UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 67. Abril 2023
Páginas 1-17

Tareas sobre Puzles de Pirámides

Sandra del Carmen Guerrero García, Pablo Flores

Fecha de recepción: 25/10/2021
Fecha de aceptación: 30/08/2022

Resumen	Una renovación adecuada en el aprendizaje de la geometría debe permitir al estudiante dar sentido a los conceptos geométricos e incrementar la sensibilidad para apreciar el interés de la geometría para resolver problemas, lo que supone desarrollar su sentido matemático y las componentes del sentido espacial. Para ello proponemos tareas que buscan identificar formas, caracterizarlas, apreciar sus cualidades, siempre mejorando sus habilidades espaciales. Para favorecerlo se parte de situaciones concretas que se sustentan en material didáctico y se completan mediante el tratamiento con programas de geometría dinámica, como el GeoGebra 3D. **Palabras clave**: Sentido espacial, pirámides, prismas, secciones en cuerpos.
Abstract	An adequate renovation in the learning of geometry should allow the student to make sense of geometric concepts and increase the sensitivity to appreciate the interest of geometry to solve problems, which also involves developing their mathematical sense and the components of spatial sense. For this we propose tasks that seek to identify shapes, characterize them, appreciate their qualities, always improving their spatial skills. This requires starting from specific situations that are supported by didactic material and are completed by treatment with dynamic geometry programs, such as 3D GeoGebra. **Keywords**: Spatial sense, pyramids, prisms, body sections, technology.
Resumo	Uma renovação adequada na aprendizagem da geometria deve permitir ao aluno dar sentido aos conceitos geométricos e aumentar a sensibilidade para apreciar o interesse da geometria na resolução de problemas, o que implica além de desenvolver o seu sentido matemático e os componentes do sentido espacial. Para isso propomos tarefas que visam identificar formas, caracterizá-las, valorizar suas qualidades, sempre aprimorando suas habilidades espaciais. Isso requer partir de situações específicas que são suportadas por material didático e são completadas por tratamento com programas de geometria dinâmica, como o GeoGebra 3D. **Palavras-chave:** Sentido espacial, pirâmides, prismas, seções do corpo, tecnología.

1. Introducción

Fusionamos los siguientes aspectos: elaboración en físico y empleo de material manipulativo, complementando con GeoGebra, para que el estudiante pueda reconocer e identificar propiedades, buscar nuevas relaciones y dependencias entre los poliedros que se le presentan en el desarrollo de las diferentes tareas y puedan trabajar desde sus casas el material manipulativo en físico. Para ello nos basamos en el esquema de la figura 1.

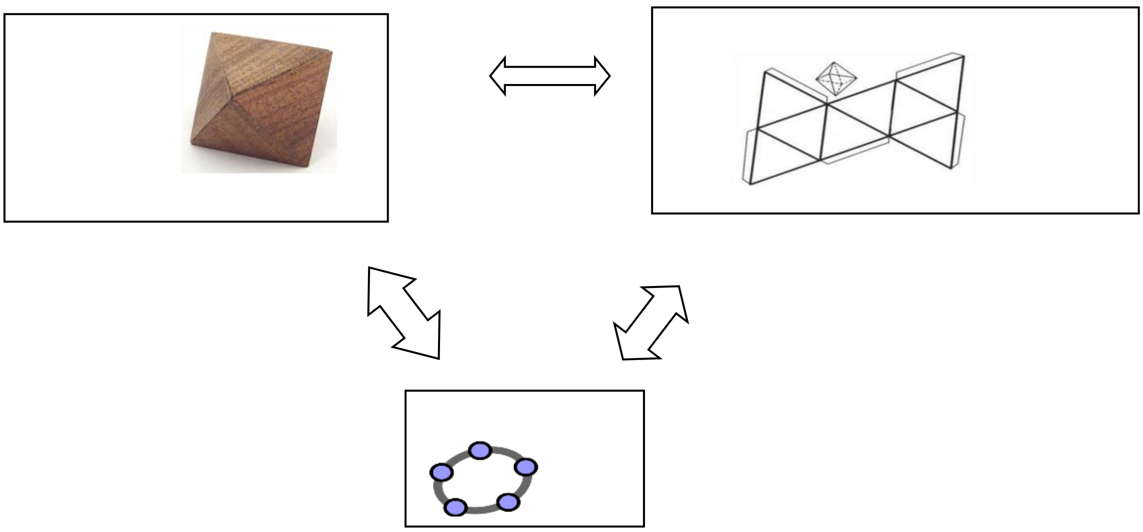


Figura 1. Trabajo con material físico, poliedros sólidos- Elaboración de poliedros sólidos a partir de desarrollos planos o papiroflexia- Construcción y razonamiento con GeoGebra

Esto con el fin de proporcionar la motivación de los estudiantes, retroalimentarles y profundizar en el pensamiento espacial. Ayudándolos entre otros a construir, descubrir, razonar las tareas propuestas. Tomamos el software de GeoGebra como un complemento tecnológico, como un recurso didáctico más ya que debemos estar preparados para estos tiempos de pandemia (COVID-19), porque durante la misma ha habido un enorme crecimiento del empleo de la tecnología. Según que centros el aprendizaje se desarrolla mayoritariamente a distancia y de manera virtual, empleando software interactivo, plataformas etc. No sabemos cuánto tiempo tendremos que movernos en este escenario, porque no hay certeza si las pandemias remitirán o seguirán su curso (¿posible repunte?). En este sentido nuestra propuesta se adapta a tiempos dentro y fuera de pandemia.

Fruto del Trabajo Fin de Máster (Guerrero, 2014), experimentamos el interés en trabajar las formas tridimensionales para realizar tareas geométricas, en aquel caso con niños con talento matemático. Nos preguntamos entonces si se pueden aplicar algunas de las actividades planteadas a otros estudiantes.

Para examinar qué aprendizaje se logra, nos basamos en el concepto de sentido espacial. En este artículo hacemos una propuesta de tareas geométricas, apoyadas por los requerimientos del currículo colombiano, en las que se contribuye a desarrollar el sentido espacial de los estudiantes.

El artículo comienza examinando lo que señala el currículo colombiano sobre geometría, para apreciar la pertinencia de las tareas propuestas. A continuación se describen las tareas, desarrollando el estudio geométrico de algunas de las formas, inspiradas en las que se emplearon en aquel TFM (Guerrero, 2014), incorporando particiones de las formas, para generar nuevos poliedros, siempre relacionados con el mundo de las pirámides. Esto nos ha permitido conocer los elementos geométricos y las relaciones geométricas, así como las ubicaciones y movimientos que se requieren para apreciar estas formas. Todos estos estudios nos están dando las componentes geométricas del sentido espacial (Flores, Ramírez y Del Río, 2015) relacionado con las tareas que hemos creado. Posteriormente se completa estudiando todas las componentes del sentido espacial que se requiere y se desarrollarán con la realización de cada una de estas tareas.

2. Currículo de matemáticas en Colombia

Los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas elaborados por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia [MEN], (MEN, 2006), y los aprendizajes fundamentales descritos en los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016, versión 2), enfatizan que un aprendizaje competente requiere la formulación y resolución de problemas, que propicien la construcción progresiva y cíclica de niveles de conceptualización y construcción del conocimiento matemático de los estudiantes. Para lograr esta competencia, los profesores tienen que proponer diversidad de situaciones, con diferentes grados de complejidad, de tal manera que se movilicen procesos que involucran las actividades que conforman el ciclo de resolución de problemas. En concreto, en relación a la geometría, propone que las tareas promuevan que los estudiantes argumenten matemáticamente relaciones y propiedades, en el curso de dicha resolución.

En la tabla 1, concretamos los Aprendizajes recogidos en DBA y las evidencias de aprendizaje establecidos para desarrollar el pensamiento geométrico, que deben promover las tareas propuestas.

Aprendizajes (DBA)	Evidencias
Observa objetos tridimensionales en diferentes vistas y los representa según su ubicación. Los reconoce al transformarse mediante rotaciones, traslaciones, y reflexiones (7º)	Establece relaciones entre la posición y las vistas de un objeto. Reconoce e interpreta la representación de un objeto. Representa objetos tridimensionales cuando se transforman
Describe atributos medibles de diferentes sólidos y explica relaciones entre ellos por medio del lenguaje algebraico. (7ºy8º)	Utiliza lenguaje algebraico para el volumen de prisma en términos de sus aristas Realiza representación gráfica del desarrollo plano de un prisma Estima, calcula y compara volúmenes a partir de las relaciones entre las aristas de un prisma o de otros sólidos

Identifica relaciones de congruencia y semejanza entre las formas geométricas que configuran el diseño de un objeto. (7ªy8º)	Utiliza criterios para argumentar la congruencia de triángulos y resuelve problemas aplicando criterios de semejanza. Compara figuras y argumenta si son congruente o semejantes. Reconoce relaciones geométricas al utilizar teoremas y resuelve problemas utilizando teoremas básicos. Aplica teorema de Pitágoras al calcular medidas en triángulo rectángulo y argumenta relación pitagórica por construcción con material concreto.
Utiliza y explica diferentes estrategias para encontrar el volumen y la capacidad de objetos regulares e irregulares en la solución de problemas en las matemáticas y en otras ciencias. (7º y 8º)	Utiliza relación de unidades de capacidad con las de volumen en la solución de un problema. Crea estrategias para calcular volumen de cuerpos regulares e irregulares Discrimina casos de semejanza de triángulos en situaciones diversas y resuelve problemas aplicando los criterios de semejanza. Compara figuras y argumenta si son congruente o semejantes
Identifica regularidades y argumenta propiedades de figuras geométricas a partir de teoremas, por ejemplo el teorema de Pitágoras y las aplica en situaciones reales (8º)	Describe teoremas y argumenta su validez a través de diferentes recursos (Software, tangram, papel, entre otros). Reconoce relaciones geométricas al utilizar teoremas. Resuelve problemas utilizando teoremas básicos. Aplica teorema de Pitágoras a calcular medida en triángulo rectángulo Argumenta relación pitagórica por construcción con material concreto
Conjetura acerca de las regularidades de las formas bidimensionales y tridimensionales y realiza inferencias a partir de los criterios de semejanza, congruencia y teoremas básicos.	Reconoce regularidades en formas bidimensionales y tridimensionales Compara figuras geométricas y conjetura sobre regularidad Redacta y argumenta procesos para semejanza y congruencia de figuras. Describe verbalmente trayectorias y desplazamientos. Explica propiedades de movimiento y representa gráficamente

Tabla 1: Aprendizajes geométricos y evidencias en el DBA colombiano. Fuente (MEN, 2016, pp. 60-62)

3. Tareas propuestas para desarrollar el sentido espacial, a partir de pirámides

En el Trabajo Fin de Máster de Didáctica de la Matemática (Guerrero, 2014), propusimos trabajar descomposiciones de pirámides, para poder comparar y obtener la medida del volumen de tetraedros regulares y pirámides cuadradas de caras triángulos equiláteros, sin emplear fórmulas (Flores y Ramírez-Uclés, 2015). Para ello nos basamos en el relleno del espacio que se consigue a partir de Tetraedros y Octaedros regulares (o Tetraedros y Pirámides cuadradas de la misma arista), empleando un puzle para facilitar su apreciación (Flores, 2007). A partir de estas tareas, hemos avanzado, buscando caracterizar los cuerpos y figuras planas que se ponen en juego en este razonamiento, y ampliando con nuevas formas y figuras, siempre contando con tres elementos fundamentales, construcciones de formas que permitan estudiar los cuerpos geométricos (bien por medio de puzles elaborados, o cuerpos obtenidos por papiroflexia o mediante la construcción a partir del desarrollo plano), el dibujo de regla y compás, y el GeoGebra en 3D, para construir mejor las figuras. De este avance derivan las siguientes tareas:

Tarea 1 *Octaedro regular*: Estudiar el octaedro regular: Caracterizarlo, obtener secciones planas, propiedades, cuerpos con los que podamos formarlo, etc. Esta tarea requiere disponer de octaedros (preferentemente de plástico transparente, que permitan rellenarlos de líquido), papel y regla para realizar su desarrollo plano, y, trabajar con GeoGebra 3D para completar estudio.

Tarea 2 *Descomposición del Octaedro, relación con Tetraedro y Pirámide*: Descomponer el octaedro en pirámides, caracterizarlas, relacionarlo con el Tetraedro regular, con el cubo, Piezas propuestas para rellenar el espacio (Ttri/2 y T/2). Para las actividades de esta tarea se sugiere arrancar de octaedros construidos en plastilina, para poder descomponerlos, y luego, piezas sólidas o papel y regla y compás para construir el desarrollo plano de los cuerpos, siempre complementado con GeoGebra 3D.

Tarea 3: *Nuevos cuerpos basados en las piezas*: Obtener nuevos cuerpos empleando Ttri/2 y T/2, caracterizarlos geométricamente, generar poliedros con ellos, arrancando del Octaedro, Tetraedro, Cubo y Pirámide, pero creando nuevos poliedros irregulares, caracterizar estos poliedros, identificar movimientos que transforman estos poliedros en otros nuevos. Se requiere el puzle (4 Ttri/2, dos de cada clase + 2 T/2, que lo construyan los estudiantes a partir de su desarrollo plano), y GeoGebra 3D, para dibujarlos y construir sus imágenes en diferentes perspectivas.

3.1. Estudio geométrico en las tareas

A continuación se presentan las actividades concretas de cada tarea, y se sugieren algunos estudios geométricos que se pueden plantear

Tarea 1: El Octaedro Regular

El octaedro es un poliedro regular convexo, Guillen menciona que además es un deltaedro cuerpo geométrico formado por triángulos equiláteros, (Guillen, 1997), con todos los vértices de orden 4. Además, reúne las cualidades de una *bipirámide* cuadrada y un *antiprisma* triangular uniforme.

Es una bipirámide en las tres direcciones de los ejes coordenados, pues puede descomponerse siguiendo planos perpendiculares a cada eje en dos pirámides iguales a las que llamaremos P.

Es un antiprisma triangular, pues está formado por dos triángulos equiláteros iguales situados en planos paralelos, girados y cuyos vértices se unen por medio de triángulos equiláteros.

Por medio de planos que pasan por el ápice y las diagonales del cuadrado de la base, P se va a descomponer en 4 pirámides triangulares, a las que llamaremos Tetraedro Trirectángulo, y denominaremos en adelante Ttri.

Descomponemos a su vez el Ttri en dos pirámides triangulares, por medio de un plano de simetría, bisectriz de uno de los diedros rectángulos de sus caras iguales. A esta mitad del tetraedro trirectángulo la denominaremos Ttri/2.

Estas formas se pueden apreciar en la figura 2, con las identificaciones que aparecen en ella.

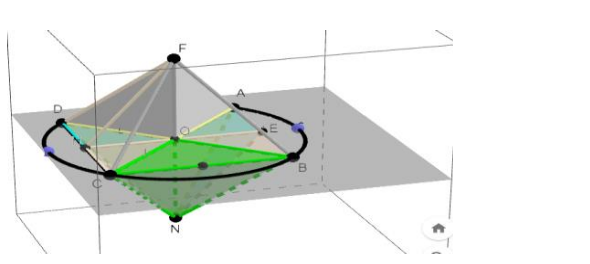


Figura 2a: Octaedro regular

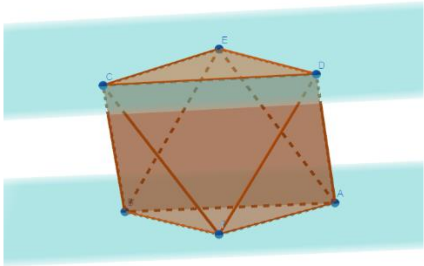
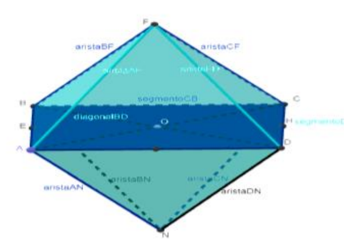


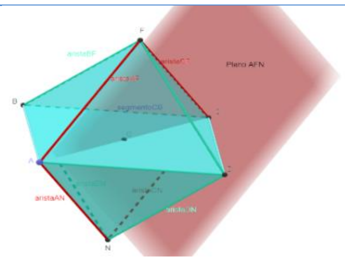
Figura 2b: Octaedro como antiprisma triangular uniforme

Figura 2. Poliedros para el estudio del octaedro.

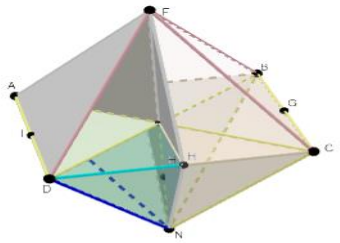
Secciones planas en el octaedro

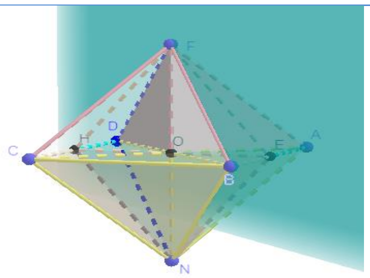
Para apreciar las características y dimensiones de estos cuerpos proponemos profundizar en el octaedro, identificando figuras en su interior, comenzando por secciones planas. Empezamos por obtener secciones formadas por aristas, con lo que surgen, además de los triángulos equiláteros que forman sus caras, tres cuadrados. Identificamos estos cuadrados mediante los planos de simetría que forman las bases de las pirámides que hacen que el octaedro sea *bipirámide*. La intersección del plano ABC con el octaedro es la sección cuadrada ABCD (fig. 3.a, b y c.).





Figuras 3a, b y c, secciones cuadradas de octaedro





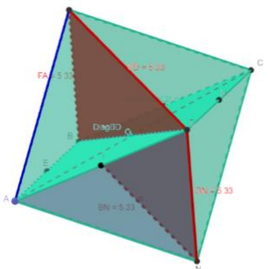


Figura 3 d, e y f : Todas las secciones cuadradas del octaedro	Figura 3 g: octaedro papiroflexia

Figura 3. Poliedros para el estudio de las secciones cuadradas del octaedro

La identificación de cuadrados en el octaedro nos hace apreciar que todas las aristas del octaedro definen tres cuadrados que tienen diagonales comunes, esto favorece identificar el octaedro con la construcción en papiroflexia, que aparece en la figura 3 g.

Las tareas que proponemos demandan a los alumnos estudiar geométricamente el octaedro y los cuerpos en los que vamos a descomponerlo. Para ello nos valdremos del trabajo conjunto con puzles (Flores, 2007), de cuerpos construidos a partir de papiroflexia o de recortables, para lo que deberán hacer sus desarrollos planos. Las tareas que planteamos podrían iniciarse utilizando modelos de octaedros en madera, para apreciar los polígonos que resaltan (los triángulos y cuadrados), para luego pasar a emplear modelos huecos de plástico transparente, que se puedan rellenar de líquido coloreado, que, al volcarlo, permita ver secciones planas en la superficie del líquido. El dibujo de los desarrollos planos y el estudio posterior y complementario, se sugiere realizar utilizando el GeoGebra (2D para los desarrollos y 3D para estudiar los cuerpos), que permite representar las figuras con más precisión. Todos estos elementos favorecerán identificar elementos geométricos, caracterizarlos, ubicarlos y moverlos, realizando siempre razonamientos geométricos que los justifiquen, y empleando y desarrollando habilidades de visualización, con lo que estarán desarrollando su sentido espacial.

Un ejemplo del tipo de estudios geométricos que esperamos que realicen los alumnos, en este caso sobre el Ttri, aparece en el cuadro 1.

La sección contenida en un plano que pasa por la altura NF del octaedro y lo interseca por las aristas, es perpendicular a la diagonal AC de la sección cuadrada ABCD y pasa por el centro O del octaedro. Estas secciones nos permiten apreciar características de las líneas dentro del octaedro, como las siguientes:

FN=2OF=2ON; OF=ON, por ser catetos de triángulos rectángulos isósceles

AC=2AO=2OC; AO=OC, por ser catetos de triángulos rectángulos isósceles congruentes.

Los 4 lados el polígono AFCN son iguales por ser aristas de P: AF, FC, CN, AN. AC=AO+OC

AC es diagonal de la sección cuadrada ABCD. FN es la altura y diagonal del octaedro.

FN= AC (luego el Ttri tiene 3 caras que son triángulos rectángulos isósceles y la otra es una de las caras de T). Las diagonales AC=FN, con lo cual AFCN es un cuadrado.

El cuadrado AFCN está contenido en un plano que pasa por la altura FN y es perpendicular a la diagonal AC, en el punto O (esto se puede apreciar cortando a P con un plano que pase por su ápice perpendicularmente por la diagonal AC)

BD diagonal de la sección cuadrada ABCD. Con ello, se demuestra que los cuadrados ABCD, BFDN y AFCN son congruentes.(Figura 3, d y e)

Cuadro 1. Estudio geométrico de la sección cuadrada en el octaedro y su repercusión en las características de Ttri y Ttri/2

Otras secciones planas en el octaedro

A continuación buscamos otras secciones planas, sin necesidad de contener aristas de los cuerpos.

La primera es el rombo. El plano de simetría pasa por dos vértices opuestos (de alguno de los cuadrados anteriores), y corta a dos aristas del cuadrado de la base de las pirámides, por sus puntos medios, determina una sección en forma de rombo.

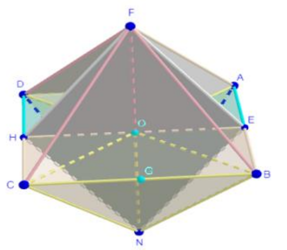
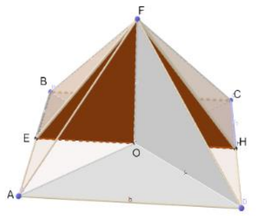
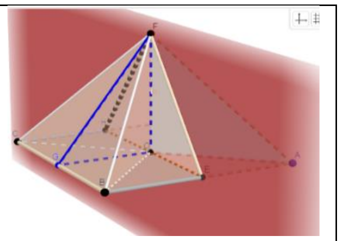
		

Fig 4.a Rombo FENH al interior del octaedro (en color gris oscuro)	FIG 4.b. Triángulo rectángulo isósceles FEH	Fig 4c Mitad de rombo: triangulo isósceles EFH cortado por el plano r (en rojo)

Figura 4. Estudio de la seccion rombica del octaedro.

En la figura 4 aparece el rombo (4.a), así como triángulos isósceles que formanparte del mismo.

Pedimos a los estudiantes que localicen el rombo y realicen el estudio geométrico que justifique sus características, esperando que razonen de manera similar a como se expresa en el cuadro 2.

El triángulo FEH (mitad del rombo), tiene como vértices: F el ápice de P y los otros dos vértices se corresponden con los puntos medios E y H de los lados AB y CD respectivamente. Las aristas de FEH son, FE y FH lados iguales del triángulo isósceles FEH; los lados FE y FH son respectivamente las apotemas de las caras no contiguas

ABF y DCF de P; la base EH es perpendicular a la altura FO y es congruente con la arista de P. EH, pasa por los puntos medios E y H de 2 las aristas opuestos AB y CD de la sección cuadrada ABCD, donde las apotemas FE y FH los interceptan. Cortando con el plano perpendicular r a P pasando por el vértice F y por la mitad de su base, se obtiene la mitad de un rombo EFH, la mitad de este es el triángulo rectángulo FOE que es la cuarta parte del rombo (ver fig 4.b.). El triángulo FOG divide a Ttri CBOF en dos Ttri/2, BGOF y CGOF (FIG 6C y 6.D

El triángulo rectángulo FOE, tiene a FE, como hipotenusa (apotema triángulo equilátero AFB, cara frontal de Ttri ABOF), FO, como cateto mayor (lado cubo y altura Ttri) y a OE, cateto menor (mitad de la arista de P). FO es mayor que OE porque lado cubo mayor que la mitad de arista de P. La Diagonal mayor es FN=2FO=2ON. La diagonal menor es 2OE=2OH=EH=AD arista de P=arista de T. Es por tanto un paralelogramo, por situar sus aristas en caras paralelas de un antiprisma, que tiene los cuatro lados iguales, pero una diagonal es mayor que la otra.

La diagonal mayor del rombo se corresponde con la altura del octaedro, mientras que la diagonal menor del rombo se corresponde con la arista de P (figuras 4a y 4.c).

Gracias a estas apreciaciones podemos apreciar con más claridad la relación entre las aristas de los poliedros Ttri/2

Cuadro 2. Estudio geométrico de la sección rómbica del octaedro

Buscamos otras secciones planas en el octaedro. Un reto interesante es buscar el hexágono regular. Para ello conviene consider el octaedro como *antiprisma*, y trazar el plano paralelo medio, a las dos caras del mismo (figura 5a). A partir de este hallazgo se pueden buscar cuáles son las secciones de mayor y menor número de lados, así como qué diferentes variaciones adminten estos polígonos. ¿Los únicos polígonos regulares son el cuadrado y el hexágono? ¿Qué otros cuadriláteros se pueden formar? ¿Pentágonos? En la figura 5b se aprecia un pentágono, y en la 5c, algunos cuadriláteros.

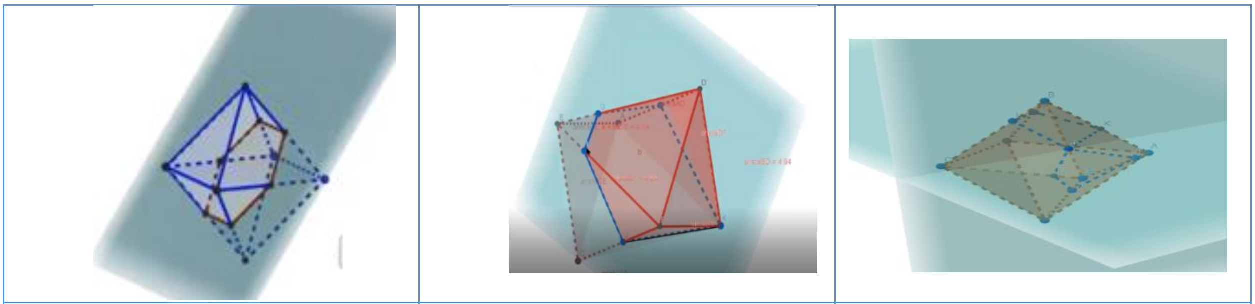


Figura 5a: sección hexagonal	Figura 5b: sección pentágono irregular	Figura 5c: secciones cuadriláteras

Figura 5. Otras secciones planas en el octaedro

Tarea 2: Descomposición del octaedro en pirámides

La descomposición más sencilla del octaedro es en pirámides cuadradas. Toda descomposición de estas pirámides servirá para el octaedro. En la figura 6 aparece una de las pirámides mitades, y divisiones en su interior.

Si dividimos P por planos perpendiculares a la base que pasen por planos de simetría de dicha base obtenemos varias pirámides, entre ellas cuatro Ttri, que a su vez se descompone en dos Ttri/2.

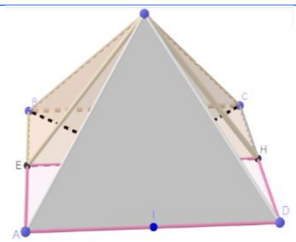
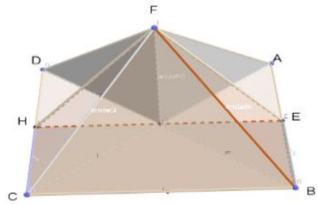
	

Figura 6.a.	Figura 6.b.

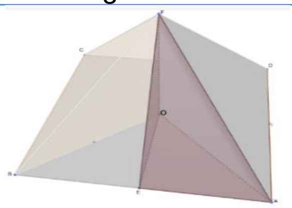
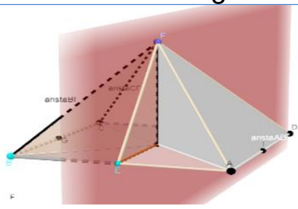

	

Figura 6c	Figura 6d

Figura 6. Descomposición del octaedro en pirámides.

El Ttri también aparece mediante otras descomposiciones, tal como mostramos en otros trabajos (Guerrero y Flores, 2015). Si truncamos un cubo mediante un plano que pase por las diagonales de tres caras que concurren en el mismo vértice, el trozo que eliminamos corresponde a un Ttri. Viene a ser la esquina de un cubo, formado por 3 triángulos rectángulos isósceles y un triángulo equilátero, de lado la diagonal de la cara del cubo (Figura 7a).

Si del cubo quitamos cuatro Ttri con aristas contiguas, dejan en su interior un Tetraedro de arista la diagonal de cada del cubo (figura 7.b)

La red de cubos que recubre el espacio se ve convertida en red de Octaedros (por unión de 8Ttri) y Tetraedros, por medio del truncamiento de cubos adyacentes de la forma señalada anteriormente (Figura 7 c y d: Red de cubos y red de T y Octaedros).

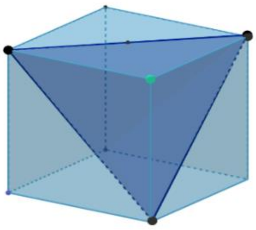
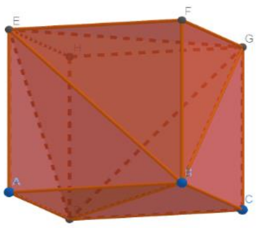
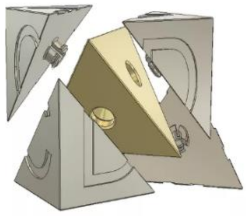
		

Figura 7a: Ttri como esquina del cubo	Figura 7b: Cubo se compone de cuatro Ttri y un T	Figura 7e: Puzle del cubo a partir de Tetraedro y Ttri[1]

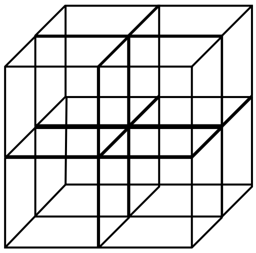
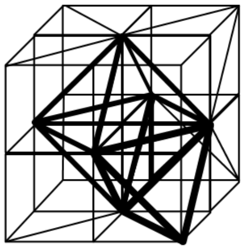

	

Figura 7c: Red de cubos	Figura 7d: Red de T y Octaedros	

Figura 7. Pirámides dentro del cubo y recubrimiento del espacio

Por tanto podemos emplear partes de estas figuras para generar nuevas formas. Para ello vamos a comenzar por definir un nuevo cuerpo, la mitad del Tetraedro (T/2).

El desarrollo de estas tareas se afianza si se emplea cubos y tetraedros en plastilina, para poder llevar a cabo el truncamiento mediante puzles en los que se complementan 4 Ttri con un Tetraedro, para formar el cubo (Figura 7e).

Si cortamos el tetraedro T de base ADF y apice L, por un plano que pase por las apotemas KA y KD, siendo K el punto medio de la arista LF, obtenemos dos tetraedros congruentes, cada uno la mitad de T, es decir que equivale a T/2(ver fig 8a y 8b).

T/2, tiene como caras un triangulo equilatero AFD, dos triangulos rectangulos escalenos DFK (de aristas, DK apotema del triangulo equilatero LDF, FK cateto menor es la mitad de la arista de T y DF hipotenusa y tambien arista de T) y el AKF (de aristas, AK apotema del triangulo equilatero AFL, FK cateto menor y FA hipotenusa y tambien arista de T), y un triángulo isósceles AKD, da lados iguales las aristas AK y AD.

Estudiar las características de esta forma constituirá una tarea propuesta, debiendo llegar a determinar los ángulos y longitudes de aristas, para poder obtener el desarrollo plano, pero pudiendo abarcar la determinación de los rectilíneos de todos los diedros, especialmente si se pretende construir con ayuda de otros medios, como fresadoras programables o impresoras 3D.

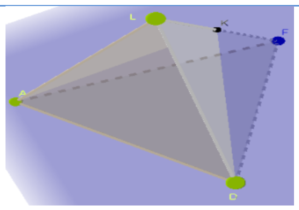
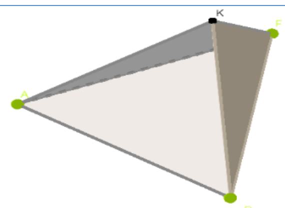
	

Fig. 8.a. T cortado por el plano DKA	Fig. 8.b. T/2

Figura 8. Tetraedro T y mitad de tetraedro T/2.

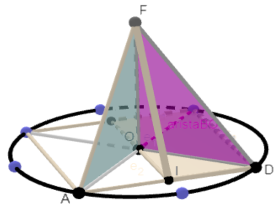
[1] Imagen de https://cults3d.com/es/modelo-3d/arte/tetrahedral-dissection-of-the-cube-cube-puzzle

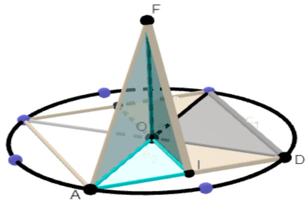
Las dos pirámides Ttri/2 y T/2 serán las piezas de un puzle con el que pasamos a la tercera tarea.

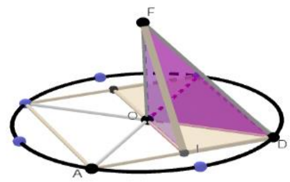
Tarea 3: *Nuevos cuerpos basados en las piezas*

Esta tarea tiene una primera parte que es de juego libre con las piezas Ttri/2 y T/2, para construir cuerpos nuevos, y caracterizarlos. Para ello los estudiantes deben contar con piezas de estos dos tipos, pero ¿cuántas? ¿cuántas de cada clase?.

En primer lugar conviene apreciar que hay dos Ttri/2 diferentes, simétricos respecto al plano que los ha escindido de Ttri (figura 9). Al trabajar con estos sólidos se aprecia la imposibilidad de mover uno de ellos para obtener el otro, o sea, la imposibilidad de formar una P con 8 Ttri/2_1 o con 8Ttri/2_2.







Ttri genera 2 Ttri/2	AOIF, Ttri/2_1	IODF, Ttri/2_2

Figura 9. Dos tipos de Ttri/2: Ttri/2_1 y Ttri/2_2,

Haciendo un razonamiento similar, podríamos pensar que necesitamos dos T/2 diferentes, pero, al ser este cuerpo simétrico respecto a un plano que pasa por las alturas de los triángulos equilátero e isósceles, no se obtienen dos piezas diferentes, sino son superponibles en el espacio. Apreciar esta situación obliga a clarificar aspectos de orientación y movimientos.

Partamos, pues, con 4 Ttri/2_1, 4 Ttri/2_2, y al menos 2 T/2. ¿Qué cuerpos nuevos podemos formar con este puzle? ¿Hay alguna repercusión geométrica de considerar doble número de piezas Ttri/2 que T/2?

Las primeras construcciones deben ser los poliedros regulares, Tetraedro, Octaedro y Cubo, luego P, pirámide cuadrada de iguales aristas, para lo que necesitamos 4 Ttri/2 de cada clase.

Con estas piezas se pueden construir varios prismas triangulares. Los tres más directos requieren 4 Ttri/2 (2 de cada tipo), y un T/2, ambos rectos, variando en la posición de las piezas y en las caras del resultado. El primero, la mitad de un cubo, es un prisma triangular de triángulos rectángulos isósceles (Fig. 10.a), el segundo es un prisma triangular isósceles agudo (Fig. 10.b) y el tercero prisma triangular rectángulo escaleno (Fig. 10.c).

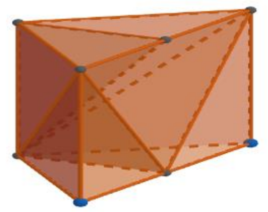
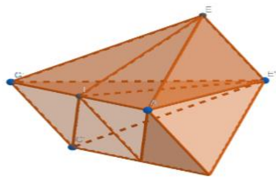
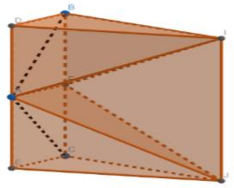
		

Figura 10.a. Prisma triangular isósceles rectángulo, mitad de cubo	Figura 10.b. Prisma triangular isósceles acutángulo	Figura 10.c. Prisma triangular rectángulo escaleno

Figura 10. Composición de prismas triangulares rectos.

Pero ¿se pueden formar prismas triangulares oblicuos? ¿Cuál de los anteriores se presta a ello? ¿Qué transformación hay que hacer en sus piezas para generarlo? Identificar prismas oblicuos requiere habilidades de discriminación visual. Una traslación de diversas piezas genera los prismas oblicuos de estos tres dados (figura 11a, b y c).

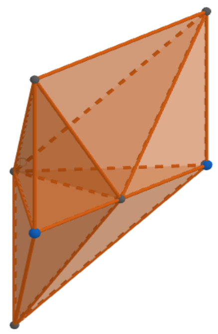
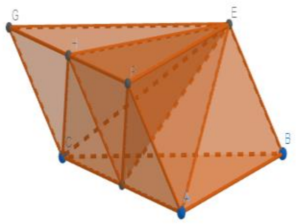
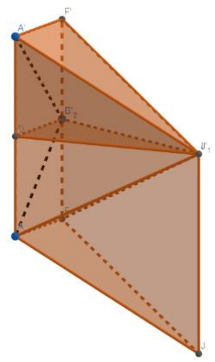
		

Figura 11a. Prisma oblicuo triangular isósceles rectángulo	Figura 11.b. Prisma oblicuo triangular isósceles acutángulo	Figura 11.c. Prisma oblicuo triangular rectángulo escaleno

Figura 11. Composición de prismas triangulares oblicuos

La siguiente actividad de la tarea 3 consistirá en formar nuevos poliedros, siempre uniendo caras completas. Se realizará la construcción, caracterización del poliedro construido y posterior construcción con GeoGebra 3D, lo que facilita el razonamiento geométrico. Como ejemplo, se puede arrancar de construir pirámides cuadriláteras ¿qué cuadriláteros pueden constituir las bases?

Arrancando de pirámides construidas con dos piezas, se puede llegar a diversas formas (figura 12). Posteriormente con tres o más piezas. Dos líneas de indagación surgen, identificar los cuadriláteros posibles y debatir sobre la forma de estas pirámides, especialmente los conceptos de pirámide recta y oblicua.

Esta tarea se puede prolongar ampliamente, dependiendo de la habilidad de los participantes.

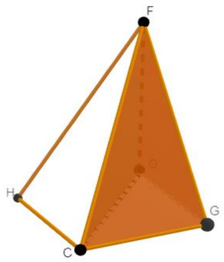


Figura 12a. Pirámide cuadrada 2 Ttri/2 (i+ii)

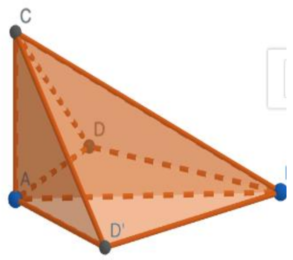


Figura 12b. Pirámide base trapezoide simétrico 2 Ttri/2 (i+ii)

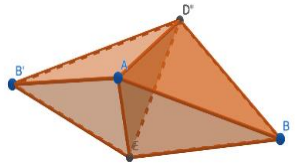


Figura 12c. Pirámide de base paralelogramo 2 Ttri/2 (i+ii)

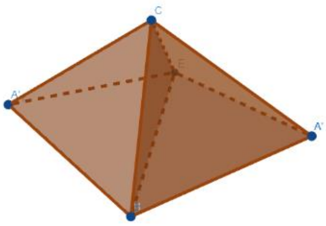


Figura 12d. Pirámide de base trapezoide simétrico 2 T/2

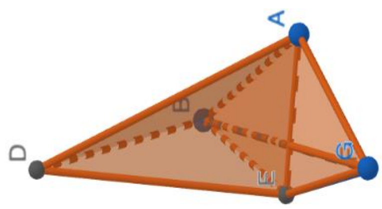


Figura 12e. Pirámide de base trapecio rectángulo Ttri/2 + T/2

Figura 12. Composición de pirámides cuadriláteras.

4. Sentido espacial en las tareas

Hemos descrito tareas basadas en pirámides, que tiene por objeto desarrollar el sentido espacial de los estudiantes, entendiendo que la finalidad del aprendizaje geométrico es que adquiera competencia espacial, que le disponga para situarse en el espacio que le rodea, y pueda resolver problemas relacionados con ello.

Esto es lo que hemos llamado adquirir sentido espacial (Flores, Ramírez-Uclés y Del Río, 2015), requiere desarrollar de manera coordinada sus componentes, (Identificar y manejar elementos geométricos **EG**, relaciones geométricas **RG**, y ubicar los elementos en el espacio, con posibilidad de realizar movimientos **UM**), emplear destrezas de orientación (**O**) y desarrollar y poner en juego habilidades de visualización (**HV**)

En la tabla 2, relacionamos las tareas con las componentes del sentido espacial. Mencionamos las tareas propuestas y las situaciones en las estas son puestas en juego.

Tarea	Situaciones en que se usan las componentes	Componentes geométricas	Habilidades visualización
1.Octaedro regular: Estudiar el octaedro regular: 1.1. Identificar octaedro como poliedro regular,	Emplea papel y regla para realizar desarrollo plano del octaedro. Construye el octaedro en acetato a partir de su desarrollo	EG: Concepto geométricos ligados a definiciones de estos poliedros, polígonos, planos.	Percepción visual, relación figura contexto (cambiar

deltaedro, antiprisma y bipirámide. 1.2. Identificar secciones pla-nas al interior del octaedro 1.3. Identificar secciones planas del octaedro de mayor y menor número de lados. 1.4. Identificar trozos del octaedro	plano, y también con GeoGebra, además lo rellena de líquido y para identificar diferentes elementos. Posee conocimientos geométricos para identificar perpendicularidad y paralelismo en el plano y en el espacio, por ejemplo, si un plano es perpendicular a una arista del octaedro o a un segmento dado de un determinado sólido.	RG: Relaciones para justificar sus características, para obtener secciones. UM: Captar posición relativa de planos respecto al octaedro	percepción del octaedro). Percepción de figuras planas en cuerpos tridimensional es
2. Descomposición de octaedro. 2.1. Descomponer octaedro en pirámides 2.2. Relacionar Ttri con Tetraedro regular y cubo 2.3. Caracterizar Ttri.	Construir octaedro en plastilina y en plástico transparente a partir de su desarrollo plano. Identifica ejes de simetría para cortar con planos simétricos al octaedro y obtener las secciones cuadradas, así como también determina el plano de simetría para obtener la sección del rombo Construye en origami, en acetato y en GeoGebra las secciones cuadradas del octaedro y concluye que son congruentes. Traza la sección hexagonal regular considerando el octaedro como antiprisma. Traza secciones poligonales no regulares como pentágonos, cuadriláteros etc. Reconoce los elementos del octaedro para hacer la caracterización y representación del mismo.	EG: conceptos geométricos que permiten identificar (orden vértice, nombres, triángulos). RG: Relaciones para justificar sus características para obtener caras de poliedros nuevos. UM: Captar posición relativa de piezas en P y Octaedro, así como en Tetraedro y Cubo.	Percepción figura contexto (identificar piezas en diferentes cuerpos -P, O, T-) Percepción espacial de caras en cuerpos sólidos, y en representació n plana cuando se hace con GeoGebra 3D.
3. Nuevos cuerpos 3.1. Obtener el octaedro regular, el tetraedro, el cubo y la pirámide 3.2. Obtener prismas empleando el puzle, discutir prismas posibles, apreciar y diferenciar prismas rectos y oblicuos 3.3. Obtener pirámides de base cuadrilátera, con puzle, discutir posibles, debatir sobre concepto de pirámide recta y oblicua	Identifica las piezas, aprecia la diferencia entre los dos Ttri/2 simétricos, y la no necesidad de dos T/2. Identifica relaciones como: P, cubo y Ttri tienen la misma altura. P tiene por caras triángulos equiláteros; una de las caras de Ttri es un triángulo equilátero, y en consecuencia la mitad de este triángulo será una de las caras de Ttri/2 Hace conjeturas para combinar partes, estableciendo congruencias y semejanzas,	EG: Conceptos geométricos que permiten agrupar piezas, o formar el poliedro pedido (base, arista, caras laterales, forma de estas caras,) RG: Relaciones para justificar las características del poliedro obtenido (paralelismo de bases, paralelismo de aristas en prismas, naturaleza de la pirámide, etc.)	Percepción figura contexto (identificar piezas en diferentes cuerpos -P, O, T-) Percepción espacial de caras en cuerpos sólidos, identificación de características de los poliedros

3.4. Identificar movimientos que los transforman en otros nuevos	hasta llegar a componer otros poliedros Identifica los componentes de cada forma poliédrica (base, altura, caras laterales, Maneja software como GeoGebra o Cabri etc., para representar sólidos y transformarlos Modifica componentes y observa sólidos de diferentes perspectivas. Identifica y compara elementos congruentes de las partes.	UM: Identificar movimientos que transforma prisma recto en oblicuo, piezas que se transforman, etc. Identificar posición de piezas en nuevos poliedros	formados, independiente mente de su posición. Relación con representació n plana cuando se hace con GeoGebra 3D

Tabla 2. Relación de las tareas con el desarrollo del sentido espacial

5. Cierre

En la tabla 1, las actividades que debe realizar el estudiante para resolver las tareas son amplias, y ponen en juego diversas componentes del sentido espacial. El manejo, secuencial al principio, pero que puede convertirse en simultáneo, según los intereses de los estudiantes, de modelos sólidos, como el puzle, junto con la posibilidad de realizar las propias piezas, mediante ensamblaje de desarrollos planos o de construcciones conocidas (como polidrom, por ejemplo), y su trabajo mediante representaciones planas de los cuerpos tridimensionales, con GeoGebra, con lápiz y papel, con objetos sólidos, etc., ayuda a coordinar el dominio de los elementos geométricos, con la orientación y las habilidades de visualización, contribuyendo con ello al desarrollo del sentido espacial.

Referencias bibliográficas

Flores, P. (2007). Pirámides rellenas de .. pirámides. Puzles espaciales que favorecen la visualización. En Flores, P., Ruiz, F. y De la Fuente, M.. (Coords.), *Geometría para el siglo XXI*. (pp. 223-247). Badajoz, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) y SAEM THALES.

Flores, P. y Ramírez-Uclés. (2015). Volumen sin fórmulas. Taller en 17 Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Sánchez, P. (Ed.), Actas JAEM 2015. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, (p. 57). FESPM. Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia, SEMRM. http://17jaem.semrm.com/actas/actas_17JAEM_2015.pdf

Flores, P., Ramírez-Uclés, R. y Del Río, A. (2015). Sentido espacial. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*, (pp. 127-145). Madrid, Pirámide.

Guerrero, S.. (2014). Obtención del volumen del tetraedro por alumnos con talento matemático, sin emplear fórmulas. *Trabajo Fin de Máster de Didáctica de la Matemática*, Universidad de Granada, Junio de 2014.

Guerrero, S. y Flores, P. (2015). Obtención del volumen del tetraedro por alumnos con talento matemático, sin emplear formulas. *Épsilon*, Vol. 32(2), nº 90, 21-31.

Guillén, G. (1997). *Poliedros*. Madrid, Síntesis.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas*.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia MEN (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Versión 2.

Sandra del Carmen Guerrero García: Licenciada en Matemáticas por la Universidad de Nariño, Colombia. Docente del Departamento de Matemáticas en misma Institución. Máster en Didáctica de las Matemáticas por Universidad de Granada, España. Investigo en la creación de nuevos puzles y de material didáctico comprendidos en la línea de Didáctica. Eleyon328@gmail.com

Pablo Flores Martínez: Doctor en Didáctica de la Matemática, Profesor en Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada, España. Trabaja en formación de Docentes propiciando la investigación, y elementos plásticos como recurso didáctico (humor, puzles, enigmas, paradojas, metáforas, etc.). pflores@ugr.es