

Engenharia Didática na abordagem da Sequência de Lucas com aporte do GeoGebra: uma experiência no ensino remoto

Carla Patrícia Souza Rodrigues Pinheiro, Francisco Régis Vieira Alves, Renata Teófilo de Sousa, Alessandra Senes Marins

Fecha de recepción: 13/10/2021
 Fecha de aceptación: 21/12/2021

Resumen	<p>Este trabajo proviene de una tesis de maestría en curso, del Programa de Posgrado en Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas del Instituto Federal de Educación, Ciencia y Tecnología de Ceará - Campus Fortaleza. El objetivo de este trabajo es desarrollar la secuencia de Lucas en una práctica docente, acercándose a su visualización 2D, expandiéndose a la visión 3D soportada por el software GeoGebra. Como base conceptual tenemos la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) para orientar la práctica docente y como metodología utilizamos la Ingeniería Didáctica (DE), apoyando el estudio de esta temática.</p> <p>Palabras clave: Secuencia de Lucas, Ingeniería Didáctica, Teoría de las Situaciones Didácticas, GeoGebra.</p>
Abstract	<p>This work comes from an ongoing master's thesis, from the Graduate Program in Science and Mathematics Teaching at the Federal Institute of Education, Science and Technology of Ceara - Campus Fortaleza. The objective of this work is to develop the Lucas sequence in a teaching practice, approaching its 2D visualization, expanding to the 3D vision supported by the GeoGebra software. As a conceptual basis we have the Theory of Didactic Situations (TSD) to guide the teaching practice and as a methodology used Didactic Engineering (DE), supporting study of this theme.</p> <p>Keywords: Lucas Sequence, Didactic Engineering, Theory of Didactic Situations, GeoGebra.</p>
Resumo	<p>Este trabalho é proveniente de uma dissertação de mestrado em andamento, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - Campus Fortaleza. O objetivo deste trabalho é desenvolver a sequência de Lucas em uma prática de ensino, abordando sua visualização 2D, expandindo para a visão 3D com aporte do software GeoGebra. Como base conceitual temos a Teoria das Situações Didáticas (TSD) para nortear a prática de ensino e como metodologia utilizada a Engenharia Didática (ED), amparando o estudo deste tema.</p> <p>Palavras-chave: Sequência de Lucas. Engenharia Didática, Teoria das Situações Didáticas, GeoGebra.</p>

1. Introdução

A Sequência de Lucas é investigada neste trabalho, tendo em vista que este assunto é pouco abordado na disciplina de História da Matemática dentro da graduação (Guedes e Alves, 2019). Deste modo, surgiu o interesse em explorar esta sequência a partir da construção geométrica com suas visualizações em 2D e 3D, visando estimular estudantes de um curso de licenciatura em Matemática a investigar algumas definições referentes a sequência de Lucas a serem estudadas na disciplina de História da Matemática em sua formação inicial.

Dentre as definições que são encontradas na Sequência de Fibonacci, a sequência de Lucas, se destaca pela forma mais clara nas aplicações e sua relação direta com o número áureo e suas potências. Vale a pena ressaltar que Lucas foi quem associou e difundiu o nome de Fibonacci, mesmo sabendo que seus primeiros escritos em referência a sequência de Fibonacci tenham sido como a série de Lamé (Silva, 2017). Por esse motivo, destaca-se a importância do estudo sobre essa sequência.

Assim, o objetivo deste trabalho foi desenvolver a Sequência de Lucas em uma prática de ensino, abordando sua visualização 2D, expandindo para a visão 3D com aporte do *software* GeoGebra, norteada pela Teoria das Situações Didáticas (TSD) e pela Engenharia Didática (ED), amparando a prática do professor sobre seu estudo.

A ED é uma metodologia de pesquisa originada na França e atrelada aos estudos da Didática da Matemática e pode auxiliar no desenvolvimento de investigações sobre o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática a partir de situações didáticas realizadas em sala de aula.

Segundo Alves (2017), a ED enquanto campo de pesquisa proporcionou uma evolução na investigação científica em Educação Matemática, em que o professor/pesquisador pode desempenhar ações similares as de um engenheiro, conciliando conhecimentos de diferentes ciências em realizações práticas e planejamentos experimentais bem idealizados, elaborando hipóteses para despertar a aprendizagem em seus alunos. Assim, a Engenharia Didática torna possível ao professor, investigar conceitos teóricos, a fim de relacionar a teoria e a prática em sala de aula.

Com o aporte da ED para o desenvolvimento deste trabalho, o planejamento e execução deve seguir suas quatro fases, a saber: análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e *validação*, descritas ao longo das seções deste trabalho.

Esta pesquisa ocorreu com três alunos do 6º semestre de um curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), na disciplina de História da Matemática, sendo desenvolvida em três encontros de forma remota, devido ao cenário da pandemia COVID-19.

Para o desenvolvimento da situação didática utilizou-se como recurso auxiliar o *software* GeoGebra. Díaz-Urdanetta, Kalinke e Motta (2019) afirmam que o GeoGebra é uma ferramenta dinâmica e de fácil utilização, configurando-se em um recurso que permite uma abordagem diferenciada, possibilitando a apresentação de vários tópicos de Matemática em uma única interface, o que permite uma

experimentação e visualização de aspecto dessa disciplina com grande potencial para desenvolver o conhecimento matemático do aluno.

Portanto, nas seções seguintes apresentam-se a Teoria das Situações Didáticas (TSD) como norteadora da sessão de ensino elaborada; as fases da Engenharia Didática (ED) para a concepção e organização deste estudo, trazendo a discussão do referencial teórico a partir das análises preliminares, apontando a definição da Sequência de Lucas e a História da Matemática na formação inicial do professor; a concepção e análise *a priori* da situação didática, e por fim, apresentam-se os resultados coletados a partir da experimentação realizada, bem como sua análise *a posteriori* e validação, finalizando com as considerações dos autores.

2. Teoria das Situações Didáticas

Nesta pesquisa foi utilizada a Teoria das Situações Didáticas (TSD), criada por Guy Brousseau, um dos pioneiros da Didática da Matemática francesa. A TSD é uma teoria que visa nortear sessões de ensino a partir de situações didáticas ou sequências didáticas previamente elaboradas pelo docente. Segundo Brousseau (2008) a TSD suscita uma compreensão da relação existente entre o trinômio que compõe a essência do sistema didático – aluno, professor e o saber – bem como o meio (*milieu*) em que ocorre a situação didática.

Na TSD o trabalho executado pelo aluno é realizado a partir de uma situação didática elaborada pelo professor, aproximando-o das habilidades de um investigador, capaz de formular hipóteses, teorias e conceitos, ao passo que o professor propicia situações favoráveis para que ele, ao agir, transforme aquela informação em conhecimento para si mesmo (Sousa, Azevedo e Alves, 2021).

Nesse sentido, o que Brousseau (2008, p. 20) chama de situação didática é “um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado”. Desta forma, compreende-se que a situação didática é elaborada pelo professor intencionalmente para que, a partir da interação entre o aluno e o meio, a situação elaborada provoque sua aprendizagem.

A TSD é organizada em fases ou dialéticas que norteiam o processo de aprendizagem, sendo estas definidas por Brousseau (2008) como *ação*, *formulação*, *validação* e *institucionalização*. De forma resumida temos, por definição:

- **Ação:** momento que ocorre o primeiro contato do aluno com o problema proposto, em que levanta seus conhecimentos prévios, buscando informações já conhecidas que o auxiliem na resolução do problema;
- **Formulação:** nesta fase há uma permuta de informações entre o aluno e o *milieu*. O aluno verbaliza suas ideias e conjecturas e começa a traçar uma estratégia para solucionar o problema, mas não se utiliza do rigor matemático;
- **Validação:** neste momento, o estudante busca validar suas hipótese e teorias, procurando convencer os demais da validade/veracidade de sua argumentação com relação à resposta elaborada dentro do sistema previamente estabelecido;
- **Institucionalização:** nesta etapa, o professor sintetiza, com o devido rigor e formalidade o conteúdo matemático a ser aprendido com a situação proposta,

a partir do que foi exposto pelos alunos nas fases anteriores, formalizando o que foi validado pelos alunos.

Vale ressaltar que as três primeiras fases ou dialéticas compõem o que Brousseau (2008) denomina de situação adidática, em que o estudante interage com o problema sem nenhuma intervenção do docente, a partir de seus conhecimentos prévios, vivências e troca de informações com o *milieu*. Na fase de institucionalização, ocorre uma socialização e compreensão das ideias a partir da intervenção do professor, em que mostra ao estudante a intenção da atividade proposta e valida as resoluções realizadas pelos alunos, verificando e discutindo os passos dos procedimentos executados durante as fases anteriores.

É importante destacar que, durante a institucionalização, os erros também devem ser apontados e discutidos em conjunto. Segundo Almouloud (2007, pp.40) “[...] o professor deve fixar convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber”. Alves (2016) reitera que:

Desse modo, tendo em vista tornar oficial determinado saber e indicar a relevância de incorporá-lo ao patrimônio cultural da classe, o seguinte teorema deverá ser enunciado e, em adequação ao público de interesse (alunos de licenciatura ou bacharelato), pode ser demonstrado (Alves, 2016, pp. 106).

Desta forma, temos o intuito de explorar a situação didática proposta a partir da TSD, associada à Engenharia Didática (ED), apresentada na seção seguinte.

3. Engenharia Didática

A metodologia de pesquisa adotada para a realização deste trabalho é a Engenharia Didática (ED). A escolha da ED deve-se à união entre a teoria e a prática em sala de aula. Segundo Almouloud (2007), a ED estuda os processos de ensino e de aprendizagem de um determinado objeto matemático.

A ED surgiu na década de 80, com intuito de ser uma metodologia investigativa para auxiliar a Didática da Matemática (DM). Esta metodologia organiza a prática docente, observando como as pesquisas podem ser utilizadas nos processos de ensino e de aprendizagem de um determinado objeto matemático (Santos e Alves, 2017).

Artigue, Douady e Moreno (1995) afirmam que a ED pode-se dividir em dois segmentos: microengenharia – que se refere aos fenômenos em sala de aula – e a macroengenharia – que observa os fenômenos que ocorrem no processo de ensino e de aprendizagem. No caso desta pesquisa, utilizamos uma microengenharia, com o intuito de mostrar definições referentes à Sequência de Lucas para a formação inicial de professores de Matemática, investigando esse assunto nas aulas de História da Matemática.

Segundo Artigue (1996), o planejamento e execução de uma ED segue a partir de quatro fases, que são (i) análises preliminares; (ii) concepção e análise *a priori*; (iii) experimentação, e; (iv) análise *a posteriori* e validação, que são descritas de forma sucinta ao longo desta seção.

Nas análises preliminares foi realizada uma investigação a partir de referenciais teóricos sobre a Sequência de Lucas, em que se fez um levantamento histórico sobre o modo como ocorre sua abordagem na disciplina de História da Matemática. Neste caso, foi feito um levantamento especificamente em relação à

criação da Sequência de Lucas, buscando reconhecer aspectos didáticos do trabalho com este tema no âmbito da sala de aula. Sabe-se que nesta fase ocorre um resgate dos conhecimentos prévios, ou seja, os saberes adquiridos ao longo da vida escolar.

Na fase de concepção e análise *a priori*, segundo Alves et al. (2019), ocorre a elaboração da situação didática, pensada para responder os questionamentos ou hipóteses levantadas a partir da análise preliminar. Assim, a partir das variáveis, o estudo da sequência e da espiral de Lucas por meio de definições geométricas podem fornecer ao pesquisador subsídios para a construção da situação didática e, a partir da vivência, por parte do aluno, superar os obstáculos encontrados no processo de aprendizagem.

Após estas etapas realizamos a experimentação situação didática, com a coleta de dados sobre o comportamento dos estudantes mediante a prática da atividade proposta, a partir da observação de elementos importantes em um contexto didático-metodológico. No caso desta pesquisa, a situação didática proposta apresentada foi a construção da Sequência de Lucas em 2D e 3D por meio do *software* GeoGebra, a partir de uma perspectiva geométrica.

E por fim, com base na coleta de dados realizada, realizamos uma análise *a posteriori* e validação da situação didática vivenciada, buscando confrontá-la com a análise *a priori* previamente estabelecida, verificando se o que de fato foi conjecturado é válido. Deste modo, foram realizados registros fotográficos, gravações de áudio e de vídeo pelo *Google Meet* e dois questionários utilizando o *Google Forms*, como forma de catalogar informações sobre os três encontros virtuais realizados. Nesses encontros participaram um professor visitante para aplicação e três estudantes de graduação do 6º semestre do curso de Licenciatura em Matemática.

Além disso, foi estabelecido o contrato didático com a turma para a aplicação da situação didática (Almouloud e Silva, 2012). Segundo Brousseau (1986), o contrato didático é necessário para haja um acordo entre o professor e o aluno, durante as situações de ensino em sala de aula, configurando-se em um sistema de obrigações recíprocas, para que o planejamento ocorra de forma efetiva.

Com relação a análise *a posteriori* e validação, de acordo com que foi coletado na fase de experimentação, foi realizado um confronto com a análise *a priori*, comparando os resultados esperados com os obtidos. A análise *a posteriori* possibilita prever se o meio, se o cenário demarcado para o desenvolvimento das sequências permite a determinação de informações representativas e não secundárias para a investigação (Santos e Alves, 2018).

A partir disto, foram descritas as etapas da ED relacionadas à situação didática proposta, referente à construção da Sequência de Lucas em 2D e 3D, analisando o que foi exposto pelos estudantes.

3.1. Análises preliminares: História da Matemática e a Sequência de Lucas

Na disciplina História da Matemática durante o curso de licenciatura em Matemática são apresentados conhecimentos pertinentes ao desenvolvimento do professor em formação inicial. Miguel e Brito (1996, pp. 50) defendem a abordagem histórica da disciplina na formação dos professores de Matemática, ressaltando sua contribuição na ação pedagógica do futuro docente, ao apontar que:

[...] a participação orgânica da história na formação do Professor de Matemática, destacando a contribuição da História da Matemática na ação pedagógica como um instrumento que permite a compreensão da natureza dos objetos matemáticos, a função da abstração, da generalização, da noção de rigor, do papel da axiomatização, dos modos de se entender a organização do saber além, da dimensão estética, ética e política da atividade Matemática. (Miguel e Brito, 1996, pp. 50).

Partindo desta premissa, compreende-se que à medida que os futuros professores conhecem a História da Matemática, estes tendem a contribuir e a facilitar a compreensão dos fundamentos dessa ciência em sua prática de trabalho. Além disso, seu conhecimento nesta área pode-lhes servir de instrumento para responder alguns entraves dos estudantes sobre a aplicação da Matemática.

Assim, neste trabalho procurou realizar uma conexão entre a relação de recorrência da Sequência de Lucas, em uma perspectiva histórica, com sua construção geométrica no *software* GeoGebra, buscando contribuir de maneira significativa para o docente em formação.

François Édouard Anatole Lucas nasceu em 04 de abril de 1842 e faleceu em 3 de outubro de 1891 em Paris, França (Guedes e Alves, 2019). Lucas foi um estudioso que contribuiu no ramo da Matemática lúdica, sendo o criador do famoso jogo matemático Torre de Hanói, bem como de outros quebra-cabeças. Em sua contribuição aos estudos acerca dos números primos, encontrou manualmente o maior número primo, indicado por Eves (1969) com valor numérico de:

$$2^{127} - 1 = 170141183460460469231687303715884104727.$$

Com base nas relações da Sequência de Fibonacci, Lucas em 1878 criou sua própria sequência por recorrência (1, 3, 4, 7, 11, 18, 29...). Entretanto, sua sequência é pouco explorada na disciplina da História da Matemática, diferindo a sequência de Fibonacci apenas pelos valores iniciais, sendo definida, segundo Honsberger (1985, pp. 111) por:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n > 2.$$

Contudo, com base nas relações já demonstradas na sequência de Fibonacci, obtemos: $f_2 = f_1 + f_0$; isso implica, $f_0 = f_2 - f_1 = 0$. Em termos operacionais, $L_0 = L_1 + L_0$; necessitamos do termo L_0 ; assim, podemos tomar, $L_2 = L_1 + L_0$; isso implica, $L_0 = L_2 - L_1 = 2$.

Honsberger (1985, pp. 111) observa que “[...] a sequência de Lucas é sempre correspondentemente maior do que a sequência de Fibonacci, com exceção para L_1 e f_1 ”. Outra relação curiosa percebida no diagrama mostra que $L_n = f_{n-1} + f_{n+1}$.

.Essa sequência tem uma lei de recorrência aritmética, em que os dois termos iniciais são $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$. Dessa forma, para se calcular o próximo termo deve-se

$$L_2 = L_0 + L_1 = 2 + 1 = 3$$

somar os dois termos anteriores. Logo, encontra-se $L_2 = 3$, como terceiro termo. Para calcular o próximo termo, utiliza-se o mesmo raciocínio, assim $L_3 = L_1 + L_2 = 1 + 3 = 4$

, sendo esta sequência organizada como na Tabela 1:

N	0	1	2	3	4	5	6	...
L_n	2	1	3	4	7	11	18	...

Tabela 1. Termos iniciais da Sequência de Lucas

Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

A partir do exposto na Tabela 1, pode-se inferir que a sequência de Lucas é $(p, q, p + q, p + 2q, 2p + 3q, 3p + 5q, \dots)$

representada por $(p, q, p + q, p + 2q, 2p + 3q, 3p + 5q, \dots)$ (Hoggat e Venner, 1969). Assim, de modo análogo, pode-se estender esta generalização para a Sequência de Fibonacci.

3.2. Concepção e análise a priori

O uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) como um suporte para aulas de Matemática, é um método que difere da utilização que se resume em lápis e papel, ou o uso da internet somente como ferramenta de pesquisa, tornando o processo mais dinâmico, trazendo uma possibilidade de interação dos estudantes durante o processo. Borba (2011), lembra que as possibilidades experimentais dessas mídias podem ser utilizadas para estudos, podendo-se chegar à elaboração e verificação de teorias, levando os estudantes a desenvolverem suas ideias a ponto de criarem hipóteses.

Assim, para o desenvolvimento desta sequência de forma geométrica, utilizou-se neste trabalho uma construção que traz uma abordagem visual, em que a Sequência de Lucas é apresentada com o suporte do *software* GeoGebra, em que foi explorada sua visualização nas dinâmicas 2D e 3D, em encontros virtuais referentes à disciplina de História da Matemática com professores em formação inicial.

Partindo do estudo bibliográfico sobre a sequência de Fibonacci e sua generalização, a partir da lei de recorrência para desenvolver a Sequência de Lucas por meio de construções geométricas, foi desenvolvida uma situação didática de ensino, fundamentada na TSD, com o propósito incentivar os licenciandos na criação de estratégias para solucionar uma situação-problema, a partir de seus conhecimentos prévios.

Situação-problema: Como a sequência de Lucas pode ser visualizada a partir do *software* GeoGebra? Diante dessa informação, apresente possíveis relações entre as sequências através das construções, utilizando os comandos já observados por meio desse *software*.

A partir da situação didática proposta, faz-se uma previsão atitudinal do que se espera como tomadas de decisão e estratégias dos estudantes com base nas dialéticas da TSD, para a construir a solução da situação apresentada.

Ação: A partir da apresentação da situação-problema, partindo da visualização da sequência de Fibonacci na forma geométrica, sua representação no GeoGebra,

bem como apresentação de suas ferramentas, espera-se que o estudante seja capaz de enxergar a associação entre a Sequência de Fibonacci e a Sequência de Lucas a partir de sua lei de formação inicial. Neste momento, não é importante que o estudante saiba manipular os comandos, mas sim que o mesmo entenda o objetivo da atividade e como ocorre a construção, modificando os valores no ambiente do *software*.

Como consequência, espera-se que os estudantes absorvam o problema proposto e as informações previamente estabelecidas e realizem uma relação entre a sequência de Lucas e os quadrados para a construção do retângulo de ouro, bem como a lei de recorrência de segunda ordem em que se encontra, utilizando apenas os conhecimentos adquiridos durante a sua trajetória escolar em etapas anteriores. Nessa fase, é importante que os estudantes façam relações entre as duas sequências, pois isso ajudará nas possíveis formulações de respostas.

Formulação: Nesta fase, espera-se que os estudantes levantem as suas primeiras conjecturas matemáticas a partir do problema proposto, bem como a relação entre as sequências vistas no GeoGebra. É interessante que neste momento sejam feitas anotações por parte dos estudantes, não necessariamente com rigor matemático, mas com o auxílio do GeoGebra.

Validação: Nessa fase espera-se que os estudantes já tenham compreendido a regra da lei de recorrência e como essas sequências podem ser construídas por meio de figuras geométricas. Através da visualização dos quadrados da sequência pode-se observar o comportamento padrão, tanto para a sequência de Fibonacci, quanto para a sequência de Lucas, realizando uma comparação na construção. Assim, com as mesmas ferramentas que utilizamos para construção da espiral de Fibonacci, faz-se a construção da espiral de Lucas.

Institucionalização: Conforme a TSD, nesse momento o professor deve manifestar-se, apresentando um caminho didático que esclarece o objetivo da atividade, culminando na construção do conhecimento do aluno, no caso da compreensão do comportamento da Sequência de Lucas, bem como sua visualização no GeoGebra nas perspectivas 2D e 3D, apontando elementos e informações importantes, possivelmente não observados pelos estudantes e, a partir disto, realizar intervenções sobre possíveis argumentos falhos ao processo de aprendizagem.

A partir do exposto, a seção seguinte ilustra a etapa de experimentação, com a descrição da situação didática aplicada e a coleta de dados deste trabalho.

3.3. Experimentação

O processo de experimentação foi escolhido com uma perspectiva de desenvolvimento da prática do professor de Matemática. Assim, os encontros foram pensados no ciclo do trabalho do professor, incorporando as atividades relacionadas ao planejamento, ensino e reflexão.

Assim, os dados foram coletados a partir dos três encontros virtuais. Para cada encontro os estudantes receberam tarefas como pesquisar sobre a sequência de Fibonacci e de Lucas, relacionando a uma discussão e reflexão sobre o tema proposto. Além disso, ocorreram discussões pelo aplicativo de mensagens *WhatsApp* a respeito do desenvolvimento das tarefas.

Esses encontros ocorreram no mês de maio do ano de 2021, com duração média de duas horas cada. Para obtenção das informações a serem analisadas, participaram um grupo composto por três estudantes que desenvolveram as atividades propostas, denominados por A1, A2 e A3 (aluno1, aluno2 e aluno 3), como forma de preservar suas identidades. Além disso, houve a participação de um professor para aplicação do estudo sobre a sequência de Lucas.

No primeiro encontro virtual pelo *Google Meet*, ocorreu a fase de ação, em que o professor apresentou as leis de recorrências das sequências de Fibonacci e de Lucas e em seguida construiu o retângulo áureo, que é a inspiração para construção geométrica da sequência de Fibonacci. Assim, a partir dessas informações A1 deduziu a seguinte afirmação: “*tendo em vista que os termos dessa sequência de Fibonacci convergem para o mesmo número de ouro que é igual a 1,61 aproximadamente.*” Todas as informações foram retiradas dos áudios que ocorreram durante os encontros virtuais.

Na fase da formulação, existe a troca de informação entre os estudantes. Assim, ocorre um diálogo entre os alunos. Dessa maneira,

A1: *Eu tô em dúvida em como começar. Onde coloco o quadrado de lado 3 da sequência de Lucas de modo que fique em boa ordem com os próximos quadrados? Por que o próximo termo da sequência é o de lado 4 e não vai ter como colocar sem ficar uma parte em branco.*

A2: *Não fica uma parte em branco pois você faz uma sobreposição, se você quiser pode olhar a minha construção e a do A3 também, vai te ajudar.*

Após esse diálogo, houve a validação dos resultados a partir da resposta encontrada em consenso entre os alunos. Nesse mesmo encontro, os alunos foram direcionados para construção geométrica da sequência de Lucas numa visualização 2D, conforme a Figura1.

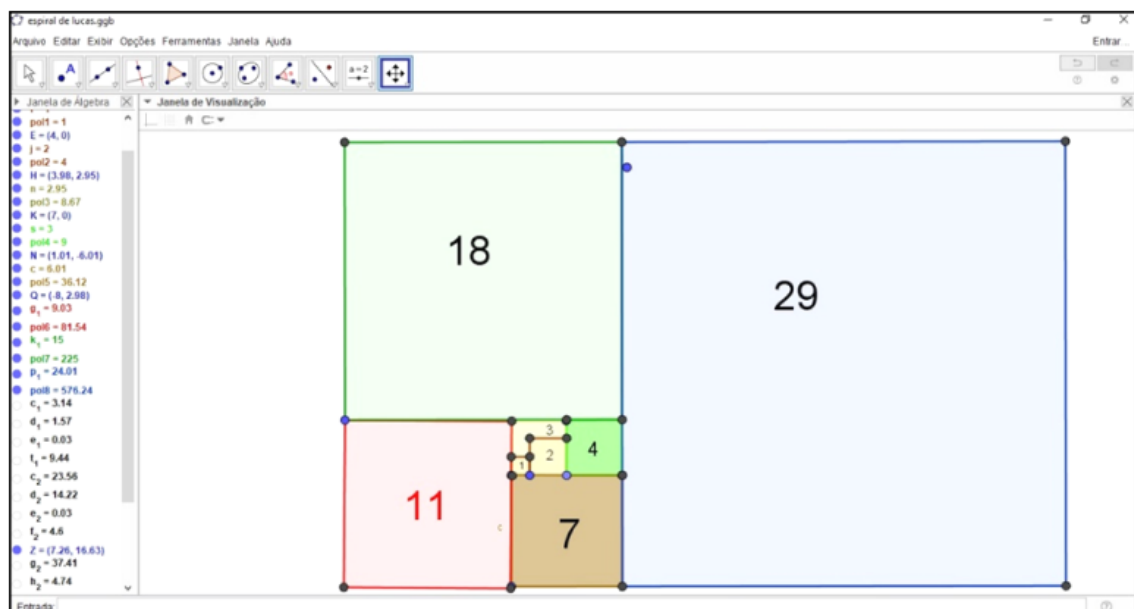


Figura 1. Termos da sequência da Lucas utilizando o GeoGebra para uma visualização 2D. Fonte: Registro do participante A2 (2021).

A partir dessa proposta, levantou-se por parte dos alunos, um questionamento sobre a construção inicial através dos quadrados de medidas 2, 1, 3. Essa questão

desencadeou uma discussão através desse conceito, pois o objetivo era trabalhar a lei de recorrência através dos valores iniciais. Em relação à proposta realizada na Figura 1, o A2 apresenta sua construção, descrevendo os passos realizados.

A2: Primeiro passo, na barra de ferramentas, opção – polígono regular, para construir um quadrado, clicamos nos dois primeiros pontos, aparecerá uma janela pedindo a informação de quantos lados terá a figura, no nosso caso serão quatro. O segundo passo é construir os quadrados utilizando a sequência de recorrência, ou seja, o próximo quadrado será a soma dos dois quadrados anteriores. Inicialmente inserindo um quadrado de comprimento lateral de 2 unidades, e outro de lateral de 1 unidade, logo o próximo quadrado será a soma das medidas dois quadrados construídos anteriormente, a terceira figura será um quadrado de lado 3 unidades. Observando que o terceiro quadrado se sobrepõe aos outros, devido a condição de existência. Utilizando a mesma estratégia anterior, obtêm-se os próximos números representados pelos quadrados.

Observamos a partir das informações que A2 mostra um conhecimento sobre a Sequência de Lucas, objetivando a razão áurea para a construção geométrica proposta, promovendo a ideia para outro conhecimento que é a construção da espiral para representar a sequência estudada. Veja o que relata o A2 sobre a espiral de Lucas.

A2: Para construir a espiral, precisa-se de alguns termos da sequência, portanto após os passos para criar pelo menos seis quadrados. A construção dessa sequência de Lucas em forma de espiral, deve -se selecionar na barra de ferramenta a opção - Arco circular, essa ferramenta constrói um arco circular a partir do centro de dois pontos, para utilizá-la é preciso primeiro clicar sobre o centro. Observa-se que, se o sentido dos cliques for anti-horário o GeoGebra construirá o menor arco definido pelos três pontos. Então, usaremos sempre esse sentido.

Após a aplicação das ferramentas, são discutidas pelos alunos e professor, algumas interpretações e sugestões para construção dessa espiral. Apresenta-se na Figura 2, a sequência em forma de espiral, lembrando que pode ser representada por infinitos termos:

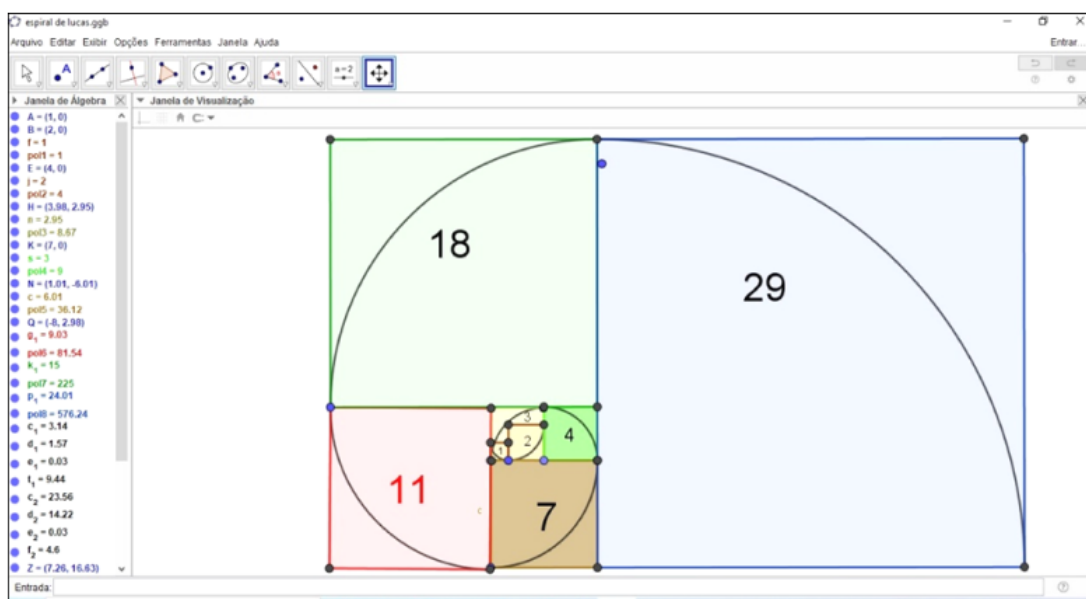


Figura 2. Representação da espiral de Lucas na visualização 2D.

Fonte: Registro do participante A2 (2021).

Outra construção explorada, no segundo encontro virtual foi a visualização 3D da sequência de Lucas no *software* GeoGebra. Observa-se sua construção por meio da construção de cubos, como mostra o A3. O participante A3 buscou determinar a construção da sequência de Lucas em forma de espiral utilizando o GeoGebra para uma visualização 3D, conforme a Figura 3 abaixo:

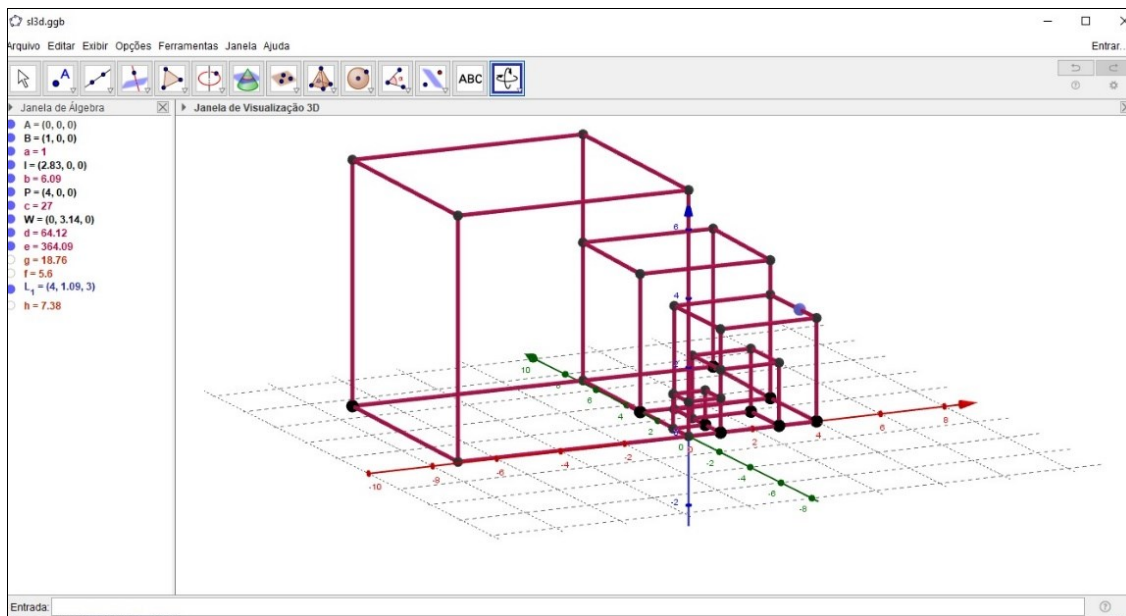


Figura 3. Construção da sequência de Lucas em uma visualização 3D.

Fonte: Registro do participante A3 (2021).

Na Figura 3, temos uma visão frontal da sequência de Lucas no GeoGebra. Assim, identifica-se a construção por meio de cubos, cujos lados são relacionados respectivamente a sequência numérica recorrente de Lucas, e que cada cubo corresponde a um termo dessa sequência. Para a criação da espiral, utiliza-se a ferramenta “Arco circuncircular”, que constrói um arco a partir de três pontos, no caso foram usados os vértices dos cubos para criação desejada.

Na Figura 4, o participante A3 determinou a construção da sequência de Lucas em forma lateral de espiral utilizando o GeoGebra para uma visualização 3D:

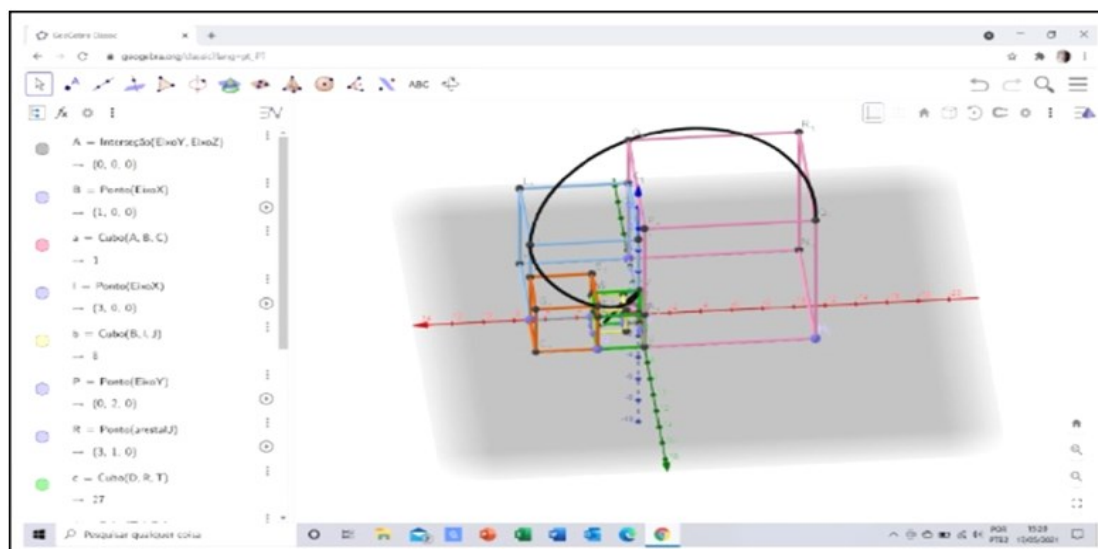


Figura 4. Representação da sequência de Lucas na lateral em 3D.

Fonte: Registro do participante A3 (2021).

Na Figura 4, rotaciona-se a figura com o comando Girar Janela visualização 3D, para uma observação de forma lateral, com um intuito de visualizar o comportamento da espiral em relação aos eixos. Na Figura 5, o A3 buscou determinar a construção da sequência de Lucas na visualização superior de espiral utilizando o GeoGebra para uma visualização 3D:

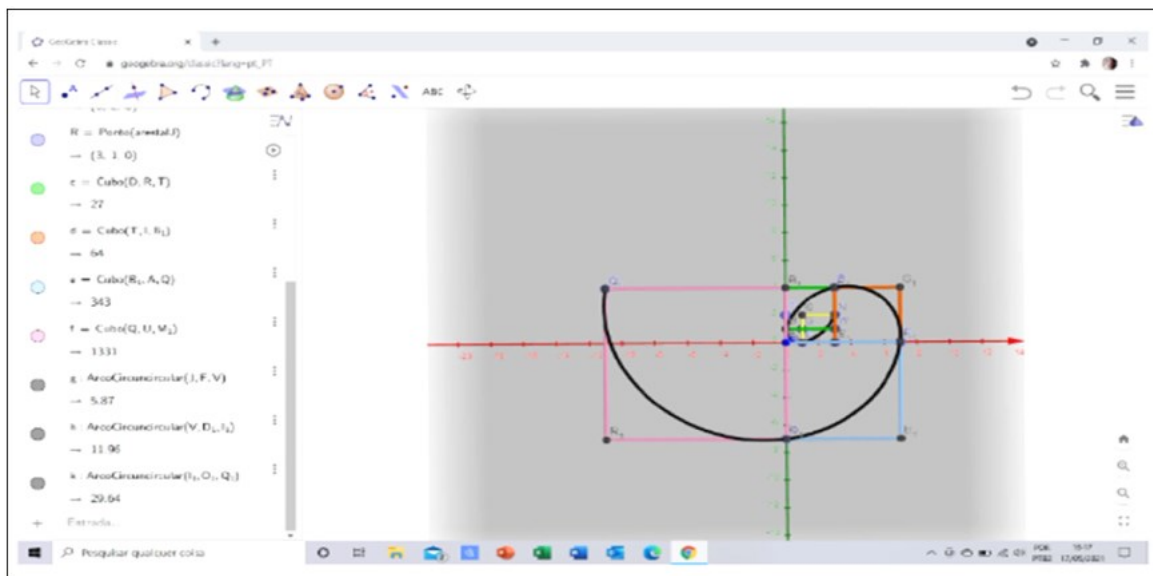


Figura 5. Visualização superior da sequência de Lucas em 3D.

Fonte: Registro do participante A3 (2021).

Na Figura 5, rotaciona-se mais uma vez para a figura girar para uma visualização superior, com um intuito de observar o comportamento da espiral em relação aos eixos. Desse modo, observa-se que a espiral continua de maneira infinita com o mesmo padrão encontrado na Sequência de Fibonacci.

Por fim, no terceiro encontro, os participantes responderam a um questionário com perguntas sobre as aplicações e suas principais dificuldades, bem como apontamentos e sugestões para melhorar a prática em relação às construções da sequência de Lucas nas visualizações 2D e 3D.

3.4. Análise a posteriori e Validação

Diante dos dados coletados, essa fase foi destinada para sua análise, a partir das informações encontradas durante a aplicação da situação-problema, em que ressaltamos alguns pontos para esta análise *a posteriori*.

Inicialmente foi solicitado aos estudantes que respondessem a um questionário inicial via *Google Forms*, com duas perguntas:

01. Você costuma utilizar/ manipular o software GeoGebra para construções?
02. De acordo com seus conhecimentos prévios, você já conhecia a sequência de Lucas?

Quadro 1. Questionário inicial proposto aos participantes.

Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

Com base nas respostas dos três participantes temos que: com relação à questão 1, os estudantes afirmaram não ter o hábito de explorar o GeoGebra, mas que conheciam o *software* e na questão 2, os participantes afirmaram de forma

unânime que não haviam estudado a sequência de Lucas durante a graduação até o presente momento. Finalizando a atividade proposta, os estudantes responderam a um segundo questionário com as perguntas:

01. Quais as suas principais dificuldades encontradas para desenvolver a situação-didática proposta?
02. O que você achou das construções das sequências de Lucas na visualização 2D e 3D?
03. Indique sugestões para melhorar a construção de outras sequências no GeoGebra na visualização em 2D e 3D.

Quadro 2. Questionário final proposto aos participantes.

Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

Na pergunta 1, a principal dificuldade apontada pelos estudantes foi realizar a transposição do material em linguagem matemática no papel para uma linguagem computacional, ou seja, a reprodução da situação no GeoGebra, pois os alunos não tinham tanta familiaridade com o *software*, gerando insegurança ao realizar alguns comandos.

Já na pergunta 2, os estudantes relataram que acharam o assunto bem intrigante, reforçando que realmente este tópico nunca havia sido estudado por eles. Os alunos afirmaram que a construção das visualizações 2D e 3D da sequência de Lucas são bem interessantes, apontando o GeoGebra como diferencial para a percepção de alguns conceitos geométricos.

Por fim, nas respostas da questão 3 foram elencadas algumas sugestões por parte dos estudantes como disponibilizar um tutorial sobre as ferramentas do GeoGebra, antes de propor a construção desse tipo de sequência e estudar as definições de sequência recorrente e linear. Estas sugestões foram encaradas de forma positiva e podem melhorar as aplicações, visando futuras formações com a mesma sequência ou outras que utilizam a mesma lei de recorrência.

Esperávamos que a construção da Sequência de Lucas por meio do GeoGebra, facilitasse a visualização dos estudantes na forma geométrica, o que ocorreu de fato. Mesmo com as dificuldades encontradas durante o processo de construção nas dimensões 2D e 3D, os alunos conseguiram resolver a situação didática proposta, compreendendo a definição da lei de recorrência dessa sequência, bem como a utilização de alguns comandos que foram utilizados no GeoGebra, sendo um momento produtivo e gerando interesse pelo assunto.

4. Considerações Finais

Esse trabalho teve como objetivo mostrar uma abordagem visual à Sequência de Lucas, promovendo sua identificação, descrição e exploração visual em formato 2D e 3D, norteadas pela Teoria das Situações Didáticas (TSD) e estruturada pela Engenharia Didática (ED), tendo o aporte do *software* GeoGebra, em que se buscou desenvolver o conhecimento sobre esta para o estudo da sua lei de recorrência.

Inicialmente foi realizado um estudo bibliográfico sobre a Sequência de Lucas, em que observamos que este assunto é pouco explorado durante a trajetória acadêmica dos licenciandos em Matemática. Assim, trouxemos uma abordagem sobre a lei de recorrência desta sequência na situação didática desenvolvida.

Na situação didática proposta a Sequência de Lucas e suas particularidades foram exploradas utilizando o GeoGebra. Nessa tarefa o discernimento do aluno na compreensão do funcionamento da lei de recorrência e seu respectivo comportamento a partir do *software* foram essenciais para seu aprendizado.

Para finalizar, houve a apresentação do material produzido pelos estudantes, durante os encontros virtuais, que validam as definições exploradas no processo matemático e epistemológico da Sequência de Lucas, verificando a construção dos conceitos utilizados durante esta pesquisa. Ao mesmo tempo, observamos também o papel imprescindível do professor durante o processo metodológico, apresentando definições importantes para o processo de ensino e de aprendizagem e incentivando a participação do aluno na construção do conhecimento.

Por fim, as dificuldades encontradas neste estudo foram a ausência da exploração ou falta de conhecimento sobre este assunto e a escassez de construções e/ou representações geométricas desta sequência. Assim, esperamos que esta pesquisa possa incentivar outros trabalhos relacionados ao estudo das diferentes sequências numéricas em Matemática.

Referências Bibliográficas

- Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba: UFPR.
- Almouloud, S. A., & Silva, M. J. (2012). Engenharia didática: evolução e diversidade. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 7(2),22-52. DOI: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p22>
- Alves, F. R. V. (2016). Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. *Educação Matemática Pesquisa*, 18(1),61-93. Recuperado em 21 de julho,2021, de <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/20879>.
- Alves, F. R. V. (2016). GeoGebra e a Transição Complexa do Cálculo – TCC: o caso da regra de L'Hôpital. *Indagatio Didactica*, 8(2),94-118. DOI: <https://doi.org/10.34624/id.v8i2.2536>.
- Alves, F. R. V. (2019). Engenharia Didática para o Ensino de Variável Complexa: Visualização de Conceitos Relacionados ao Processo Matemática de Integração. *Alexandria-Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 11(2), 3-29. DOI: <https://doi.org/10.5007/1982-5153.2018v11n2p3>.
- Alves, F. R. V., Vieira, R. P. M., Silva, J. G., & Manguiera, M. C. S. (2019). Ensino de ciências e educação matemática 3 [recurso eletrônico] Organizador Felipe Antônio Machado Fagundes Gonçalves. *Capítulo 2 - Engenharia Didática para o ensino da sequência de Padovan: um estudo da extensão para o campo dos números inteiros*. Ponta Grossa, PR: Atena Editora.
- Artigue, M., Douady, R., & Moreno, L. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica. 5, 61-96.
- Borba, M. C. (2011). Educação Matemática a Distância Online: Balanço e Perspectivas. *XIII Conferência Interameiricana de Educação Matemática*. Recife.
- Brousseau, B. A. (1965). *An introduction to Fibonacci Discovery*. The Fibonacci Association.
- Brousseau, B. A. (1967). *A Fibonacci generalization*. *The Fibonacci Quarterly*, 5 (2),171-175.

- Brousseau, B. A. (1972). *Fibonacci Numbers and Geometry*. *The Fibonacci Quarterly*, 10(3), 249-255.
- Brousseau, G. (1986). *La relation didactique: Le milieu*. Paris: Actes de la IVème Ecole d'Eté.
- Díaz-Urdaneta, S., Kalinke, M. A., & Motta, M. (2019). A Transposição Didática na elaboração de um objeto de aprendizagem no GeoGebra. *#Tear - Revista de Educação, Ciência e Tecnologia*, 8(2), 1-12. DOI: <https://doi.org/10.35819/tear.v8.n2.a3503>
- Eves, H. (1969). *An introduction to the History of Mathematics*. Third edition. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Guedes, A. M. S., & Alves, F. R. V. (2019). *Uma investigação com professores em formação inicial sobre: sequência de Lucas e os números de k-Lucas*. *Research, Society and Development*, 8(7), 1-16. DOI: <https://doi.org/10.33448/rsd-v8i7.1136>
- Hoggat, J. V. E., & Verner, E. (1969). *Fibonacci and Lucas Numbers*. Santa Clara: Fibonacci Association Publishers.
- Honsberger, R. (1976). *On a theorem of Gabriel Lamé*, *In Mathematica gems II*, The Mathematical Association of America, Washington D.C., (2), 54-57. Dolciani Mathematical Expositions.
- Miguel, A., & Brito, A. J. (1996). *A história da matemática na formação do professor de matemática*. In: Ferreira, E. S. (Org.) *Cadernos Cedes 40*. Campinas: Papirus.
- Santos, A. A., & Alves, F. R. V. (2017). A Engenharia Didática em articulação com a Teoria das Situações Didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de Matemática. *Acta Scientiae*, 19(3), 447-465. Recuperado em 21 de julho 2021, <https://core.ac.uk/download/pdf/231307184.pdf>.
- Santos, A. P., & Alves, F. R. V. (2017). A teoria das situações didáticas no ensino das Olimpíadas de Matemática: Uma aplicação do Teorema de Pitot. *Indagatio Didactica*, 9(4), 279-296. DOI: <https://doi.org/10.34624/id.v9i4.976>
- Santos, A. P., & Alves, F. R. V. (2018). O cálculo de áreas: uma aplicação da Engenharia Didática no contexto das Olimpíadas de Matemática. *Indagatio Didactica*, 10(5), 199-222. DOI: <https://doi.org/10.34624/id.v10i5.11133>.
- Silva, B. A. (2017). *Números de Fibonacci e número de Lucas*. Dissertação de Mestrado Profissional em Rede Nacional. Instituto de Ciências Matemáticas e Computação. São Paulo: Universidade de São Paulo.
- Sousa, R. T., Azevedo, I. F., & Alves, F. R. V. (2021). Transposição Didática por meio do GeoGebra como suporte ao ensino de Geometria Analítica. *Unión – Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 17(62), 1-20.

Autores:

Carla Patrícia Souza Rodrigues Pinheiro: Mestranda em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE *campus* Fortaleza. Especialista em Qualificação em Ensino de Matemática no Estado do Ceará (UFC). E-mail: carla.patricia62@aluno.ifce.edu.br

Renata Teófilo de Sousa: Mestranda em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE *campus* Fortaleza. Especialista em Ensino de Matemática (UVA), Qualificação em Ensino de Matemática no Estado do Ceará (UFC). Pós-graduada em Didática e Metodologias Ativas na aprendizagem e MBA em Gestão Escolar (UniAmérica). E-mail: rtsnaty@gmail.com

Francisco Régis Vieira Alves: Doutor em Educação pela Universidade Federal do Ceará, Bolsista de produtividade do CNPQ – PQ2. Professor permanente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do IFCE, Coordenador acadêmico do Doutorado em rede RENOEN, polo IFCE. Líder do Grupo de Pesquisa CNPQ Ensino de Ciências e Matemática. E-mail: fregis@ifce.edu.br.

Alessandra Senes Marins: Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina - UEL. Atualmente é professora adjunta do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA. E-mail: ale_marins@hotmail.com