

www.fisem.org/web/union
<http://www.revistaunion.org>

O Pensamento Geométrico no Ensino Superior e o Despertar da Imaginação

José Carlos Cifuentes, Valdeni Soliani Franco

<p>Resumen</p>	<p>Este artículo pretende mostrar didácticamente un estilo de realizar investigación en matemática y en didáctica de la matemática en el pregrado dirigido a un mejoramiento de la “formación matemática, promovido a través de la puesta en movimiento de las capacidades de imaginación, intuición y visualización en el campo de la geometría. El asunto que discutiremos para alcanzar esa finalidad es la construcción de las geometrías del plano cartesiano provisto de diversas formas de “medir distancias”. Veremos que esas geometrías pueden ser presentadas en forma “cualitativa” lo que estimula la imaginación en la medida en que sus conceptos admiten diversas “concretizaciones”.</p> <p>Palabras clave: Educación Matemática Superior, Geometrías del Plano, Imaginación Matemática.</p>
<p>Abstract</p>	<p>This paper aims to show a style of doing research in mathematics and didactics of mathematics at the undergraduate level, leading to an improvement in "mathematical training", which is promoted through the movement of the capacities of imagination, intuition and visualization in the field of geometry. The subject we will discuss in order to achieve this purpose is the construction of the geometries of the Cartesian plane, with several forms of "measuring distances". We will see that the geometries can be presented in "qualitative" form, which stimulates the imagination, as its concepts admit several "concretizations".</p> <p>Keywords: Higher Mathematics Education, Plane Geometries, Mathematical Imagination.</p>
<p>Resumo</p>	<p>Este artigo visa mostrar didaticamente um estilo de fazer pesquisa em matemática e em didática da matemática em nível de graduação conducente a um aprimoramento da “formação matemática”, aprimoramento que se promove através da movimentação das capacidades da imaginação, intuição e visualização no campo da geometria. O assunto que discutiremos para atingir essa finalidade, é o da construção das geometrias do plano cartesiano, munido de diversas formas de “medir distâncias”. Veremos que essas geometrias podem ser apresentadas em forma “qualitativa”, o que estimula a imaginação, na medida em que seus conceitos admitem diversas “concretizações”.</p> <p>Palavras-chave: Educação Matemática Superior, Geometrias do Plano, Imaginação Matemática.</p>

1. Introdução: o despertar da imaginação na formação matemática no Ensino Superior

Este artigo tem um propósito didático: mostrar um estilo de fazer pesquisa em matemática e pesquisa em didática da matemática em nível de graduação conducente a um aprimoramento na “formação matemática” dos estudantes de Licenciatura e também de Bacharelado em Matemática, aprimoramento que se promove através da movimentação das capacidades de imaginação, intuição e visualização matemáticas no campo da geometria.

Mostraremos, através de exemplos, que o ensino de matemática na Educação Superior pode ou deve partir do concreto rumo ao abstrato visando o despertar, ou melhor, a liberação da imaginação no campo da matemática. Intuição e imaginação, então, fazem parte essencial de nossa concepção de matemática, uma concepção dinâmica, que considera a matemática como atividade, como forma de pensar, que incorpora também formas de argumentação que escapam ao puramente lógico-dedutivo.

Além disso, iremos mostrar que a matemática, assim concebida, tem uma face heurística e experimental, que pode ser explorada e potencializada por meio de *softwares* dinâmicos. Esses permitem elaborar conjecturas para serem trabalhadas e possivelmente demonstradas, ou no mínimo suscitar a imaginação para construção de novos conceitos e resultados. Especificamente, para isso neste artigo, utilizaremos o *software* livre GeoGebra.

O assunto que discutiremos neste artigo, como um pretexto (embora por si importante) para atingir a nossa finalidade, é o da construção das geometrias do plano e do espaço cartesianos a partir da determinação de diversas formas de “medir distâncias”, não apenas da geometria euclidiana, entendendo esta como a geometria cartesiana que resulta da forma pitagórica de medir distâncias, sendo os pré-requisitos os seguintes: 1) geometria euclidiana plana e espacial; 2) geometria analítica elementar; 3) álgebra linear; e 4) cálculo diferencial e integral em uma variável.

Os conceitos e resultados utilizados neste artigo podem ser encontrados em qualquer referência que trate dos assuntos mencionados anteriormente como pré-requisitos, é por isso que não haverá bibliografia específica pertinente no final do artigo.

Veremos, principalmente, que as geometrias em consideração, na sua versão cartesiana, podem ser apresentadas em forma “qualitativa”, isto é, sem o recurso a coordenadas, e que é essa forma de abordagem que estimula a imaginação matemática na medida em que seus conceitos admitem diversas “concretizações” quando traduzidos à coordenadas.

Este trabalho é uma contribuição para o Grupo de Pesquisa em Ensino da Geometria – GPEG, sediado no Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática – PCM da Universidade Estadual de Maringá – UEM, e foca principalmente a formação de professores, especialmente a formação matemática do professor em formação inicial e continuada, colocando esta pesquisa no âmbito da Educação Matemática no Ensino Superior.

2. A Abordagem Vetorial para se Fazer Geometria no Plano e no Espaço Cartesiano: a norma e o produto interno como recursos teóricos para a geometria

O primeiro passo na construção da geometria analítica elementar é a definição dos “espaços de concretização” dos objetos geométricos: o plano cartesiano \mathbf{R}^2 e o espaço \mathbf{R}^3 , sendo \mathbf{R} o conjunto (corpo ordenado completo) dos números reais. E o primeiro passo importante para introduzir a linguagem vetorial na geometria analítica é considerar os pontos como vetores. As argumentações a seguir, podem ser estendidas facilmente a \mathbf{R}^n , para $n \geq 4$, porém, a visualização experimental das propriedades geométricas correspondentes, que é um dos nossos focos, pode não ser possível nesses casos.

Para $P = (x, y)$ ou $P = (x, y, z)$, um ponto de \mathbf{R}^2 ou \mathbf{R}^3 , respectivamente, define-se a chamada de **norma euclidiana de P** da seguinte forma:

$$\|P\|_2 = (x^2 + y^2)^{1/2} \text{ ou } \|P\|_2 = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2},$$

sendo que o índice 2 na norma faz referência à potência 2 e ao expoente $\frac{1}{2}$ da fórmula.

E para $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, ou $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)$, respectivamente, define-se o **produto interno usual de P e Q** da seguinte forma:

$$\langle P, Q \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 \text{ ou } \langle P, Q \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Observa-se que a norma pode ser “induzida” facilmente pelo produto interno, pois $\|P\|_2 = \langle P, P \rangle^{1/2}$, nossa primeira fórmula de caráter qualitativo, pois ela não remete diretamente à sua versão em coordenadas.

Com essas noções, é possível introduzir os conceitos geométricos básicos como distância e ângulo, da seguinte maneira.

No caso de $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, a **distância euclidiano-pitagórica** induzida, entre esses pontos (vetores) é dada por:

$$d_2(P, Q) = \|P - Q\|_2 \quad (= [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2}).$$

E o “ângulo θ ” entre esses vetores, se ambos forem não nulos, é definido através de:

$$\cos \theta = \frac{\langle P, Q \rangle}{\|P\|_2 \|Q\|_2}.$$

Devemos reparar no fato de que as definições de distância e ângulo dadas anteriormente são também apresentadas “qualitativamente”, isto é, usando apenas os conceitos de norma e de produto interno independentemente de sua forma concreta expressa em coordenadas que eles adotam, expressão colocada acima entre parênteses no caso da distância, a que podemos entender como “quantitativa”, pois através dela pode ser obtido um resultado numérico. A versão qualitativa permite diversas concretizações quantitativas, dependendo de como sejam definidas a norma e o produto interno, podendo ser eles diferentes dos usuais euclidianos.

Por outro lado, é importante reparar que usualmente (e erradamente) pensa-se que, pelo menos no contexto do ensino, só é possível medir “ângulos” num espaço vetorial se ele estiver munido de um produto interno com sua norma induzida, como feito anteriormente para o caso da geometria euclidiana no plano e no espaço cartesianos.

Neste artigo, veremos que num “espaço real normado”, especialmente o \mathbf{R}^2 como exemplo representativo, com diversas normas que podem ser distintas da norma euclidiana e não necessariamente induzidas por um produto interno, ainda é possível medir ângulos através do conceito de ‘radiano’, que analisaremos. Em particular será possível calcular o “valor de π ” nas geometrias resultantes (que, como veremos, não necessariamente será o tradicional euclidiano 3,141592...).

Gera-se, assim, o que chamaremos de “o problema da definição de ângulo entre retas (ou entre vetores) num espaço vetorial”. A discussão em profundidade desse problema, que pode ser formulado não apenas no âmbito da matemática, senão também da educação (em) matemática, visa reforçar a formação matemática conceitual na graduação (Licenciatura e Bacharelado) mostrando, através desse exemplo particular, que a intuição e imaginação matemáticas, que manifestam-se na discussão qualitativa dos conceitos, são também relevantes para a construção do conhecimento matemático. Essa discussão permite desvincular, epistemologicamente, o qualitativo do quantitativo em matemática, especialmente em geometria.

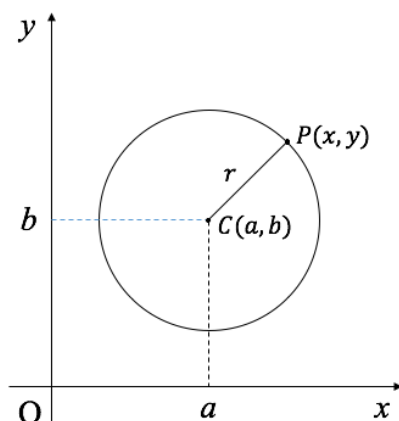
Diversos problemas interessantes serão formulados no contexto da geometria analítica desses espaços normados que podem ser abordados inicialmente em nível de Iniciação Científica e Iniciação à Docência Superior em Matemática, mas que facilmente podem alcançar níveis mais avançados, como esboçaremos no final. Esses problemas mostrarão, também, que a matemática tem, além de sua face analítica formal, uma face sintética experimental guiada pela intuição e que pode ser explorada usando recursos não formais como os da geometria dinâmica, especialmente o *software* livre GeoGebra, face que tem a virtude de aprimorar essa nossa intuição matemática no campo da geometria.

3. Alguns Conceitos Geométricos que Dependem Qualitativamente da Norma

Assim como a distância e o ângulo, há muitos outros conceitos geométricos que podem ser expressos qualitativamente usando aqueles como conceitos de base. O caso mais notório é o de circunferência no plano.

Em \mathbf{R}^2 , define-se a **circunferência euclidiana de raio r** ($r > 0$) como o lugar geométrico C_r dos pontos P do plano que estão a distância r de um ponto fixo chamado centro, cujo “formato” (ou forma gráfica) é ilustrado na figura 1, em que o centro é o ponto (a, b) . No caso do centro ser a origem $O = (0,0)$,

$$C_r = \{P/\|P\|_2 = r\}.$$

Fig. 1: Circunferência com centro em (a, b) e raio de medida r .

Fonte: autores

No Cálculo Diferencial e Integral, pode-se definir, também, o **comprimento euclidiano de arco de uma curva** γ , diferenciável por partes, cujas equações paramétricas são dadas por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, com $t \in [a, b]$, usando apenas a norma, mediante a seguinte integral, pensada intuitivamente como uma soma infinita de comprimentos infinitesimais,

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt$$

A forma qualitativa desses conceitos permitirá generaliza-los ao caso de outras normas e outros produtos internos, como será mostrado na sequência.

4. “Retrato Falado” de uma Norma num Espaço Vetorial e Concretização de Outras Normas Diferentes da Euclidiana

Para estabelecer a condição qualitativa de uma norma e de um produto interno, não podemos recorrer a suas expressões concretas (definições explícitas) usando as coordenadas, devemos procurar defini-las implicitamente através de propriedades mínimas que esses conceitos deverão satisfazer, propriedades que chamaremos de ‘axiomas’. É como construir o “retrato falado” de um conceito através do enunciado dessas propriedades mínimas, metáfora que ilustra o fato de poderem existir muitas concretizações que se adequem a esse “retrato falado”.

Começaremos pela norma. Os axiomas a seguir são motivados pelo que de fato ocorre com a norma euclidiana de \mathbf{R}^2 e de \mathbf{R}^3 .

Seja E um espaço vetorial real. Para todo $u, v \in E$ e $t \in \mathbf{R}$, definimos a **norma em E** como uma função $\| \cdot \|: E \rightarrow \mathbf{R}$ satisfazendo:

1. $\|u\| \geq 0$;
2. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;

3. $\|tu\| = |t|\|u\|$;

4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Esses axiomas determinam implicitamente uma norma no espaço E .

É claro que a restrição da norma de E a qualquer subespaço é uma norma no subespaço, em particular o será nos subespaços planos (isto é, de dimensão 2) que são os que interessam para definir ângulo entre dois vetores.

Um fenômeno muito frequente, próprio de um “retrato falado”, é que o conceito definido assim pode se concretizar de diversas maneiras, como já mencionado. Em \mathbf{R}^2 , facilmente extensível a \mathbf{R}^3 , ou a \mathbf{R}^n em geral, temos os seguintes “exemplos concretos” de normas:

Para todo $p \geq 1$ ($p \in \mathbf{R}$) e para todo $P \in \mathbf{R}^2$ com $P = (x, y)$, definem-se as **p -normas**:

$$\|P\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p};$$

as quais têm como casos particulares: para $p = 1$, a **norma soma** $\|P\|_1 = |x| + |y|$ e para $p = 2$, a **norma euclidiana** $\|P\|_2 = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Essas normas ainda podem ser mais gerais, por exemplo, pode-se ter:

$$\|P\| = (a|x|^p + b|y|^p)^{1/p}, \text{ com } a > 0 \text{ e } b > 0.$$

A partir daí, pode-se explicitar diversas “formas concretas” do conceito de ‘circunferência’ (ou formatos de circunferências) a respeito dessas normas como ilustramos a seguir, substituindo na definição de C_r dada anteriormente, a norma euclidiana pela p -norma em consideração.

Ao utilizar o GeoGebra 3D, pode-se obter a norma $\|P\|_p$ como função de p , representando-a graficamente por meio da seguinte construção tridimensional:

- Constrói-se inicialmente, um controle deslizante para p , por exemplo, com mínimo 1 e máximo 25, com incremento 1.
- Na janela de entrada coloca-se a função nas variáveis x e y ,

$$a(x, y) = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}.$$

Nas figuras 2, 3 e 4 a seguir, temos alguns representantes da função $z = a(x, y)$ para variações de p . Cada gráfico pode ser considerado como um “cone” na geometria correspondente.

Em geral, a p -circunferência (ou circunferência em relação à p -norma) de raio r com centro na origem, tem como equação cartesiana $|x|^p + |y|^p = r^p$. Para obter essas circunferências no GeoGebra 3D, toma-se planos paralelos ao plano coordenado xOy , ou seja, planos $z = k$. Este k , é na verdade, a medida do raio r . Nas figuras 2, 3 e 4, temos também representantes dessas circunferências em três normas distintas, a 1-norma, a 2-norma (a euclidiana) e a 5-norma, quando se faz a interseção dos gráficos estabelecidos na descrição anterior, no GeoGebra 3D, com o plano $z = 2$, por exemplo.

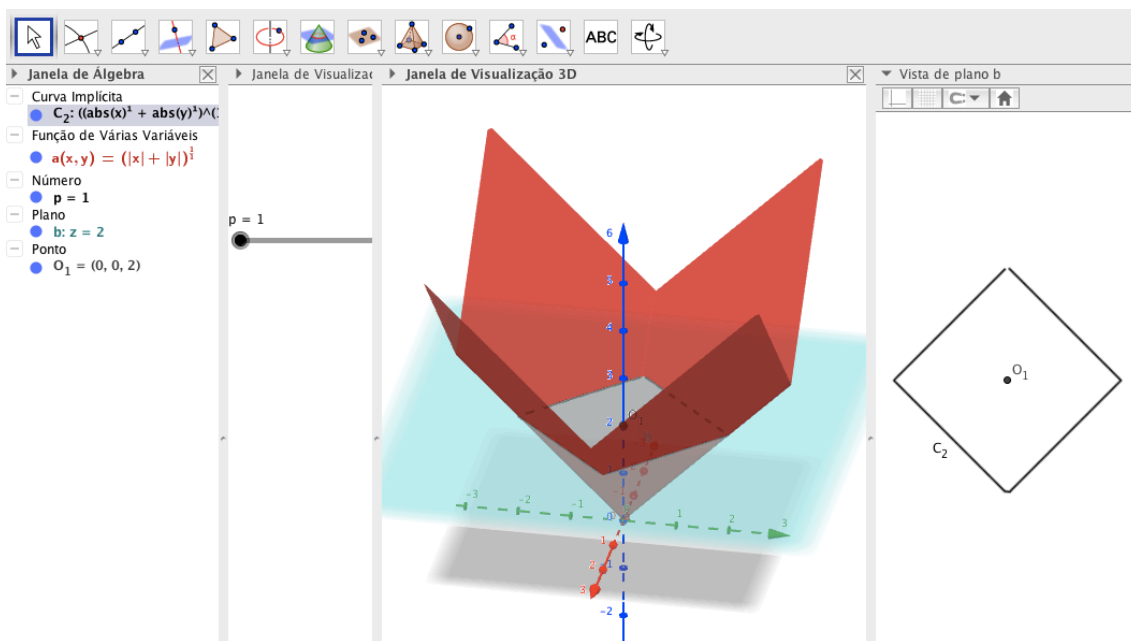


Fig. 2: Circunferência de raio de medida 2 e centro em O_1 , na 1-norma.
Fonte: autores

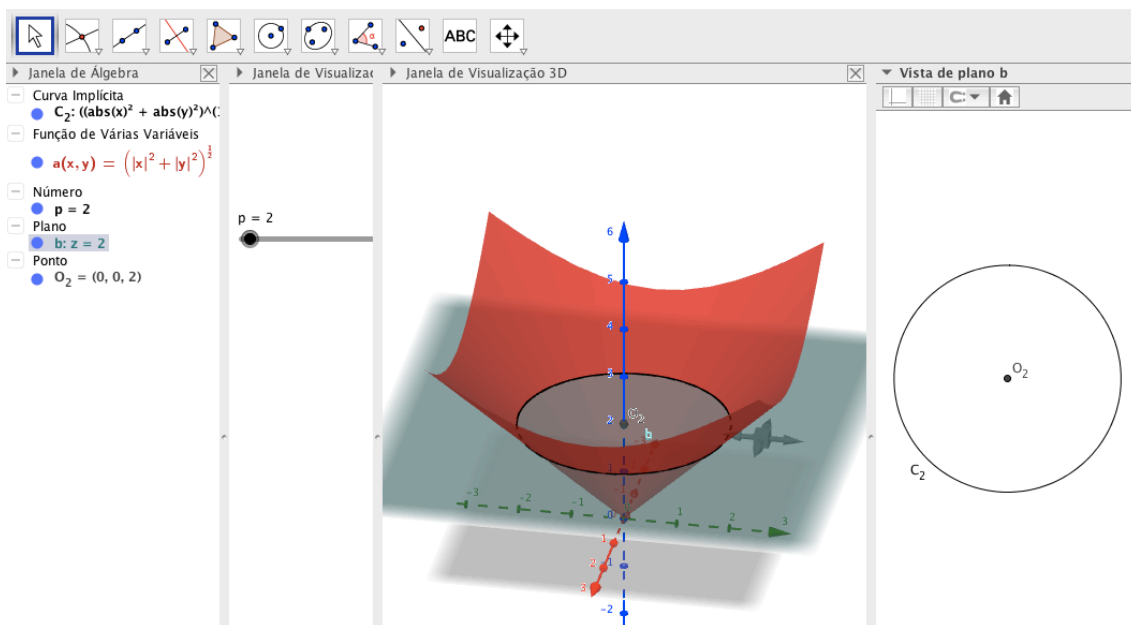


Fig. 3: Circunferência de raio de medida 2 e centro em O_2 , na 2-norma.
Fonte: autores

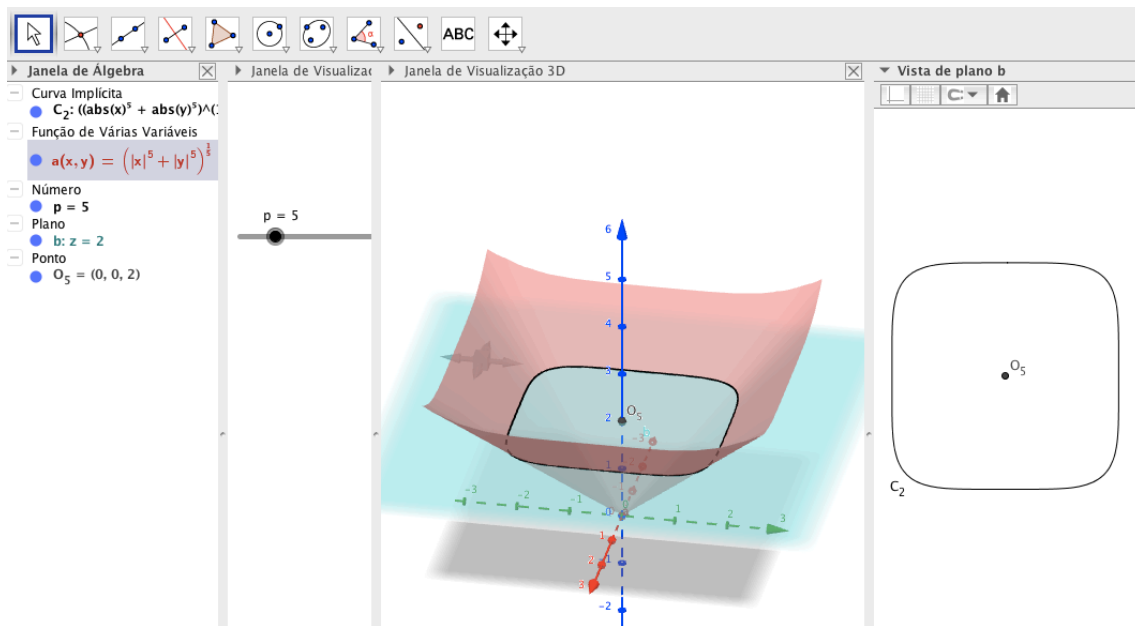


Fig. 4: Circunferência de raio de medida 2 e centro em O_5 , na 5-norma.
Fonte: autores

5. “Retrato Falado” de um Produto Interno num Espaço Vetorial e Concretização de Outros Produtos Internos Diferentes do Usual

Um **produto interno** num espaço vetorial real E é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$ tal que para todo $u, v, w \in E$ e para todo $r, s \in \mathbf{R}$,

1. $\langle u, v \rangle \geq 0$,
2. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$,
3. $\langle ru + sv, w \rangle = r\langle u, w \rangle + s\langle v, w \rangle$,
4. $\langle u, rv + sw \rangle = r\langle u, v \rangle + s\langle u, w \rangle$.

Esses axiomas, motivados também pelo que acontece com o produto interno usual de \mathbf{R}^n , determinam qualitativamente um produto interno no espaço E .

A partir daí, define-se a norma induzida pelo produto interno mediante $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$, e demonstra-se que satisfaz os axiomas de uma norma. Demonstra-se, também (o que não será feito aqui, porém daremos um indício informal mais adiante), que dentre as p -normas, somente a norma euclidiana pode ser definida a partir de um produto interno e é o usual.

Como no caso das normas, pode-se ter diversas concretizações de um produto interno no espaço E . No espaço \mathbf{R}^2 , se $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ temos os seguintes:

$$\langle P, Q \rangle = ax_1x_2 + by_1y_2, \text{ onde } a > 0 \text{ e } b > 0.$$

As normas induzidas por eles são: para $P = (x, y)$, $\|P\| = (ax^2 + by^2)^{\frac{1}{2}}$.

No desenvolvimento da teoria qualitativa das normas em espaços vetoriais, prova-se, usando apenas os axiomas correspondentes, que todo produto interno satisfaz a chamada ‘desigualdade de Schwarz’:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

É esta desigualdade que permite definir ‘ângulo’ entre os vetores u e v quando eles são não-nulos, pois nesse caso teremos que:

$$\left| \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \right| \leq 1,$$

donde segue que existe um número real θ tal que:

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}.$$

Esse número θ será interpretado como o “ângulo entre os vetores u e v ” na geometria gerada por esse produto interno.

Em geral, se $\| \cdot \|$ é uma norma em \mathbf{R}^2 induzida por um produto interno, e e_1 e e_2 são vetores de uma base de \mathbf{R}^2 , isto é, vetores não nulos e não paralelos, então, para todo $P \in \mathbf{R}^2$ existirão $x, y \in \mathbf{R}$ tais que $P = xe_1 + ye_2$, portanto, usando as propriedades elementares do produto interno, a norma induzida adota a seguinte forma:

$$\|P\| = \langle xe_1 + ye_2, xe_1 + ye_2 \rangle^{1/2} = (\|e_1\|^2 x^2 + 2\langle e_1, e_2 \rangle xy + \|e_2\|^2 y^2)^{1/2},$$

isto é, $\|P\| = (ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1/2}$ com $a > 0$, $c > 0$ e, devido à desigualdade de Schwarz e ao fato dos vetores da base não serem paralelos, $b^2 < ac$.

Essa expressão para a norma de P já dá um indício de que dentre as p -normas, somente a norma euclidiana pode ser definida a partir de um produto interno e é o usual.

Ao utilizar o GeoGebra 3D, pode-se obter a norma $\|P\|$ como função de a , b e c , representando-a graficamente por meio da seguinte construção:

- Constrói-se inicialmente, três controles deslizantes para a , b e c , por exemplo, com mínimo 1 e máximo 10, com incremento 1, para a e c e com mínimo -5 e máximo 5 , também com incremento 1 para b .
- Na janela de entrada coloca-se a função nas variáveis x e y , $f(x, y) = (ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1/2}$.

A figura 3 mostra o cone correspondente ao produto interno usual, enquanto que a parte esquerda da figura 6 a seguir mostra essa construção, com diferentes valores para a , b e c , resultando num cone elíptico.

Nessa geometria, a equação da “circunferência” de raio r centrada na origem é dada por $ax^2 + 2bxy + cy^2 = r^2$, para os diferentes valores de a , b e c , e que podem ser obtidas, por meio da interseção com planos $z = r$, cujo formato que “vemos”, depende dos valores atribuídos aos coeficientes. Na parte direita das figuras 5 e 6 a seguir, apesar de “vermos” diferentes formatos, devemos “imaginar” que são “circunferências” para as diferentes normas. “Vemos” uma elipse, mas “imaginamos” uma circunferência!

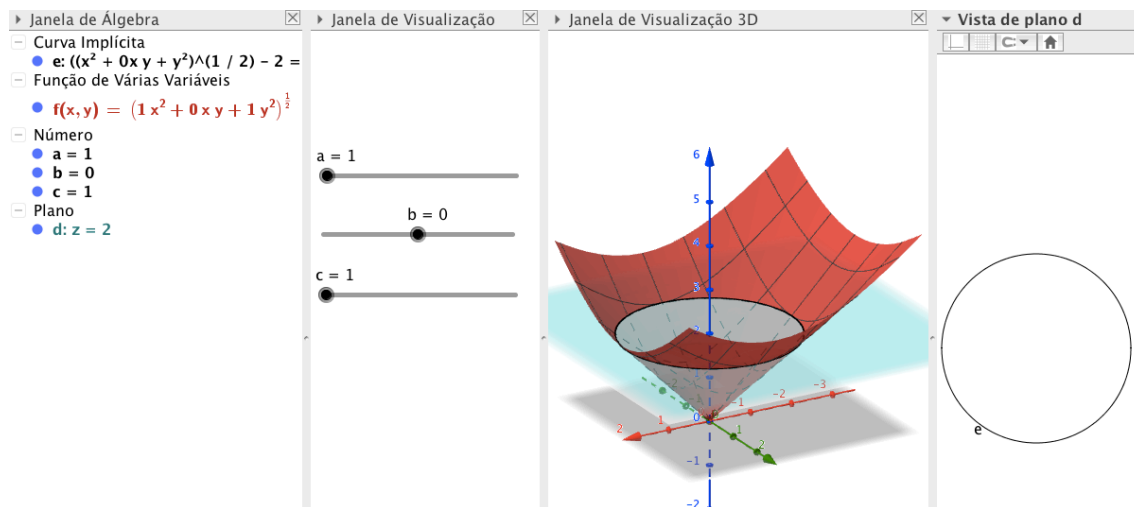


Fig. 5: Circunferência obtida por meio da norma proveniente do produto interno usual.
Fonte: autores

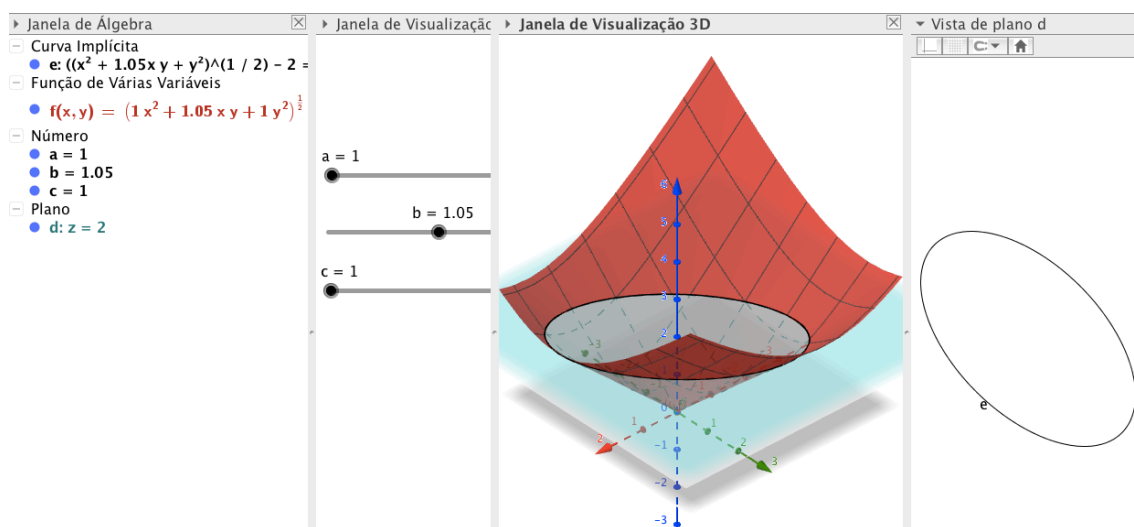


Fig. 6: “Circunferência” obtida por meio da norma proveniente de um outro produto interno.
Fonte: autores

6. Definição Tradicional de Ângulo na Geometria Euclidiana: a “propriedade angular” e o conceito de “radiano”

Em geometria euclidiana plana, para se chegar ao conceito de ângulo entre duas retas (ou entre dois vetores), com sua medida dada em radianos, demonstra-se primeiro que:

dadas duas retas concorrentes, se C_1 e C_2 são duas circunferências com centro no ponto de interseção das retas e raios que medem r_1 e

r_2 respectivamente, e se s_1 e s_2 são os comprimentos dos respectivos arcos menores formados com as retas dadas, então, $\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2}$.

Esta propriedade pode ser observada experimentalmente no GeoGebra, construindo inicialmente duas retas concorrentes, um controle deslizante para o comprimento do raio r , que pode variar, por exemplo de 1 até 3 e com incrementos de uma unidade. Na sequência, constrói-se uma circunferência com centro no ponto de interseção das retas e raio de medida r . Utilizando as interseções das retas com a circunferência, escolhe-se um dos arcos menores obtidos para fazer o teste da propriedade. Ao construir o arco escolhido, o GeoGebra mostrará na janela de álgebra o seu comprimento s_r . Utilizando a janela de entrada, chame, por exemplo, de α_r o valor do quociente $\frac{s_r}{r}$. Variando o controle deslizante, observe que o valor do ângulo não se altera.

Chamaremos de **propriedade angular** esse enunciado. Portanto, esse valor constante e sem dimensões, que então não depende da circunferência, mas só das retas concorrentes, é considerado como a “definição do valor, em radianos, do ângulo de interseção entre essas retas”.

A figura a seguir mostra a representação para dois raios diferentes de circunferências com centro na interseção das retas. Observe, na janela de álgebra, que mesmo com a variação dos valores de r e de s_r , o valor do ângulo $\alpha_r = 0,86$ não se altera.

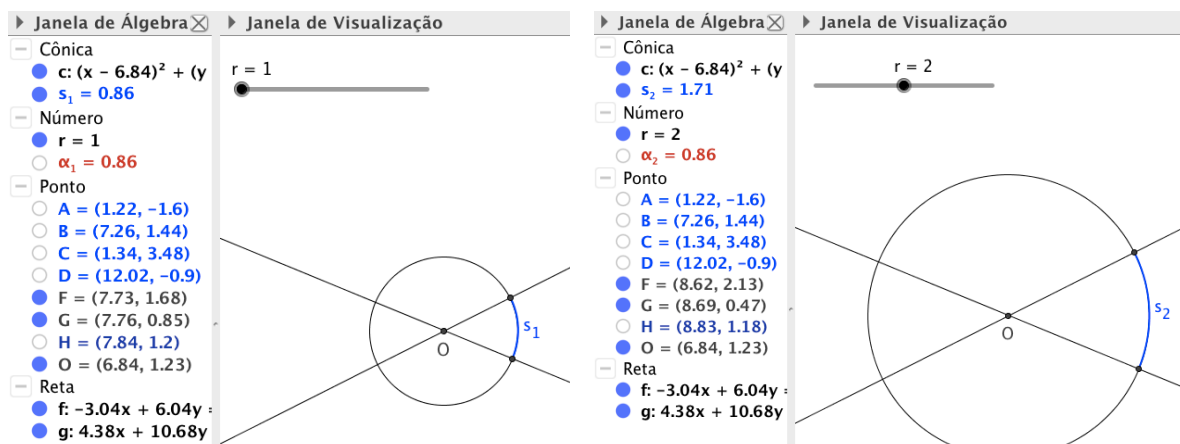


Fig. 7: Medida de um ângulo, obtido pelo quociente do comprimento do arco e o raio de duas circunferências com medidas 1 e 2.
Fonte: autores

Esta propriedade permite, portanto, definir “ π ” como sendo o quociente entre o comprimento C de uma circunferência qualquer e a medida do seu diâmetro D , isto é, duas vezes a medida do raio, ou seja: $\pi = C/D$. Destaca-se que esta é uma definição qualitativa e não quantitativa de π .

A pergunta natural que surge aqui é: quais as normas no plano que satisfazem a propriedade angular para suas “circunferências” e qual a concretização numérica de π nesses casos?

Consideremos, primeiro, o caso de uma norma induzida por um produto interno, que será então da forma $\|P\| = (ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1/2}$, com $a > 0$, $c > 0$ e $b^2 < ac$. Suporemos inicialmente $b = 0$, isto é $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ para a base subjacente, o que significa a ortogonalidade dos vetores dessa base a respeito do produto interno dado. Nesse caso, a “circunferência” de centro na origem e raio r , em relação a norma induzida, tem como equação cartesiana $ax^2 + cy^2 = r^2$ com $a > 0$ e $c > 0$.

Essa “circunferência”, que tem uma representação geométrica com o formato de uma elipse, ao fazer variações nos coeficientes, como nas figuras 5 e 6, pode ser parametrizada da seguinte maneira:

$$\gamma(t) = \left(\left(\frac{r}{\sqrt{a}} \right) \cos t, \left(\frac{r}{\sqrt{c}} \right) \sen t \right), t \in [0, 2\pi].$$

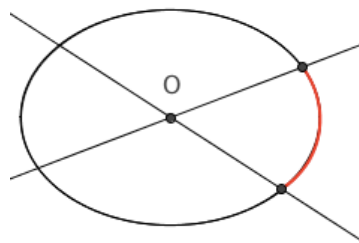


Fig. 8: “Circunferência” em que a norma induzida tem como equação cartesiana $x^2 + 2y^2 = 4$, realizada no GeoGebra.
 Fonte: autores

Na geometria do plano \mathbf{R}^2 munido desse produto interno, será possível definir ângulo entre duas retas, se demonstrarmos a correspondente propriedade angular, isto é, se demonstrarmos que o quociente entre o comprimento de um arco em relação à medida do raio, nas circunferências indicadas, é constante.

No caso da parametrização de um arco da elipse no intervalo $[\alpha, \beta]$ temos:

$$L(\gamma) = r \int_{\alpha}^{\beta} (\sen^2 t + \cos^2 t)^{1/2} dt = r(\beta - \alpha).$$

Portanto,

$$\frac{L(\gamma)}{r} = \beta - \alpha,$$

que é constante e coincide com o ângulo euclidiano formado pelas retas que passam pelo centro da elipse e que tem como vetor diretor, respectivamente, $\gamma(\alpha)$ e $\gamma(\beta)$.

Nessa geometria, o valor de π , definido como o quociente do comprimento da “circunferência” C pela medida do seu diâmetro D , é o mesmo que no caso euclidiano!

Exercício: Demonstrar que o mesmo acontece no caso em que $b \neq 0$.

Podemos concluir que, no caso de uma norma induzida por um produto interno, o ângulo definido através do produto interno coincide com o ângulo definido a partir da constatação da propriedade angular correspondente.

6.1 A Propriedade Angular no Plano com as p -normas

A norma $\|P\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$, com $P = (x, y)$ e para $p \neq 2$, é um típico caso de uma norma que não pode ser induzida por um produto interno. Isso significa que não será possível definir ângulo entre vetores como se faz num espaço de produto interno. No entanto, é um bom exemplo para testar a proposta de definir ângulo a partir da constatação da propriedade angular.

Para essa norma, a p -circunferência com centro na origem e raio de medida r é dado por:

$$C_r = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / |x|^p + |y|^p = r^p\} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / \left|\frac{x}{r}\right|^p + \left|\frac{y}{r}\right|^p = 1\}.$$

Observa-se que essa circunferência é simétrica em relação aos eixos x e y . Portanto, no intuito de calcular o valor de π para essa norma como sendo o comprimento da circunferência dividida por $2r$, o que denotaremos por π_p , basta usar o arco correspondente ao primeiro quadrante.

O cálculo desse comprimento pode ser feito mediante a fórmula integral do cálculo do comprimento euclidiano de uma curva parametrizada, substituindo apenas a norma clássica pela p -norma.

Uma parametrização desse “arco de circunferência” pode ser feita a partir de sua própria equação cartesiana, a que é dada por:

$$y = (r^p - x^p)^{1/p}, \text{ com } x \in [0, r],$$

obtendo, então,

$$\gamma(t) = (t, (r^p - t^p)^{1/p}), t \in [0, r],$$

e assim,

$$\gamma'(t) = \left(1, -(r^p - t^p)^{\frac{1-p}{p}} t^{p-1}\right).$$

Utilizando esta parametrização, o comprimento da circunferência é dado por:

$$4L(\gamma) = \int_0^r \|\gamma'(t)\|_p dt = \int_0^r \left(1 + \left(\frac{t^p}{r^p - t^p}\right)^{p-1}\right)^{1/p} dt,$$

resultando $\pi_p = \pi_p(r) = 4L(\gamma)/2r = 2L(\gamma)/r$, isto é,

$$\pi_p(r) = \left(\frac{2}{r}\right) \int_0^r \left(1 + \left(\frac{t^p}{r^p - t^p}\right)^{p-1}\right)^{1/p} dt.$$

Resta verificar que $\pi_p(r)$ não depende de r , e para tanto basta verificar que $\pi_p(r) = \pi_p(1)$, o que pode ser feito, sem calcular a integral, mediante a substituição $u = 1/r$.

Concluimos que,

$$\pi_p = \pi_p(1) = 2 \int_0^1 \left(1 + \left(\frac{t^p}{1-t^p} \right)^{p-1} \right)^{1/p} dt.$$

Não podemos calcular analiticamente essa integral, no caso geral. De fato, ela é imprópria em $t = 1$. Mas, em alguns casos particulares é possível esse cálculo. Por exemplo, para $p = 1$ temos $\pi_1 = 4$ (!!), e para $p = 2$ temos $\pi_2 = \pi$ (caso euclidiano).

Colocando na janela de entrada do GeoGebra, a integral, chamando este valor de b , criando um ponto $A = (p, b)$ e ativando o seu rastro, quando p varia, por meio de um controle deslizante é possível verificar, os valores calculados anteriormente para π_1 e π_2 , além de poder fazer conjecturas, por meio da exploração deste gráfico, obtido desta forma, apresentado na figura 9, a seguir.

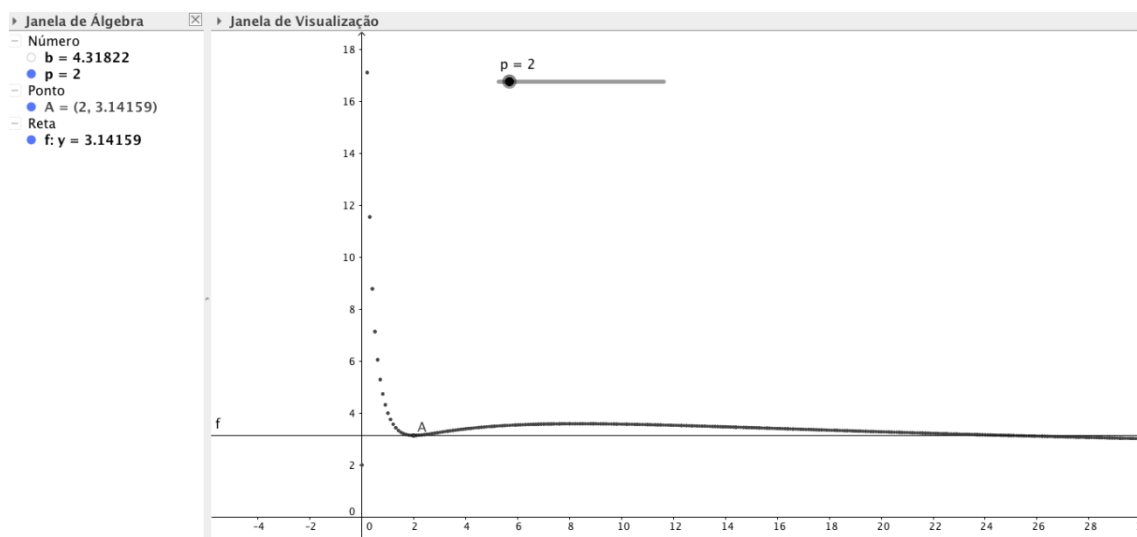


Fig. 9: Estimativa do valor de π_p para $p \geq 1$.

Fonte: autores

Observe que em $p = 2$, mostrado no gráfico anterior, o valor da segunda coordenada de A (que pode ser observada na janela algébrica), é o valor de π com cinco casas decimais. Note também que o ponto A , deslizante, em destaque, tem um mínimo local, mas não é global, pois em $p = 30$, o gráfico mostra-se abaixo da reta $x = \pi$. Pode-se conjecturar, que este gráfico tende a 2, quando p tende ao infinito. Ainda, neste gráfico observa-se que em $p = 1$, tem-se o valor 4, como obtido algebricamente. O gráfico da figura 9, mostra também a tendência da norma, para valores entre 0 e 1. Nota-se ainda, que existe um provável máximo local, por volta da 8,3-norma, no qual o valor de π fica em torno de 3,59033, com cinco casas decimais. Todas estas observações experimentais serão motivo de análise e estudo para outro artigo, utilizando, inclusive, outros softwares como, por exemplo, o Matlab. Agradecemos ao Prof. Dr. Saulo Pomponet Oliveira (UFPR) quem nos

chamou a atenção para as potencialidades desses outros *softwares* e inclusive corroborou com eles algumas de nossas conjecturas.

Uma outra parametrização da p -circunferência em consideração pode ser feita imitando o caso da circunferência euclidiana: a partir de $\left(\frac{x}{r}\right)^p + \left(\frac{y}{r}\right)^p = 1$ correspondente ao primeiro quadrante, podemos definir, para $t \in [0, \pi/2]$,

$$\gamma(t) = (r \cos^{2/p} t, r \sin^{2/p} t),$$

donde,

$$\|\gamma'(t)\|_p = \left(\frac{2r}{p}\right) (\cos^{2-p} t \sin^p t + \sin^{2-p} t \cos^p t)^{1/p},$$

resultando, então,

$$\pi_p = \left(\frac{4}{p}\right) \int_0^{\pi/2} (\cos^{2-p} t \sin^p t + \sin^{2-p} t \cos^p t)^{1/p} dt.$$

Note que a parametrização da curva γ dada anteriormente pode ser considerada como uma espécie de coordenadas polares na p -norma.

Exercício: Demonstrar que as duas versões para o cálculo do valor de π_p coincidem e fazer um estudo comparativo do comportamento gráfico dessas parametrizações.

7. Resultados “Qualitativos” que Aproximam a Geometria de um Espaço Normado, com a Propriedade Angular, da Geometria Euclidiana

Na geometria do plano munido de uma norma qualquer, os conceitos de ‘reta’ e de ‘segmento de reta’ que adotaremos aqui serão os mesmos que os da geometria analítica euclidiana, isto é, no caso do plano, o lugar geométrico dos pontos que satisfazem uma equação do 1º grau em x e y , ou melhor, uma equação da forma $y - y_0 = m(x - x_0)$, onde m é uma constante.

Isto pode ser justificado da seguinte maneira: se tomamos um ponto fixo (x_0, y_0) e outro variável (x, y) da suposta “reta”, então, para que a inclinação em relação ao eixo x , na norma considerada seja constante, devemos ter que:

$$\frac{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|}{\|(x, y_0) - (x_0, y_0)\|} = \text{constante},$$

e assim,

$$\frac{|y - y_0| \|(0, 1)\|}{|x - x_0| \|(1, 0)\|} = \text{constante}.$$

Esse argumento é válido, devido ao fato que a norma é invariante por translações e, portanto, preserva distâncias. A relação encontrada fornece, então, uma equação do 1º grau para a equação da reta chamando de m a constante $\frac{y - y_0}{x - x_0}$.

No caso de um segmento de reta que une os pontos P e Q , temos suas equações paramétricas dadas por: $\gamma(t) = P + t(Q - P)$ com $t \in [0, 1]$. Nesse caso, é fácil ver que, se $\|\cdot\|$ é uma norma qualquer, então, o comprimento desse segmento, usando a fórmula do comprimento de arco, é $L(\gamma) = \|Q - P\| = d(P, Q)$, sendo d a distância correspondente a essa norma.

Portanto, a menor distância entre dois pontos é ainda o segmento que os une, embora, em muitos casos, podem haver muitos caminhos de distância mínima, como mostra facilmente a figura 10.

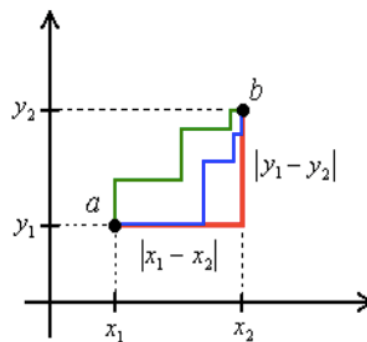


Fig. 10: Percursos de distância mínima na 1-norma
 Fonte: autores

Por outro lado, observe que se uma norma N satisfaz a propriedade angular, então, é possível, em geral e como já indicado, definir $\pi_N = C/D = C/2r$, em que C é o comprimento de uma circunferência qualquer, em relação a essa norma, e D seu respectivo diâmetro, donde teremos que o comprimento da circunferência de raio r será dado por $C = 2\pi_N r$, igual em forma ao caso euclidiano.

Um outro resultado positivo curioso é o seguinte: consideremos a circunferência euclidiana com centro na origem e raio r , isto é, $C_r = \{(x, y) / x^2 + y^2 = r^2\}$, e calculemos seu comprimento C em relação a norma $\|\cdot\|_p$.

Observa-se que essa circunferência é simétrica em relação aos eixos x e y . Portanto, para calcular C basta usar o arco correspondente ao primeiro quadrante e multiplicar por 4. Nesse caso, usando a parametrização:

$$\gamma(t) = r(\cos t, \sin t), t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

obtemos,

$$L(\gamma) = r \int_0^{\pi/2} (\cos^p t + \sin^p t)^{1/p} dt,$$

e assim,

$$C = 4r \int_0^{\pi/2} (\cos^p t + \sin^p t)^{1/p} dt.$$

No caso específico de $p = 1$, obtemos $C = 8r$, isto é, $C = 2\pi_1 r$ pois $\pi_1 = 4$ como vimos, e para $p = 2$, obtemos $C = 2\pi r = 2\pi_2 r$ como no caso euclidiano. Isto é, o

comprimento da circunferência euclidiana na 1-norma e na 2-norma é o mesmo que o da circunferência própria do espaço correspondente a essa norma.

Problema: Será que para p qualquer, $C = 2\pi pr$, sendo C o comprimento da circunferência euclidiana na p -norma?

7.1 A Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo

No que segue, faremos uso da propriedade de uma norma ser invariante por translações (já usado na seção anterior) para obtermos diversos resultados na geometria do plano munido com esta norma. Por exemplo, “um ângulo transladado paralelamente mantém sua medida (em radianos)”. Também, a propriedade da norma de que $\| -u \| = \| u \|$ implicará que “ângulos opostos pelo vértice tem mesma medida”.

Com essas duas propriedades é possível resolver o seguinte exercício.

Exercício: Na geometria do plano munido de uma norma N que satisfaz a propriedade angular, provar que uma reta que passa pelo centro de uma “circunferência” qualquer, divide o plano em dois ângulos iguais, sendo, portanto, a medida de cada um igual a π_N .

Disso segue que podemos obter a seguinte propriedade surpreendente.

No caso de um espaço normado com a propriedade angular, vimos que é possível definir ângulo entre duas retas, logo, é possível também calcular a soma dos ângulos internos de um triângulo, formado sempre por segmentos de reta.

O surpreendente que pode ser verificado, transladando cada ângulo α , β e γ do triângulo à origem, o que não altera sua medida em radianos, é que essa soma é sempre igual ao valor de π_N correspondente a essa norma! Isto é,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi_N.$$

Esse fato tem profundas consequências epistemológicas: será que a geometria subjacente a essa norma N é a euclidiana apesar de que o valor de π_N correspondente não seja o euclidiano?

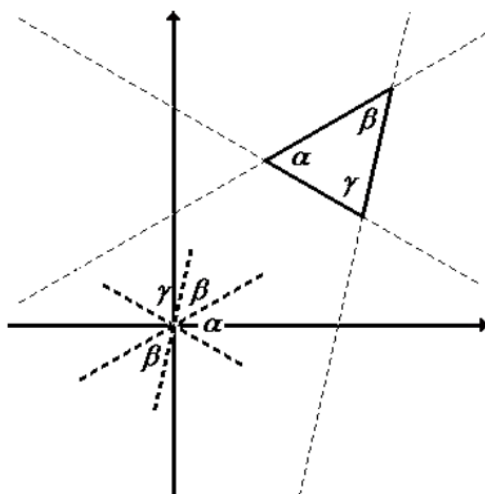


Fig. 11: Soma dos ângulos internos de um triângulo.
Fonte: autores

Esse exemplo, e muitos outros, mostra que as propriedades que estimulam a imaginação em geometria são as que dependem do conhecimento qualitativo dos conceitos e não de suas concretizações! A esse conhecimento temos acesso através da lógica, mas também, notoriamente, através da experiência matemática guiada pela intuição e potencializada com os recursos tecnológicos digitais modernos como os que a geometria dinâmica nos fornece.

8. Resultados que Afastam a Geometria de um Espaço Normado, com a Propriedade Angular, da Geometria Euclidiana: a face heurístico-experimental da geometria

Com técnicas de geometria dinâmica podem ser testados alguns resultados da geometria euclidiana usando diversas normas, reforçando a potencialidade dessa técnica para fazer “experimentos” e formular conjecturas em geometria.

A seguir, proporemos dois problemas que mostram que a geometria do plano com a p -norma, para diversos valores de p , é diferente da do caso euclidiano. Os problemas serão formulados para p arbitrário, mas resolvidos analiticamente para a norma soma, isto é, para $p = 1$, mostrando o caminho para p qualquer, o que pode ser testado com o recurso do GeoGebra.

Começaremos calculando o valor, em radianos, de um ângulo θ no primeiro quadrante do plano. Consideremos, então, a 1-circunferência de raio r centrada na origem $O = (0, 0)$ no plano cartesiano, e a semirreta que parte de O e corta a 1-circunferência no ponto $P = (x, y)$ do primeiro quadrante. Chamemos de θ o ângulo $PÔQ$, onde $Q = (r, 0)$. Então,

$$\theta = \frac{\|(x, y) - (r, 0)\|_1}{r},$$

resultando $\theta = 2 - \frac{2x}{r}$, em que $x > 0$, $y > 0$ e $x + y = r$.

Aparentemente o ângulo θ depende de r contradizendo a propriedade angular, no entanto, se calcularmos a declividade m do segmento OP obteremos que $\frac{x}{r} = \frac{1}{m+1}$, donde $\theta = 2 - \frac{2}{m+1} = \frac{2m}{m+1}$, dependendo só de m , isto é, do ângulo dado pela declividade da reta, e não do raio.

Esse argumento será usado várias vezes para resolver os problemas propostos a seguir exemplificando-os na 1-norma.

Problema A: Em geral, para diversos valores de p , dado um triângulo inscrito num “círculo” com um de seus lados um diâmetro dele, o ângulo no vértice oposto nem sempre é $\pi_p/2$ (o que sim é verdade no caso euclidiano $p = 2$). Qual a diferença desse valor para p qualquer?.

Vejamos o caso $p = 1$. Consideremos a 1-circunferência de centro $O = (0, 0)$ e raio r no plano cartesiano, e trazemos a semirreta que parte de $R = (-r, 0)$ e corta essa 1-circunferência no ponto $P = (x, y)$ no primeiro quadrante. Chamemos, ainda, de Q o ponto $(r, 0)$, e consideremos o triângulo RPQ . Chamando de θ o ângulo no vértice P , α o ângulo no vértice Q e β o ângulo no vértice R , temos que $\theta + \alpha + \beta = \pi_1 = 4$, donde $\theta = 4 - (\alpha + \beta)$. Transladando os ângulos α e β à origem, facilmente podem ser calculados seus valores em radianos, resultando $\alpha = 1$ e $\beta = 1 - \frac{x}{r}$, donde $\theta = 2 - \frac{x}{r} = \frac{\pi_1}{2} - \frac{x}{r}$. Observa-se que θ aproxima-se de $\frac{\pi_1}{2}$ quando x aproxima-se de zero.

A figura seguinte dá um contraexemplo para o problema A, feito por meio do GeoGebra, e é possível, nesse caso, variar o ponto $P = (x, y)$, obtendo diversos valores para o ângulo θ , o que mostra, a diferença com o valor de $\frac{\pi_1}{2} = 2$.

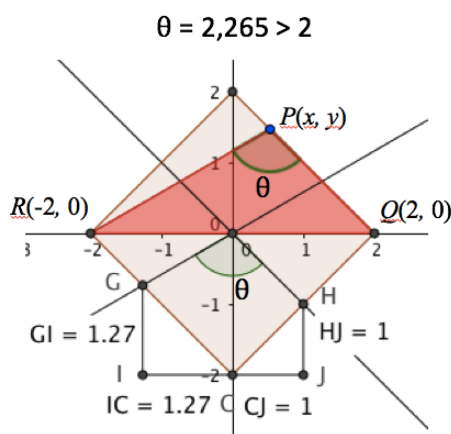


Fig. 12: Contra-exemplo para o problema A e para $r = 2$ na 1-norma.

Fonte: autores

Problema B: Também, para diversos valores de p , os ângulos na base de um triângulo isósceles nem sempre são iguais.

Vejamos novamente o caso $p = 1$. Consideremos a 1-circunferência com centro na origem e raio r e a semirreta que parte da origem e corta essa 1-circunferência no ponto $P = (x, y)$ do primeiro quadrante. Consideremos o triângulo POQ onde Q é o ponto $(r, 0)$. Como os segmentos OP e OQ são iguais na 1-norma, esse triângulo é isósceles. Chamando de α o ângulo em Q , β o ângulo em P e θ o ângulo em O , mostraremos que $\beta \neq \alpha$. Já vimos que $\alpha = 1$ e $\theta = 2 - \frac{2x}{r}$, logo, sabendo que $\alpha + \beta + \theta = \pi_1 = 4$, obtemos que $\beta = 1 + \frac{2x}{r} \geq \alpha$ e, portanto, $\beta > \alpha$ se $x > 0$.

Exercício: Fazer uma análise análoga com o GeoGebra, para o problema B, para $p = 1$.

Observação Final

Como pudemos apreciar, a matemática tem também uma face experimental e heurística, aqui potencializada pelos recursos da geometria dinâmica, que envolve raciocínios não dedutivos, mas indutivos, analógicos, informais, importantes para a pesquisa e descoberta em matemática.

Essa face deve ser enfatizada e incentivada no ensino em todos os níveis e, em especial, na “formação” do matemático e do professor de matemática para o aprimoramento de sua intuição e o despertar de sua imaginação.

A pesquisa aqui desenvolvida para o estudo da geometria do plano cartesiano munido de diferentes normas, pode ser realizada, também, numa fase avançada, para o estudo da geometria intrínseca de superfícies (ou, em geral, de variedades diferenciáveis), cujos planos tangentes (espaços tangentes), estejam munidos de uma norma não necessariamente proveniente de um produto interno.

As variedades diferenciáveis cujos espaços tangentes estão munidos de uma norma que não provém de um produto interno, são um caso das chamadas de *variedades de Finsler*, contrastando com as *variedades Riemannianas*, cujos espaços tangentes estão munidos de uma norma induzida por um produto interno.

Autores:

José Carlos Cifuentes

Doutor em Matemática; Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP; professor do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática; Universidade Federal do Paraná – UFPR, Curitiba/PR, Brasil. E-mail: jccifa@gmail.com.

Valdeni Soliani Franco

Doutor em Matemática; Universidade de São Paulo (São Carlos) – USP/São Carlos; professor do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática; Universidade Estadual de Maringá – UEM, Maringá/PR, Brasil.

E-mail: vsfranco@gmail.com.