica de una recta en el plano.

Existen cuatro casos posibles de transferencias en que la representación dada es gráfica y la buscada es verbal. Estos son: 50) G→DP, 51) G→PVD, 52) G→PVN y 53) G→PP.

Existen tres casos posibles de transferencias en que la representación dada es gráfica y la buscada es analítica. Estos son: 54) G→RP, 55) G→EG y 56) G→EPP.

4) Identificar cuáles procedimientos se exponen en la bibliografía recomendada por el programa de la asignatura.

En la bibliografía recomendada por el programa de la asignatura se exponen procedimientos para las 24 transferencias identificadas con los números: del 13 al 32, 34, 47, 48 y 49. Los autores elaboraron procedimientos alternativos para las transferencias marcadas con los números 14,18, 20, 23, 24 y 29.

Para las transferencias 4, 7 y 10 no existen procedimientos de transferencia directa en los sistemas de representación que se utilizan en el PEA de la Geometría Analítica. Estas requieren de una representación intermedia de un tipo diferente al tipo de la representación dada. Para las transferencias de la 47 a la 56 la existencia de los procedimientos depende de la información que se pueda obtener del gráfico.

En las que se ha identificado algún procedimiento se observan las limitaciones siguientes: en todos los casos los medios utilizados son lápiz y papel y en la mayoría de ellos no se describe el procedimiento, sino que se presenta en el proceso de resolución de una tarea de aprendizaje.

5) Elaborar procedimientos de las transferencias para las cuales en la bibliografía no se expone ningún procedimiento y analizar la existencia de procedimientos alternativos de los expuestos en la bibliografía.

Los autores de este artículo elaboraron 32 procedimientos de transferencia (con lápiz y papel) que corresponden a las identificadas con las etiquetas: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 50, 51, 52, 53, 54, 55 y 56.

En el PEA de la Geometría Analítica los estudiantes, bajo la dirección del profesor, pueden elaborar otros procedimientos alternativos a los que en este artículo se proponen, incluidos aquellos donde es posible utilizar un software.

6) Ordenar las de transferencia para su uso en el PEA.

Las transferencias se han agrupado en tres clases, según el tipo de la representación dada. En cada clase se ha establecido un orden considerando la forma de la representación buscada y la complejidad de los procedimientos de transferencia (Tabla 6).

Tabla 6: ordenamiento de los casos posibles de transferencia según el tipo de la representación dada y la complejidad de los procedimientos

Tipo de rep. dada: verbal		Tipo de rep. dada: analítica		Tipo de rep. dada: gráfica
22) PVD→RP	1) DP→PVD	13) RP→EG	39) EG→DP	50) G→DP
19) DP→RP	2) DP→PVN	14) RP→EPP	40) EG→PVD	51) G→PVD
25) PVN→RP	3) DP→PP	15) EG→RP	41) EG→PVN	52) G→PVN
28) PP→RP	4) PVD→DP	16) EG→EPP	42) EG→PP	53) G→PP
23) PVD→EG	5) PVD→PVN	17) EPP→RP	43) EPP→DP	54) G→RP
20) DP→EG	6) PVD→PP	18) EPP→EG	44) EPP→PVD	55) G→EG
26) PVN→EG	7) PVN→DP	35) RP→DP	45) EPP→PVN	56) G→EPP
29) PP→EG	8) PVN→PVD	36) RP→PVD	46) EPP→PP	
30) PP→EPP	9) PVN→PP	37) RP→PVN	47) EP→G	
21) DP→EPP	10) PP→DP	38) RP→PP	48) EG→G	
24) PVD→EPP	11) PP→PVD		49) EPP→G	
27) PVN→EPP	12) PP→PVN			
31) DP→G				
32) PVD→G				
33) PVN→G				
34) PP→G				

Se utilizan las etiquetas de las tablas 2 y 3 y la G para la representación gráfica.

6.1) Procedimientos de transferencias a partir de una representación verbal.

Para transferir de una representación verbal a otra representación del mismo tipo o de un tipo diferente es necesario considerar las distintas formas posibles de

representación verbal expuestas en la Tabla 1, pues el procedimiento a aplicar depende de la forma.

6.1.1) Procedimientos de transferencias de una representación verbal a la ecuación paramétrica.

Estos procedimientos corresponden a las transferencias etiquetadas con los números 22, 19, 25 y 28. En la bibliografía recomendada para la asignatura se exponen procedimientos para estas transferencias.

6.1.2) Procedimientos de transferencias de una representación verbal a la ecuación general.

Los procedimientos corresponden a las transferencias etiquetadas con los números 23, 20, 29 y 26. Para todas se han identificado procedimientos en la bibliografía.

6.1.3) Procedimientos de transferencias de una representación verbal a la ecuación con punto y pendiente.

Los procedimientos corresponden a las transferencias etiquetadas con los números 30, 21, 24 y 27 para las que se identificaron procedimientos en la bibliografía recomendada para la asignatura, el correspondiente a la transferencia 24 fue elaborado por los autores y se expone a continuación.

24) PVD→EPP

RD: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es paralela al vector no nulo $a = (a_x; a_y)$.⁴

RB: recta representada por la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Procedimiento:

1) Reconocer que $m = \frac{a_y}{a_x}$ y 2) sustituir x_0, y_0 , y m en la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$.

6.1.4) Procedimientos de transferencias de una representación verbal al gráfico

Estos procedimientos corresponden a los etiquetados con los números 31, 32, 33 y 34; para las dos primeras existen procedimientos en la bibliografía de la asignatura. Los dos casos restantes se exponen a continuación:

⁴ En este artículo se considera siempre que el vector $a = (a_x; a_y)$ no es nulo.

33) PVN→G

RD: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es perpendicular al vector no nulo $n = (n_x; n_y)^5$.

RB: gráfico de la recta.

Procedimiento:

1) Trazar un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares en el plano; 2) representar el punto P_0 y el vector n y 3) trazar por P_0 la perpendicular al vector n .

Esta transferencia es directa e intertipo.

34) PP→G

RD: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ con pendiente m .

RB: gráfico de la recta que pasa por $P_0(x_0; y_0)$ y pendiente m .

Procedimiento:

1) Reconocer que $m = \frac{a_y}{a_x}$ y $a = (a_x; a_y)$ es un vector de dirección de la recta, 2) trazar un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, 3) representar el punto P_0 y el vector a y 4) trazar por el punto P_0 la recta paralela al vector a .

Esta transferencia es directa e intertipo con una única representación intermedia del mismo tipo que la representación dada.

6.1.5) Procedimientos de transferencias de una representación verbal a otra verbal.

Estos procedimientos no se exponen en la bibliografía, fueron elaborados por los autores. Para transferir de una representación **verbal** de la recta en el plano a otra representación **verbal**, se pueden seguir los procedimientos siguientes:

1) DP→PVD

RD: recta que pasa por los puntos $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$

RB: recta que pasa por el punto $P_1(x_1; y_1)$ y es paralela al vector $a = (a_x; a_y)$

Procedimiento:

⁵ En este artículo se asume siempre que en las representaciones dadas o buscadas, el vector $n = (n_x; n_y)$ no es el nulo y que su primera coordenada es n_x y la segunda n_y .

1) Determinar las coordenadas del vector⁶ $a = P_1P_2$ y 2) obtener la representación verbal de la recta en la forma “recta r que pasa por⁷ P_1 y es paralela al vector a ”.

2) DP→PVN

RD: recta que pasa por los puntos $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$.

RB: recta que pasa por el punto $P_1(x_1; y_1)$ y es perpendicular al vector n .

Procedimiento:

1) Determinar las coordenadas del vector $a = P_1P_2$, con $a = (a_x; a_y)$, 2) reconocer que $n = (-a_y; a_x)$ y 3) obtener la representación verbal de la recta r en la forma “recta que; pasa por P_1 y es perpendicular a n ”.

3) DP→PP

RD: recta que pasa por los puntos $P_0(x_0; y_0)$ y $P_1(x_1; y_1)$.

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y con pendiente m

Procedimiento:

1) Calcular la pendiente según la fórmula $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ y 2) obtener la representación verbal de la recta: “recta que pasa por⁸ P_0 con pendiente m ”.

4) PVD→DP

RD: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es paralela al vector $a = (a_x; a_y)$.

RB: recta que pasa por los puntos P_0 y P_1 .

Procedimiento:

1) Obtener una representación paramétrica de la recta (según la transferencia 22), 2) sustituir a t por un número real diferente de cero y calcular para obtener los valores de x_1 y y_1 que son las coordenadas del punto P_1 y 3) obtener la representación verbal de r en la forma “recta que pasa por los puntos P_0 y P_1 ”.

⁶ Puede utilizarse también $a = P_2P_1$ o cualquier múltiplo no nulo de a .

⁷ Puede ser también P_2 .

⁸ Puede ser también P_1 .

5) PVD→PVN

RD: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es paralela al vector $a = (a_x; a_y)$.

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es perpendicular al vector n .

Procedimiento:

1) Reconocer que $n = (-a_y; a_x)$ y 2) obtener la representación verbal de la recta r en la forma “recta que pasa por $P_0(x_0; y_0)$ y es perpendicular a n ”.

6) PVD→PP

RD: recta que pasa por $P_0(x_0; y_0)$ y es paralela al vector $a = (a_x; a_y)$ ($a_x \neq 0$).

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y con pendiente m .

Procedimiento:

1) Reconocer que $m = \frac{a_y}{a_x}$ y 2) obtener la representación verbal de la recta r en la forma “recta que pasa por P_0 con pendiente m ”.

7) PVN→DP

RD: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es perpendicular al vector n .

RB: recta que pasa por los puntos P_0 y P_1 .

Procedimiento: 1) Reconocer que $A = n_x$ y $B = n_y$, 2) sustituir x por x_0 y y por y_0 para obtener una ecuación con la incógnita C , 3) resolver la ecuación obtenida, 4) sustituir el valor de C en la ecuación $Ax + By + C = 0$, 5) determinar las coordenadas de un punto P_1 que pertenezca a la recta y 6) obtener la representación verbal de r en la forma “recta que pasa por los puntos P_0 y P_1 ”.

8) PVN→PVD

RD: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es perpendicular al vector n .

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es paralela al vector $a = (a_x; a_y)$.

Procedimiento:

1) Reconocer que $a = (n_y; -n_x)$ y 2) obtener la representación verbal de r en la forma “recta que pasa por el punto P_0 y es paralela al vector a ”.

9) PVN→PP

RD: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es perpendicular al vector $n = (n_x; n_y)$, ($n_y \neq 0$).

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y con pendiente m .

Procedimiento:

1) Reconocer que $m = \frac{-n_x}{n_y}$ y 2) obtener la representación verbal de r en la forma “recta que pasa por el punto P_0 y tiene pendiente m ”.

10) PP→DP

RD: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y tiene pendiente m

RB: recta que pasa por los puntos P_0 y P_1 .

Procedimiento:

1) Sustituir x_0 , y_0 y m en la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$ para obtener la ecuación de la recta con punto y pendiente dados, 2) obtener las coordenadas de otro punto P_1 de la recta y 3) obtener la representación verbal de r en la forma “recta que pasa por los puntos P_0 y P_1 ”.

Esta transferencia es compuesta con una única representación intermedia de un tipo diferente al de las representaciones dada y buscada.

11) PP→PVD

RD: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y tiene pendiente m .

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es paralela al vector $a = (a_x; a_y)$.

Procedimiento:

1) Determinar a_x y a_y utilizando la relación $m = \frac{a_y}{a_x}$ y 2) escribir la representación verbal de la recta en la forma “recta que pasa por P_0 y es paralela al vector a ”.

12) PP→PVN

RD: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ con pendiente m .

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es perpendicular al vector n .

Procedimiento:

1) Determinar n_x y n_y según la relación $m = \frac{-n_x}{n_y}$ y 2) escribir la representación verbal de la recta: “recta que pasa por el punto P_0 y es perpendicular a n ”.

6.2) Procedimientos de transferencias a partir de una representación analítica.

Aquí se exponen los procedimientos de transferencia en que la representación dada es analítica y la búsqueda es de cualquiera de los tipos de la Tabla 1.

6.2.1) Procedimientos de transferencias de una representación analítica a otra analítica.

Los procedimientos corresponden a las transferencias etiquetadas con los números 13, 14, 15, 16, 17 y 18. Todos aparecen en la bibliografía.

6.2.2) Procedimientos de transferencias de una representación analítica a una verbal

Estos procedimientos, fueron elaborados por los autores de este artículo y corresponden a transferencias intertipos:

35) EP→DP

RD: recta representada por el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x = x_0 + ta_x \\ y = y_0 + ta_y \end{cases} (*)$

RB: recta que pasa por los puntos $P_0(x_0; y_0)$ y $P_1(x_1; y_1)$.

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas de $P_0(x_0; y_0)$ en el sistema de ecuaciones, 2) sustituir a t por un número real diferente de cero y efectuar las operaciones indicadas para obtener las coordenadas de un punto P_1 y 3) obtener la representación verbal de la recta: “recta que pasa por los puntos P_0 y P_1 ”.

36) EP→PVD

RD: recta representada por el sistema de ecuaciones (*).

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es paralela al vector $a = (a_x; a_y)$.

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas del punto P_0 y del vector $a = (a_x; a_y)$ en el sistema de ecuaciones (*) y 2) escribir la representación verbal en la forma “recta que pasa por $P_0(x_0; y_0)$ y es paralela al vector $a = (a_x; a_y)$ ”.

37) EP→PVN

RD: recta representada por el sistema de ecuaciones (*)

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es perpendicular al vector n .

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas del punto $P_0(x_0; y_0)$ en el sistema de ecuaciones (*), 2) reconocer que $n = (-a_y; a_x)$ y 3) escribir la representación verbal de la recta en la forma “recta r que pasa por P_0 y es perpendicular al vector n ”.

38) EP→PP

RD: recta representada por el sistema de ecuaciones (*), con $a_x \neq 0$.

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y con pendiente m .

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas del punto $P_0(x_0; y_0)$ en el sistema de ecuaciones (*), 2) reconocer que $m = \frac{a_y}{a_x}$ y 3) escribir la representación verbal de la recta en la forma “recta r que pasa por P_0 y tiene pendiente m ”.

39) EG→ DP

RD: recta representada por la ecuación $Ax + By + C = 0$.

RB: recta que pasa por los puntos $P_1(x_1; y_1)$. y $P_2(x_2; y_2)$.

Procedimiento:

1) Determinar las coordenadas de dos puntos $P_1(x_1; y_1)$. y $P_2(x_2; y_2)$. que pertenezcan a la recta (sus coordenadas deben satisfacer la ecuación) y 2) obtener la representación verbal de la recta en la forma “recta r que pasa por P_1 y P_2 ”.

40) EG→PVD

RD: recta representada por la ecuación $Ax + By + C = 0$.

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es paralela al vector $a = (a_x; a_y)$.

Procedimiento:

1) Determinar las coordenadas de un punto $P_0(x_0; y_0)$ que pertenezca a la recta, 2) reconocer que $a = (B; -A)$ y 3) obtener la representación verbal de la recta en la forma “recta r que pasa por $P_0(x_0; y_0)$ y es paralela al vector $a = (a_x; a_y)$ ”.

41) EG → PVN

RD: recta representada por la ecuación $Ax + By + C = 0$.

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es perpendicular al vector n

Procedimiento:

1) Determinar las coordenadas de un punto $P_0(x_0; y_0)$ que pertenezca a la recta, 2) reconocer que $n = (A; B)$ y 3) obtener la representación verbal de la recta en la forma “recta r que pasa por $P_0(x_0; y_0)$ y es perpendicular al vector n ”.

42) EG → PP

RD: recta representada por la ecuación $Ax + By + C = 0$ ($B \neq 0$).

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ con pendiente m .

Procedimiento:

1) Determinar las coordenadas de un punto $P_0(x_0; y_0)$ que pertenezca a la recta, 2) reconocer que $m = \frac{-A}{B}$ y 3) obtener la representación verbal de la recta en la forma “recta r que pasa por $P_0(x_0; y_0)$ y tiene pendiente m ”.

43) EPP → DP

RD: recta representada por la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$.

RB: recta que pasa por los puntos $P_0(x_0; y_0)$ y $P_1(x_1; y_1)$.

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas del punto $P_0(x_0; y_0)$ en la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$, 2) determinar las coordenadas de un punto $P_1(x_1; y_1)$ que pertenezca a la recta (sus coordenadas deben satisfacer la ecuación) y 3) obtener la representación verbal de la recta en la forma “recta r que pasa por los $P_0(x_0; y_0)$ y $P_1(x_1; y_1)$ ”.

44) EPP → PVD

RD: recta representada por la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$.

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es paralela al vector $a = (a_x; a_y)$.

Procedimiento:

1) Determinar a_x y a_y según la relación $m = \frac{a_y}{a_x}$, 2) identificar las coordenadas de $P_0(x_0; y_0)$ en la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$ y 3) escribir la representación verbal de la recta: “recta r que pasa por $P_0(x_0; y_0)$ y es paralela al vector $a = (a_x; a_y)$ ”.

45) EPP→PVN

RD: recta representada por la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$.

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y es perpendicular a la vector n

Procedimiento:

1) Determinar n_x y n_y utilizando la relación $m = \frac{-n_x}{n_y}$, 2) identificar las coordenadas de $P_0(x_0; y_0)$ en la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$ y 3) escribir la representación verbal de la recta en la forma “recta r que pasa por $P_0(x_0; y_0)$ y es perpendicular a n ”.

46) EPP→PP

RD: recta representada por la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$.

RB: recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y con pendiente m .

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas de $P_0(x_0; y_0)$ en la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$, 2) identificar la pendiente de la recta en $y - y_0 = m(x - x_0)$ y 3) escribir la representación verbal de la recta en la forma “recta r que pasa por $P_0(x_0; y_0)$ y tiene pendiente m ”.

6.2.3) Procedimientos de transferencias de una representación analítica a la gráfica.

Los procedimientos corresponden a las transferencias etiquetadas con los números 47, 48 y 49 y todos aparecen en la bibliografía.

6.3.) Procedimientos de transferencias a partir de la representación gráfica.

Para transferir de la representación **gráfica** de la recta en el plano a otro tipo de representación, el gráfico debe ofrecer la información necesaria. Consideremos que en el gráfico se pueden identificar las coordenadas de, al menos, dos puntos P_1 y P_2 de la recta, aunque se pueden presentar otros casos. Todas las transferencias son intertipos.

6.3.1) Procedimientos de transferencias de la representación gráfica a una verbal

Los procedimientos fueron elaborados por los autores:

50) $G \rightarrow DP$

RD: gráfico de una recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 .

RB: recta que pasa por los puntos $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$.

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas de dos puntos P_1 y P_2 de la recta r y 2) representar verbalmente la recta en la forma “recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 ”.

51) $G \rightarrow PVD$

RD: gráfico de una recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 .

RB: recta que pasa por el punto $P_1(x_1; y_1)$ y es paralela al vector $a = (a_x; a_y)$.

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas de dos puntos P_1 y P_2 de la recta r ; 2) calcular las coordenadas del vector de dirección $a = P_1P_2$ y 3) representar verbalmente la recta en la forma “recta que pasa por P_1 y es paralela al vector a ”.

52) $G \rightarrow PVN$

RD: gráfico de una recta que pasa por los puntos P_1 y P_2

RB: recta que pasa por el punto $P_1(x_1; y_1)$ y es perpendicular al vector n .

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas de dos puntos P_1 y P_2 de la recta r , 2) calcular las coordenadas del vector de dirección $a = P_1P_2 = (a_x; a_y)$, 3) reconocer que $n = (-a_y; a_x)$ y 4) escribir la representación verbal de la recta en la forma “recta que pasa por P_1 y es perpendicular al vector n ”.

53) G→PP

RD: gráfico de una recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 .

RB: recta que pasa por el punto $P_1(x_1; y_1)$ y con pendiente m .

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas de dos puntos P_1 y P_2 de la recta r , 2) calcular m según la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y 3) escribir la representación verbal de la recta en la forma "recta que pasa por P_1 y tiene pendiente m ".

6.3.2) Procedimientos de transferencias de la representación gráfica a una analítica

En la bibliografía no se exponen los procedimientos, los autores los elaboraron:

54) G→RP

RD: gráfico de una recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 .

RB: recta representada por el sistema de ecuaciones (*).

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas de dos puntos P_1 y P_2 de la recta r , 2) calcular las coordenadas del vector de dirección $a = P_1P_2 = (a_x; a_y)$ y 3) sustituir los valores de x_1, y_1, a_x y a_y en el sistema de ecuaciones (*).

55) G→EG

RD: gráfico de una recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 .

RB: recta representada por la ecuación $Ax + By + C = 0$.

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas de dos puntos P_1 y P_2 de la recta r , 2) calcular las coordenadas del vector de dirección $a = P_1P_2 = (a_x; a_y)$, 3) reconocer que $n = (-a_y; a_x)$ y 4) sustituir x por x_1 y y por y_1 en la ecuación $Ax + By + C = 0$ para obtener una ecuación con la incógnita C , 5) resolver la ecuación obtenida y 6) sustituir el valor de C en la ecuación $Ax + By + C = 0$ para obtener la representación buscada.

56) G→EPP



RD: gráfico de una recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 .

RB: recta representada por la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Procedimiento:

1) Identificar las coordenadas de dos puntos P_1 y P_2 de la recta r ; 2) calcular m según la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y 3) sustituir x_1 , y_1 y m en la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$.

El gráfico puede ofrecer datos que permitan identificar: las coordenadas de un punto y de un vector de dirección de la recta; las coordenadas de un punto y de un vector normal; las coordenadas de un punto y la pendiente. En estos casos se puede realizar la transferencia de forma análoga a la explicada.

4. Conclusiones

La determinación de procedimientos de transferencia entre representaciones de elementos de conjuntos bases de estructuras geométricas es una componente de la planificación del PEA de la Geometría Analítica. Su realización se puede ejecutar siguiendo el procedimiento didáctico expuesto en este trabajo y requiere de una base teórica que involucra los conceptos de estructura matemática, representación, sistema de representación y transferencia entre representaciones.

Con la aplicación del procedimiento didáctico expuesto ha sido posible determinar y ordenar los procedimientos para realizar todas las transferencias intratipo e intertipos entre representaciones verbales, analíticas y gráfica de una recta en el plano con lápiz y papel. Según el nivel de desarrollo de los sistemas de representación de la Geometría Analítica, en 19 de los 56 casos posibles los procedimientos presentados corresponden a transferencias compuestas, lo cual indica que en el PEA de esta asignatura existen potencialidades para el desarrollo de los sistemas de representación en la dirección de la creación de procedimientos de transferencia directa.

Los resultados obtenidos en la determinación de los procedimientos de transferencia entre representaciones de la recta en el plano demuestran la utilidad práctica de los conceptos de tipo y forma de representación desarrollados por los autores. Estos conceptos no suelen diferenciarse entre sí en la bibliografía sobre la teoría de las representaciones de los objetos matemáticos.

Bibliografía

Álvarez, M., Almeida, B. y Villegas, E. (2014). *El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática*. La Habana: Pueblo y Educación.

Ballester, S. y otros (2000). *Metodología de la enseñanza de la Matemática, tomo II*. La Habana: Pueblo y Educación.

Castro, S., Díaz, M., Martínez, P., López, F., Bermúdez, I. y González, J. (1992). *Geometría*. La Habana: Pueblo y Educación.

Gómez, P. y Rico, L. (2002). *Análisis didáctico, conocimiento didáctico y formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/376/> el 31 de agosto de 2015.

Jungk, W. (1978). *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 1*. La Habana: Pueblo y Educación.

Kaput, J. (1987). Representation and mathematics. In C. Janvier (ed.), *Problems of representation in mathematics learning and problem solving* (pp. 19-26). Hillsdale, N. J. Lawrence Erlbaum Associates.

Ruiz, A. (2007). *Modelo didáctico de la integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas en la Educación Preuniversitaria*. Tesis presentada en opción al grado científico de doctor en ciencias pedagógicas. Sancti Spíritus. Cuba.

Autores:

Quero Méndez, Ortelio Nilo: Máster en didáctica de la Matemática, Licenciado en Educación Especialidad Matemática. 35 años de experiencia en la formación de profesores de Matemática. Investigador en didáctica de la Matemática. oquero@uniss.edu.cu

Ruiz Pérez, Aldo Medardo: Doctor en Ciencias Pedagógicas, Máster en didáctica de la Matemática, Licenciado en Educación Especialidad Matemática. 35 años de experiencia en la formación de profesores de Matemática. Investigador en didáctica de la Matemática.