UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 64. Abril 2022
Páginas 1-13

Área entre curvas con GeoGebra

José Luis Vergara Ibarra

Fecha de recepción: 24/10/2021
Fecha de aceptación: 4/03/2022

Resumen	Existen muchos trabajos relacionados al estudio y simulación del área bajo la curva empleando GeoGebra, sin embargo, este caso particular es resuelto mediante comandos básicos predefinidos en el software, lo que reduce la posibilidad de extender esta idea al área entre curvas. En este sentido, el presente artículo muestra cómo diseñar a través de GeoGebra registros de representación geométrica y numérica que articulen las vistas CAS, algebraica y gráfica, ofreciendo oportunidades de visualización e interacción dinámica del área entre curvas. Mediante el desarrollo de este tema quedan plasmadas varias ideas que pueden ser de utilidad para su aplicación en el aula. **Palabras clave**: Área entre curvas, GeoGebra, Simulación, Dinámico
Abstract	There are many works related to the study and simulation of the area under the curve using GeoGebra, however, this particular case is solved by basic predefined commands in the software, which reduces the possibility of extending this idea to the area between curves. In this sense, the present article shows how to design through GeoGebra registers of geometric and numerical representation that articulate the CAS, algebraic and graphic views, offering opportunities for visualization and dynamic interaction of the area between curves. Through the development of this topic, several ideas are expressed that can be useful for application in the classroom. **Keywords**: Area between curves, GeoGebra, Simulation, Dynamic
Resumo	Existem muitos trabalhos relacionados ao estudo e simulação da área sob a curva empregando GeoGebra, porém, este caso particular é resolvido mediante comandos básicos predefinidos no software, o que reduz a possibilidade de estender esta idéia à área entre curvas. Neste sentido, o presente artigo mostra como projetar através de GeoGebra registros de representação geométrica e numérica que articulem as janelas CAS, algébrica e gráfica, oferecendo oportunidades de visualização e interação dinâmica da área entre curvas. O desenvolvimento deste tema traduz várias ideias que podem ser úteis para a sua aplicação na sala de aula. **Palavras-chave:** Área entre curvas, GeoGebra, Simulação, Dinâmico

1. Introducción

En los libros de cálculo de una variable y varias variables tales como Bruce y Larson (2010), Stewart (2018), Smith y Minton (2012), Zill y Wright (2011), entre otros; los autores para definir conceptos matemáticos se apoyan a través de imágenes o figuras estáticas sin la participación de la tecnología que dinamice estas representaciones. Para tal fin, muchas veces recomiendan sistemas computacionales aritméticos difíciles de utilizar.

La integral definida desde el punto de vista práctico tiene muchas aplicaciones como por ejemplo se puede utilizar para calcular el área entre curvas, los volúmenes de sólidos de revolución y de corte transversal, el trabajo realizado por una fuerza variable, longitud de arco, entre otros. El proceso de construcción de la integral definida se puede comprender desde el enfoque geométrico al teórico o viceversa, es decir, se divide la región en formas geométricas conocidas como rectángulos, trapezoides o cuadrados, luego se calcula el área de cada parte y sumando estas áreas se puede aproximar el valor del área de la región (área bajo la curva o entre curvas). Las sumas de estas formas geométricas en sentido algebraico y analítico son las sumas de Riemann. Aumentando la cantidad de las formas geométricas, el área tiende a ser más exacta y la región a medir es cada vez más completa. Finalmente tendiendo al infinito el número de las formas que componen la región se puede definir la integral definida. Tradicionalmente este proceso es aceptado, pero podemos ofrecer otras posibilidades de visualización aprovechando los medios tecnológicos que permitan interactuar con los estudiantes. Este enfoque es discutido por Vega, Duarte y Cárdenas (2015), quienes establecen que la tecnología, como recurso de exploración y visualización, debe permitir que el estudiante establezca relaciones entre los distintos objetos matemáticos y se familiarice con las propiedades que estos cumplen, haciéndolos tangibles y manipulables en lugar de abstractos e imperceptibles.

La motivación en redactar este artículo nace al escuchar una capacitación sobre *Métodos de Integración en una y Varias Variables* en la Universidad Técnica de Manabí en la cual los docentes facilitadores definen la integral de manera formal conectando este resultado con la noción geométrica del área bajo la curva y posteriormente con el teorema fundamental del cálculo. En esta capacitación los docentes hacen sus mejores esfuerzos para construir rectángulos que aproximen el área bajo la curva de un problema en particular con GeoGebra (Figura 1), además se hace una reflexión sobre el software y su impacto en el aprendizaje y enseñanza del cálculo en una y varias variables, a pesar de que no es muy conocido y no se tenga un dominio básico del mismo. Por lo general en la enseñanza universitaria la forma de abordar las aplicaciones de la integral definida es basada mediante ilustraciones en los textos; aquí se encuentran muchos conceptos ilustrados por imágenes estáticas. Actualmente existen aplicaciones como GeoGebra que pueden transformar estas representaciones (imágenes estáticas) en ilustraciones dinámicas, haciéndolas más visuales, tangibles y reales (Dantas y Vieira, 2017; Ancochea, Arranz y Muñoz, 2021; Vergara, 2021; Cayetano y Pereiro, 2021; Vergara, 2022).

Dar movimiento a estas representaciones estáticas en sistemas computacionales es complicado porque se requieren conocimientos avanzados de programación y por lo general consumen altos recursos de sistema y de costo. Por el contrario, GeoGebra permite realizar simulaciones dinámicas de algunos conceptos matemáticos mediante comandos y herramientas básicas, además es un software de geometría dinámica libre y gratis; escrito en Java. Así también, GeoGebra es un conjunto de herramientas para la creación y gestión de recursos educativos denominadas Herramientas de Autor. (Pizzorno y Montiel 2021)

De acuerdo con Ancochea, Arranz y Muñoz (2021), la versatilidad del software permite que, con unas pocas entradas, el alumnado pueda desarrollar su inventiva para obtener resultados imprevistos. Además, Grisales (2018) concluye que la utilización de estos recursos es una estrategia adicional que logra motivar al estudiante y asegura la experimentación del concepto a través de simulaciones y herramientas interactivas, impulsando un rol más protagónico del estudiante para la construcción del conocimiento. Simultáneamente el aprendizaje asistido con GeoGebra desarrolla el pensamiento visual, actividad valiosa en el aprendizaje de las matemáticas (Juandi y Priatna 2018, p.6).

Debido a esto, autores como Cayetano y Pereiro (2021) desarrollan varias actividades para estudiantes, entre ellas, modelan flores donde aplican el concepto de integral para calcular el área de los pétalos que constituyen la flor haciendo más accesible este concepto. Martínez y García (2020) analizan cómo los estudiantes comprenden el concepto de la integral definida mediado con GeoGebra. En suma, a estos trabajos se va a considerar la simulación dinámica del área entre curvas un recurso importante que puede ser utilizado para una comprensión más general sobre la teoría de la integral. Por último, aprovechar la versatilidad de GeoGebra en un sentido numérico para resolver importantes problemas que otros métodos de cálculo de la integral definida no resuelven.

En este sentido, el objetivo del presente trabajo es diseñar con GeoGebra la simulación dinámica de las formas geométricas que proporcionan el área aproximada entre curvas al sumarlas. Por otra parte, se presenta el área aproximada en problemas que no se pueden resolver mediante la integral definida. Estas propuestas técnicas y didácticas pueden ser implementadas en un ambiente híbrido de aprendizaje.

De forma paralela en el diseño y cálculo se darán las definiciones pertinentes que sustenten los modelos dinámicos, es decir, la teoría estará en conexión con los objetos geométricos dinámicos obtenidos. Existen distintas versiones de GeoGebra, en este trabajo se usará GeoGebra clásico 5; no obstante, todas las construcciones se pueden implementar sobre las versiones en línea y las aplicaciones desarrolladas para dispositivos móviles. Las imágenes utilizadas a lo largo del artículo son creadas por el autor mediante GeoGebra.

2. Área y el papel de GeoGebra

Se empieza preguntando, ¿Qué se entiende por área? Esta pregunta puede ser sencilla de responder cuando se trata de regiones acotadas por lados rectos, por ejemplo, cuadrados, rectángulos, triángulos o polígonos formados por la unión de triángulos y rectángulos. Pero si esta región está acotada por curvas (no lineales) no es sencillo responder esta pregunta. Una de las ideas de aproximar el área con un lado curvo es aproximarla mediante rectángulos.

Dividir la región a medir en 1, 2, 3, n rectángulos para aproximar el área bajo la curva e ilustrarlo en cualquier tipo de pizarra toma tiempo y espacio de trabajo en la práctica docente o el excesivo uso de imágenes en las presentaciones y una escasa interacción por parte del estudiante. Aprovechando los *comandos y herramientas* básicas de GeoGebra podemos superar esta dificultad de muchas maneras. El siguiente ejemplo (Figura 1) muestra una de las posibilidades de trabajar el área bajo la curva, es decir, se dibuja cada rectángulo mediante la herramienta polígono, donde la altura de cada rectángulo es el extremo derecho evaluado en la función.

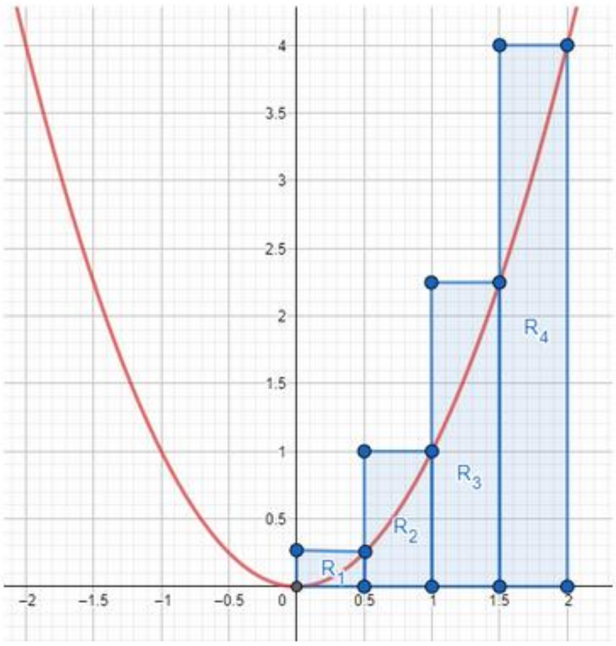


Figura 1. Aproximación del área bajo la curva, 4 rectángulos.

El método anterior exige una mayor cantidad de tiempo, ya que, por un lado, se requiere particiones más finas para una mejor aproximación y, por otro lado, para obtener el área total con el software se debe sumar el área de cada rectángulo.

Una manera fácil y eficiente de obtener este resultado es utilizar comandos que ya están definidos en GeoGebra, en la cual solo hay que digitar en los argumentos, la función, extremos del intervalo y el número de rectángulos. Este método proporciona directamente la región aproximada por rectángulos y su área, para ello revisemos el ejemplo que sigue. Supongamos que queremos aproximar el área bajo la cura $f(x) = \sqrt{x-2}$ a través de 10 rectángulos.

Se empieza ingresando la expresión $\sqrt{x-2}$ que GeoGebra dará por defecto el nombre $f(x)$, luego se utiliza el comando *SumaInferior(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>, <Número de rectángulos>)* y se sustituye en cada argumento lo siguiente *SumaInferior(f, 3, 9, 10),* ingresando este comando se tiene la Figura 2.

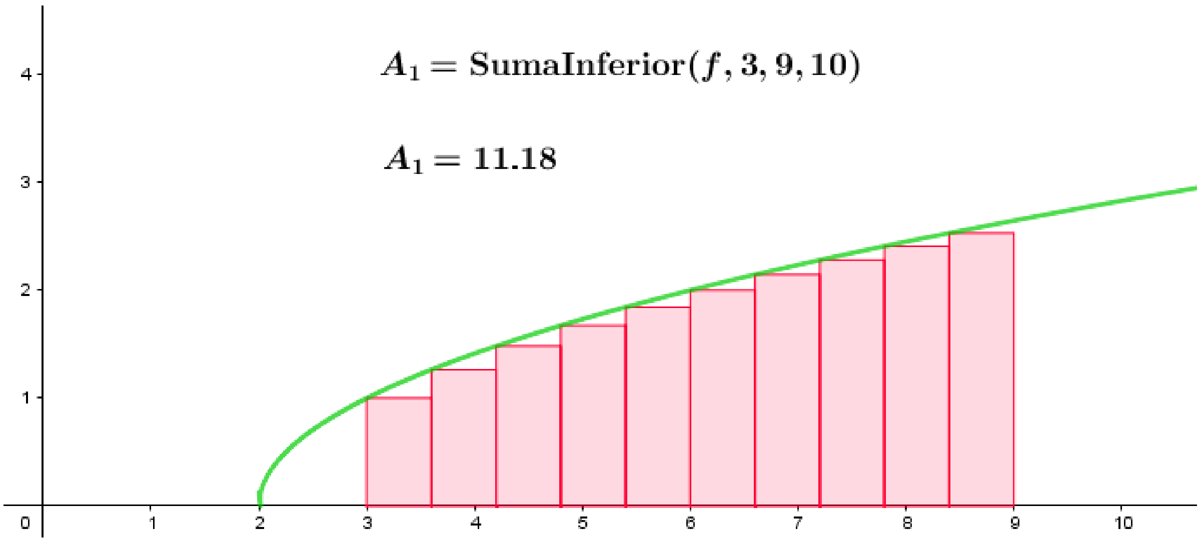


Figura 2. Suma Inferior o puntos extremos izquierdo.

Nótese, que creando un deslizador n que varíe de 1 a 50 con incremento 1, se puede reemplazar en el último argumento del comando por n y de esta manera se hace dinámica la ilustración y al mismo tiempo al aumentar el valor de n se visualiza cómo este valor se aproxima al área bajo la curva. En la Tabla 1 se ilustran la suma superior y trapezoidal.

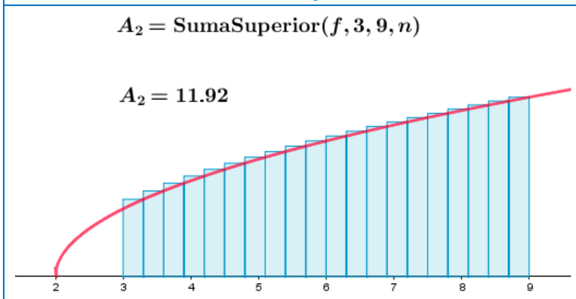
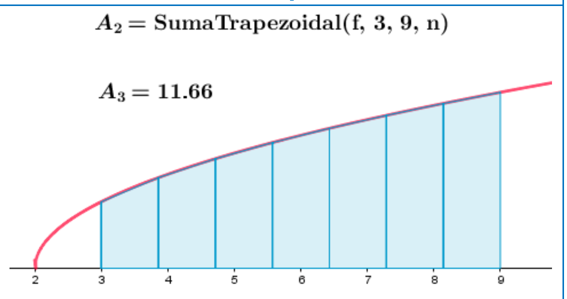
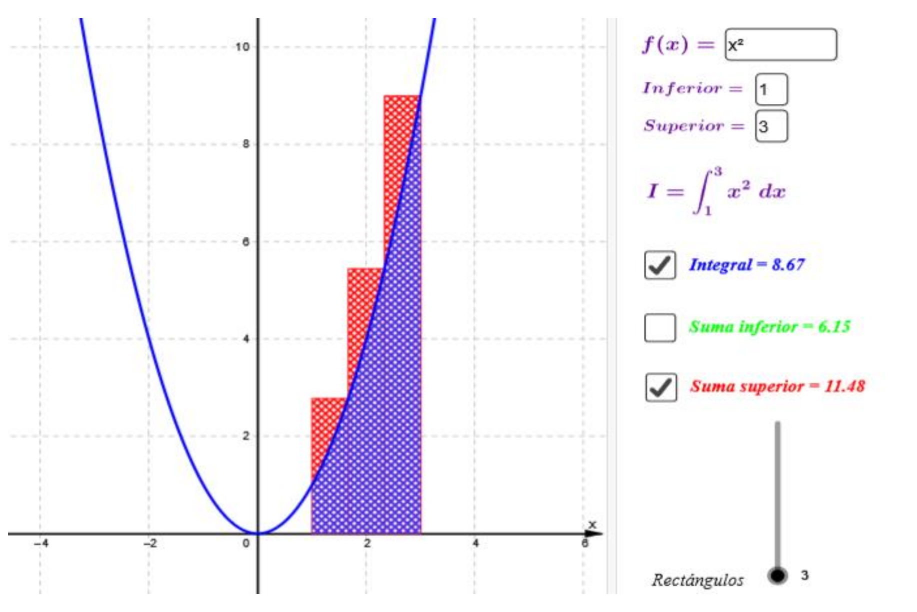
Suma Superior	**Suma Trapezoidal**
	
Número de rectángulos n=30	**Número de Trapecios n=7**

Tabla 1. Suma Superior y Trapezoidal variando n.

Actualmente la Comunidad GeoGebra Latinoamericana con el apoyo del Instituto GeoGebra Lanús, han desarrollado un proyecto llamado Latino Applets que promueve el uso de applets. Ellos a través de YouTube muestran cómo usarlos y dejan el enlace del recurso o actividad para que pueda ser aprovechado por los docentes en el aula de clases. Tomemos nuestro caso de interés, es decir, la simulación dinámica del área bajo la curva. Esta actividad puede tener distintos fines educativos de acuerdo a los resultados de aprendizaje que se han planteado en sus áreas y niveles pertinentes, ver Tabla 2.



Uso: **https://youtu.be/SDQm7apzsd8**

Tabla 2. Nota: Adaptado de Sumas de Riemann, por A. Arevalo,2018, GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/zdsg42dz). CC-BY-SA

En tal sentido, GeoGebra juega un rol interesante para la enseñanza y aprendizaje de este tema, no sólo por su versatilidad o su carácter dinámico, sino porque también posibilita crear un Classroom a partir de cualquier actividad, donde los docentes pueden observar las interacciones significativas de sus estudiantes en tiempo real. En los siguientes enlaces se explica cómo aprovechar estos recursos GeoGebra (https://youtu.be/2B7q4hyPjeQ) y cómo realizar una actividad en línea con los estudiantes (https://youtu.be/t_5rZ97BRg0).

3. Modelación del área entre curvas

El área entre curvas es una generalización del área bajo la curva y en este punto GeoGebra no cuenta con comandos establecidos para aproximar el área y modelar de forma dinámica este concepto. Para este propósito se necesita acudir a la teoría e integrarla al software, es decir, crear una conexión con las definiciones y la generalización de estos patrones sobre una combinación de comandos. Esto es alcanzado gracias al potencial del comando secuencia para incorporar patrones matemáticos y reproducirlos a objetos geométricos, simbólicos y numéricos. (Vergara, 2022)

3.1. Partición de un intervalo

Bartle y Sherbert (2011) define: si $I \coloneqq [a, b]$ es un intervalo acotado cerrado en $\mathbb{R}$, entonces una partición de I es un conjunto ordenado finito $\mathcal{P} \coloneqq (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ de puntos en I tal que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Los puntos de $\mathcal{P}$ son utilizados para dividir $I \coloneqq [a, b]$ en n subintervalos cerrados no superpuestos.

$$\boldsymbol{I_1 \coloneqq [x_0, x_1],\qquad I_2 \coloneqq [x_1, x_2], \ldots,\qquad I_n \coloneqq [x_{n-1}, x_n]}$$

Las particiones del intervalo $I \coloneqq [a, b]$ pueden ser arbitrarias, sin embargo, se van a considerar particiones regulares lo que asegura que el ancho de cada subintervalo sea el mismo y se puede denotar mediante la expresión $\Delta x = (b - a)/n$, ver Figura 3.

3.2. Análisis del modelo

Se comienza dividiendo el problema en pequeñas partes para generalizar los patrones matemáticos en el software a través de comandos anidados para ello observe la Figura 3.

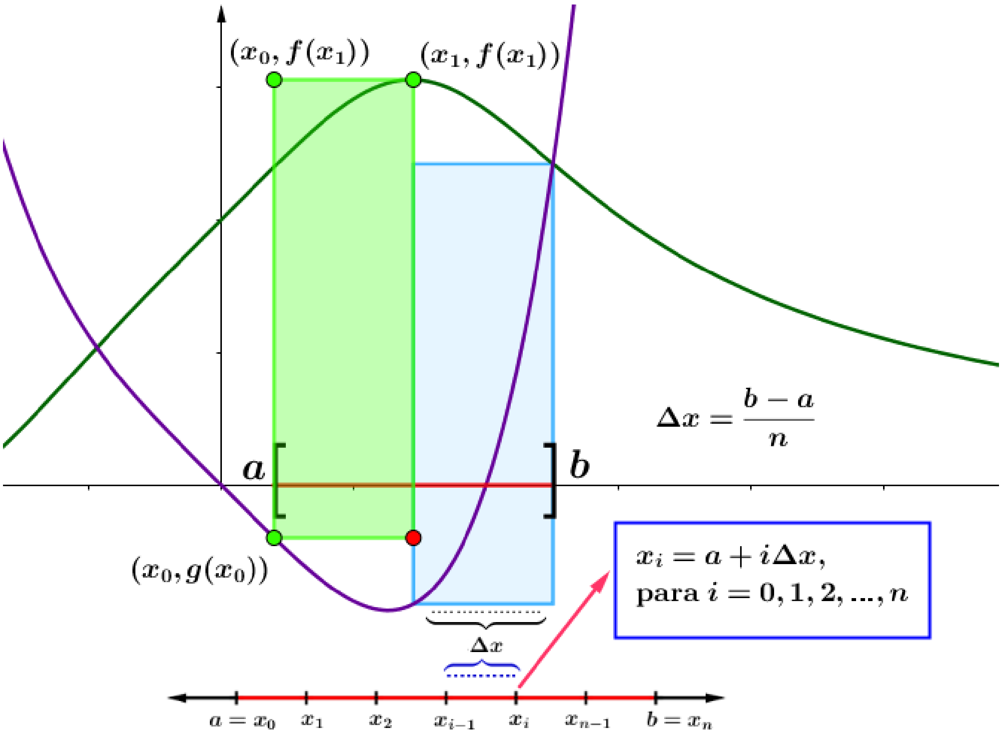


Figura 3. Área ente curvas – Análisis.

El rectángulo verde de la Figura 3 puede construirse a través de la herramienta polígono o el comando $Polígono(< Punto >, \ldots, < Punto >)$. Su construcción se puede empezar por cualquiera de sus vértices en sentido horario o antihorario, si empezamos por el punto $(x_0, g(x_0))$, hacia el punto rojo llegamos al punto $(x_0, f(x_1))$, sustituyendo estos puntos en el comando polígono se tiene la sintaxis: $Polígono(\,(x_0, g(x_0)), (x_1, g(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_0, f(x_1)))$. Elaborar rectángulos entre curvas a través de su herramienta o el comando es impreciso y toma tiempo; más aún si se quiere particiones más finas. Esto se puede solucionar con el comando secuencia haciendo unas adaptaciones en las expresiones algebraicas mencionadas y combinado comandos.

La modelación está relacionada con la partición del intervalo y las funciones involucradas. Aquí el ancho de cada subintervalo y a la vez del rectángulo es Δx y cada punto en el eje x es $x_i = a + i\Delta x$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, ver Figura 3.

3.2.1. Conexión de ecuaciones algebraicas y el lenguaje de GeoGebra.

Si se considera dos puntos A y B sobre el eje x en GeoGebra, éstos hacen de extremos del intervalo de la Figura 3. Los puntos A y B se pueden variar sobre el eje real, entonces se puede establecer dos relaciones:

- $\Delta x = (b-a)/n = (x(B) - x(A))/n$
- $x_i = a + i\Delta x = x(A) + i\Delta x$

Las expresiones del lado derecho de las ecuaciones anteriores son las que se registran en GeoGebra. Estas expresiones pueden variar de acuerdo con la creación de los puntos A y B, especialmente si ambos puntos dependen de deslizadores o las intersecciones de las curvas, no obstante, otras posibilidades pueden basarse sobre esta idea. Con el lenguaje del software, los puntos de la partición evaluados en las funciones f y g (Figura 3) quedan representados en el comando polígono como:

- $Secuencia(\ Polígono(\ (x(A) + i\Delta x, g(x(A) + i\Delta x)), (x(A) + (i + 1)\Delta x, g(x(A) + i\Delta x)), (x(A) + (i + 1)\Delta x, f(x(A) + (i + 1)\Delta x)), (\ x(A) + i\Delta x, f(x(A) + (i + 1)\Delta x))))$.

Los puntos verdes y el rojo representados en la Figura 3 están dados para $i = 0{,}1$. El rol de $x(A)$ y $x(B)$ es tomar la coordenada x de los puntos A y B respectivamente.

3.2.2. Diseño e implementación

La generalización de estos patrones para n rectángulos en GeoGebra se hace mediante el comando *Secuencia(<Expresión>, <Variable>, <Valor inicial>, <Valor final>)* por lo que se requiere fijar los puntos A y B sobre el eje x, después crear un deslizador llamado n (n=número de rectángulos) que varíe de 1 a 100 con incremento 1, luego ingresar en la entrada dos funciones particulares y $\Delta x = (b-a)/n$. Finalmente registre la sintaxis:

- $Secuencia(\ Polígono(\ (x(A) + i\Delta x, g(x(A) + i\Delta x)), (x(A) + (i + 1)\Delta x, g(x(A) + i\Delta x)), (x(A) + (i + 1)\Delta x, f(x(A) + (i + 1)\Delta x)), (\ x(A) + i\Delta x, f(x(A) + (i + 1)\Delta x))), i, 0, n - 1\ )$.

Siguiendo estos pasos se consigue la modelación dinámica del área entre curvas de la Figura 4, en la cual se pueden animar los puntos A y B, el deslizador, cambiar las funciones, el número de subintervalos (cantidad de rectángulos también). En la vista algebraica la lista o conjunto que proporciona los rectángulos de nombre $l1$, también da el área total que aproxima el área entre curvas, esto se alcanza utilizando el comando *Suma(<Lista>)*, para ello se digita en la entrada *Suma(* $l1$ *)*. Si desea calcular el área entre curvas sin esta aproximación se utiliza el comando *IntegralEntre(<Función>, <Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)*.

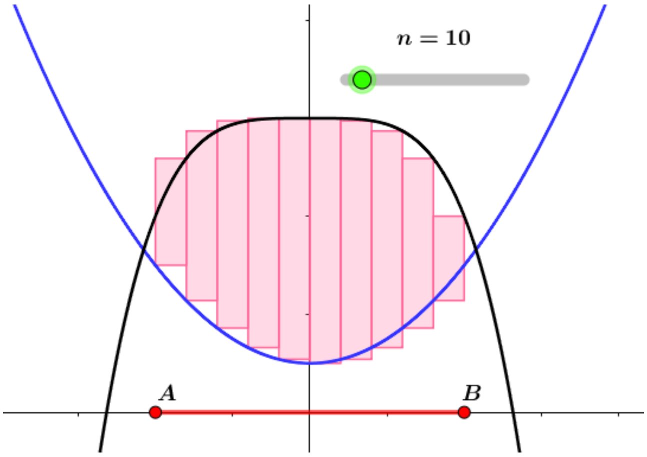


Figura 4. Modelación del área entre curvas por 10 rectángulos.

El objeto geométrico o forma geométrica para aproximar el área entre curvas hasta ahora está representada por rectángulos, sin embargo, también se puede emplear trapezoides como se muestra en la Tabla 1.

Los pasos para obtener este modelo son los mismos del problema anterior a diferencia de una sencilla modificación en las expresiones del comando secuencia. Al digitar los pasos anteriores y la siguiente sintaxis resulta la Figura 5:

- $Secuencia(Polígono((x(A) + i\Delta x, g(x(A) + i\Delta x)), (x(A) + (i + 1)\Delta x, g(x(A) + (i + 1)\Delta x)), (x(A) + (i + 1)\Delta x, f(x(A) + (i + 1)\Delta x)), (x(A) + i\Delta x, f(x(A) + i\Delta x))), i, 0, n - 1)$

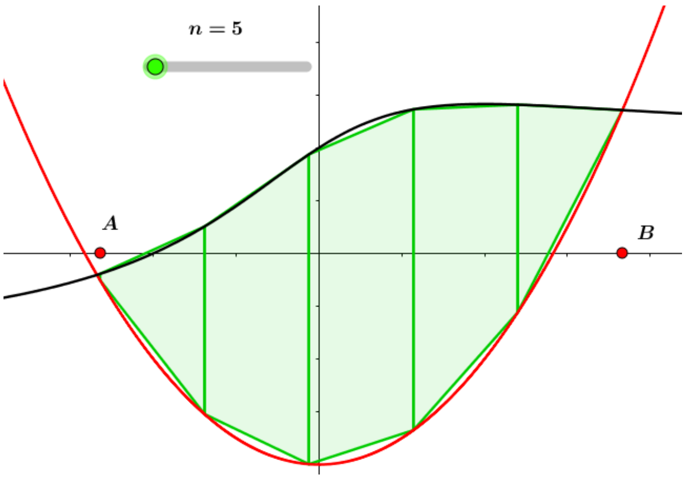


Figura 5. Modelación del área entre curvas por 5 trapezoides.

Es sabido que el área entre curvas es más general que el área bajo la curva, es decir, si se considera la función color azul de la Figura 4 y la roja de la Figura 5 y se igualan a cero se tiene el área bajo la curva sobre el intervalo $[a, b]$.

4. Una mirada numérica

Muchos problemas de área del entorno involucran funciones para las que no se dispone de antiderivada elemental. De hecho, una gran parte de integrales definidas no se pueden calcular de manera exacta. Por otro lado, ciertas intersecciones entre las curvas no se pueden obtener con los métodos básicos para resolver ecuaciones, por lo que éstos (límites de integración) también se requieren aproximarlos.

La integral definida es el límite de una secuencia de sumas de Riemann, es decir, que cualquier suma sirve como una aproximación de la integral. En ese sentido se hace uso de la aproximación estudiada.

A continuación, se propone un problema para mostrar las posibilidades que ofrece GeoGebra de trabajar en la integración numérica.

Considere calcular el área entre las curvas $f(x) = \cos(x^2)$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x^2)$, cuyos límites de integración están dados por intersección de las curvas dentro del intervalo $[-1, 1]$. Este ejemplo muestra la importancia de utilizar algún método numérico porque considerando estas funciones como un sistema de ecuaciones sus soluciones son imposibles de hallar manualmente, además al aplicar la integral definida para determinar el área entre estas curvas, la diferencia de f y g no cuentan con una antiderivada elemental.

Solución:

Se registra en la entrada de GeoGebra las funciones $\cos(x^2)$ y $\operatorname{sen}(x^2)$, luego se realiza la intersección de las curvas en el intervalo $[-1, 1]$, esta intersección produce los puntos A y B. Ahora digitamos en la entrada:

- n=*Deslizador(1, 400, 1, 1, 100, false, true, false, false)*
- $\Delta x = (x(B) - x(A))/n$
- $area = Secuencia(\ Polígono(\ (x(A) + i\Delta x, g(x(A) +\ i\Delta x)), (x(A) + (i + 1)\Delta x, g(x(A) + i\Delta x)), (x(A) + (i + 1)\Delta x, f(x(A) +\ (i + 1)\Delta x)), (\ x(A) + i\Delta x, f(x(A) + (i + 1)\Delta x))), i, 0, n - 1\ )$.
- $Suma(area)$
- *IntegralEntre(f, g, x(A), x(B))*

En la Figura 6 puede verse la solución del problema donde *a* en la vista algebraica es el área de aproximación para 31 rectángulos y *b* el área obtenida mediante un comando definido en GeoGebra, esta aproximación es aún mejor si variamos el deslizador hasta $n = 400$ o aplicamos la forma trapezoidal. A efectos del número de iteraciones se recomienda aumentar esta cantidad hasta 1000 para asegurar un buen rendimiento del software.

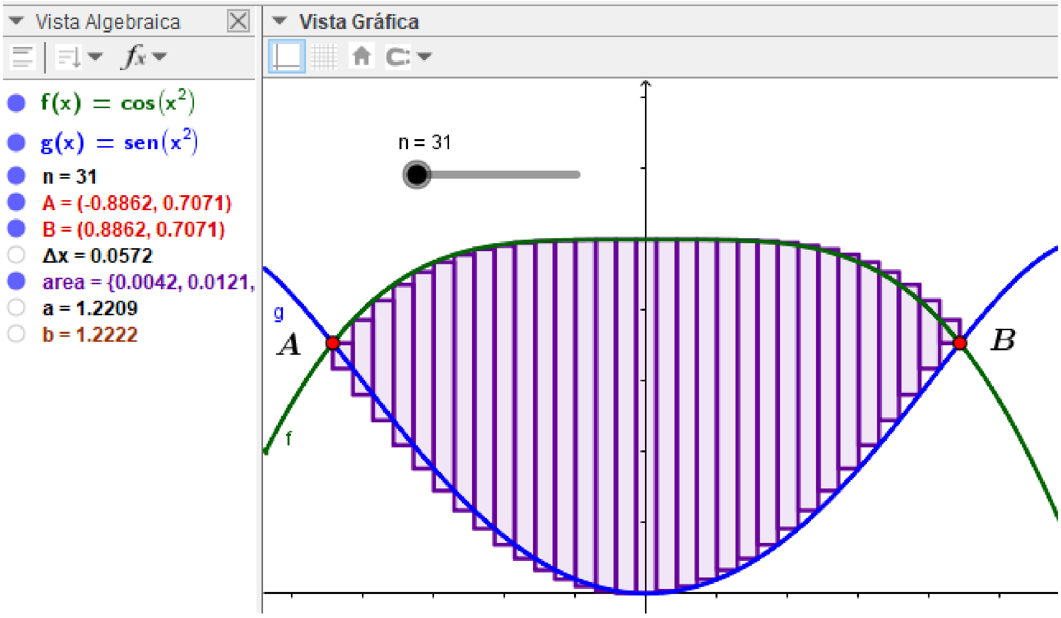


Figura 6. Aproximación numérica del área entre curvas.

5. Conclusión

Las construcciones dinámicas posibilitan el estudio e interpretación de la idea de límite y su relación con las sumas de Riemann, el concepto de partición (o refinamiento de la partición) y su norma, el máximo y el mínimo de las alturas de los rectángulos que definen las sumas superior e inferior, la relación que existe entre la suma inferior y superior con la integral que proporciona el área exacta. En resumen, todas estas ideas y las bondades de GeoGebra pueden servir como apoyo para el estudio teórico de la integral de Riemann pasando al teorema fundamental del cálculo, además da las posibilidades de resolver ejercicios cuyas primitivas de las funciones involucradas no estén definidas.

Las demostraciones de estos resultados son más claros con la ayuda de estas simulaciones dinámicas y promueven las bases para el estudio de otro tipo de integrales e incluso extenderse a dimensiones superiores tanto a nivel teórico o práctico.

Las exploraciones dadas permiten obtener una comprensión básica de algunas ideas detrás de los métodos de integración numérica más sofisticados. Por otro lado, este enfoque puede aplicarse para resolver problemas del entorno que en muchos casos solo se pueden efectuar de forma numérica.

Los diseños realizados han evidenciado como la teoría matemática influye sobre GeoGebra y GeoGebra sobre la teoría para crear modelos dinámicos en la que se conjugan los conceptos analíticos, geométricos y numéricos. Esto sugiere su aplicación en la enseñanza y aprendizaje a nivel analítico, geométrico y numérico, pues ofrece oportunidades de visualización, interacción, experimentación, análisis y síntesis de estos conceptos, potenciando la creatividad y el pensamiento computacional y abstracto sobre patrones matemáticos.

Referencias bibliográficas

Ancochea, B., Arranz, J., Muñoz, J. (2021). Superficies de revolución con GeoGebra. Sección: Propuestas Áulicas. UNIÓN, 17(61), 01-17. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/215

Arevalo, A. (11 de diciembre de 2018). Sumas de Riemann*. Recuperado el 20 de abril de 2021* de https://www.geogebra.org/material/show/id/zdsg42dz

Bartle, R., Sherbert, D. (2011). Introduction to real analysis. México, D.F: Jhon Wiley & Sons, Inc.

Bruce, E., Larson, R. (2010). *Cálculo 1 de una variable*. México, D.F: McGraw-Hill/Interamericana.

Dantas, S., Vieira, C. (2017). Formas de revolução e cálculo de volume*. Revista Centro de Ciências Naturais*, *39* (1), 142-155. https://doi.org/10.5902/2179460X24428

Grisales, A. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: restos y perspectivas*. Entramado*, *14* (2), 198-214. https://doi.org/10.18041/1900-3803/entramado.2.4751

Juandi, D., Priatna, N. (2018). Discovery learning model with geogebra assisted for improvement mathematical visual thinking ability*. Revista: Journal of Physics: Conference Series.* https://doi.org/10.1088/1742-6596/1013/1/012209

Martínez, M., García, D. (2020). Estudio de las aprehensiones en el registro gráfico y génesis instrumental de la integral definida*. Formación Universitaria*, *13* (5), 177-190. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062020000500177

Pereiro, D., Cayetano, J. (2021). Flores: del jardín a GeoGebra. Sección: GeoGebra en Unión. *UNIÓN*, 17(62), 01-20. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/331

Pizzorno, S., Montiel, G. (2021). Ambientes Virtuales de Aprendizaje construidos socialmente con Herramientas de Autor de GeoGebra*. Revista: Innovaciones Educativas*, *23* (34), 213-227. https://doi.org/10.22458/ie.v23i34.3432

Smith, R., Minton, R. (2012). *Calculus*. New York, D.F: The McGraw-Hill Companies.

Stewart, J. (2018). *Cálculo. Trascendentes Tempranas*. México, D.F: Cengage Learning Editores.

Vega, J., Duarte, F., Cárdenas, Y. (2015). Enseñanza de las matemáticas básicas en un entorno e-Learning: un estudio de caso de la Universidad Manuela Beltrán Virtual*. Revista Escuela de Administración de Negocios*, (79), 172-185.

Vergara, J. (2021). Sólidos de revolución con GeoGebra*. Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, *22* (1). https://doi.org/10.18845/rdmei.v22i1.5735

Vergara, J. (2022). Sólidos de Revolución y suma de Riemann en GeoGebra*. Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 22(2). https://doi.org/10.18845/rdmei.v22i2.6134

Zill, D., Wright, W. (2011). *Cálculo. Trascendentes Tempranas*. México, D.F: McGraw-Hill/Interamericana editores.

José Luis Vergara Ibarra. Profesor de Enseñanza Media y Superior, colegio Veintitrés de Octubre, Montecristi-Ecuador; Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo-Ecuador. Profesor y miembro del curso GeoGebra en alianza con la Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) y el apoyo de la Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Mato Grosso – FAPEMAT, Brasilia-Brasil. Miembro del Instituto GeoGebra de la Universidad Técnica de Manabí, miembro de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana y miembro del Instituto GeoGebra Internacional.

ingjosevergaraibarra@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-2735-9246