REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 49. Abril 2017
Página 231-237

Funciones afines en contextos extra-matemáticos, con variables discretas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

En una bodega se vende botellas de un litro de jugo a 6 soles cada una; sin embargo, tiene una oferta cuando se compra más de una botella: pagas por dos botellas y te llevas tres.

Expresar algebraicamente la función p que hace corresponder a la compra de n botellas de jugo, la cantidad p(n) de soles que se debe pagar, haciendo uso de la oferta.

Este problema surgió en un grupo formado por dos alumnos del primer ciclo de profesorado de secundaria en una clase de matemática. La idea brotó ante una situación propuesta a los alumnos con la invitación de proponer (crear) algún problema relacionado con tal situación. Se les hizo dos requerimientos previos: hacer una lista de los conceptos matemáticos que consideraran están relacionados o podrían relacionarlos con la situación descrita; y hacer una lista de preguntas que les suscite la situación.

La situación fue la siguiente:

> Las bodegas A, B y C, cercanas entre sí, venden determinada marca de jugo en botellas de litro, cada una a S/. 6.00; sin embargo, cada bodega brinda ofertas diferentes, cuando se compra más de una botella. Así,
>
> Bodega A: Pagas por 2 botellas y llevas 3
>
> Bodega B: Si llevas 2 botellas, por la segunda pagas S/. 3.00
>
> Bodega C: Pagas por 3 botellas y llevas 4.

Para crear el problema, se les indicó que podían restringir o ampliar la información que encontraran en la situación.

El grupo aludido de alumnos, consideró entre los conceptos el de *función*. De los ocho grupos, solo dos consideraron este concepto entre los relacionados con la situación. Uno de los integrantes del grupo ensayó trabajar con una función afín y a partir de ella describir una oferta, pero no logró concretar la idea. Al comentar sus avances, les sugerí partir de las ofertas ya descritas y considerar como problema el establecer una función tomando solo una de las ofertas. Al presentar el trabajo, no recogieron esta idea y tampoco la del alumno. En conversaciones con los alumnos quedó claro que, para ellos, trabajar con funciones les parecía que era entrar en "una parte complicada de la matemática"

En el grupo encontraron algunos valores de los pagos que se harían por llevar determinado número de botellas (ni una más de las que se desean comprar), usando la oferta de la bodega A, pero no continuaron para llegar a una expresión algebraica. Así, encontraron lo siguiente:

Si llevas 1 botella, pagas 6 soles

Si llevas 2 botellas, pagas 12 soles

Si llevas 3 botellas, pagas 12 soles

Si llevas 4 botellas, pagas 18 soles

Si llevas 5 botellas, pagas 24 soles

Si llevas 6 botellas, pagas 24 soles

…

¿Hay alguna forma de expresar de manera general la cantidad $p(n)$ de soles que se debe pagar para llevar exactamente n botellas, haciendo uso de la oferta de la bodega A?

Una observación hecha por profesores de secundaria – en otro taller con la misma situación – es que si n es múltiplo de 3; digamos $n = 3q$, (q un número natural), entonces se pagará $12q$ soles, pues se forman q grupos de 3 botellas y por cada grupo se paga 12 soles.

¿Cómo se formaliza si n no es múltiplo de 3? Esto no llegaron a hacerlo.

Es importante recordar que si n es entero, al dividirlo entre 3, su residuo puede ser 0, 1 o 2; y en consecuencia, se cumple una de tres posibilidades:

i) n es múltiplo de 3,
ii) n es múltiplo de 3, más 1,
iii) n es múltiplo de 3, más 2.

Para formalizar la función a partir de la situación dada, consideramos n un número entero no negativo; es decir $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. Así,

en el caso *(i)*, $n = 3q$, con q un número entero no negativo;

en el caso *(ii)*, $n = 3q + 1$, con q un número entero no negativo; y

en el caso *(iii)*, $n = 3q + 2$, con q un número entero no negativo.

Algunos ejemplos del caso (i) son: $n = 0$; $n = 3$; $n = 6$; $n = 9$; $n = 99$. De acuerdo a la observación antes anotada, los correspondientes valores de $p(n)$ son

$p(0) = p(3\text{x}0) = 12\ \text{x}0 = 0;$

$p(3) = p(3x1) = 12x1 = 12;$

$p(6) = p(3x2) = 12x2 = 24;$

$p(9) = p(3x3) = 12x3 = 36;$

$p(99) = p(3x33) = 12x33 = 396.$

Observamos que $p(3q) = 12q$, para $q \in \mathbb{N}$ (q número natural).

Algunos ejemplos del caso (ii) son: $n = 1$; $n= 4$; $n = 7$; $n = 10$; $n = 100$.

La idea intuitiva para obtener lo que se debe pagar por estas cantidades de botellas es formar la mayor cantidad de grupos de 3 botellas, por cada grupo pagar 12 soles y por la botella restante pagar 6 soles. Así, los correspondientes pagos $p(n)$ son:

$p(1) = p(3x0 + 1) = 12 x0 + 6 = 6;$

$p(4) = p(3x1 +1) = 12x1 + 6 = 18;$

$p(7) = p(3x2 +1) = 12x2 + 6 = 30;$

$p(10) = p(3x3 +1) = 12x3 + 6 = 42;$

$p(100) = p(3x33 +1) = 12x33 + 6 = 396 + 6 = 402$

Observamos que $p(3q + 1) = 12q + 6$, para $q \in \mathbb{N}$.

Análogamente, algunos ejemplos para el caso (iii) son $n = 2$; $n = 5$; $n = 8$; $n = 11$; $n = 101$; y siguiendo la idea intuitiva de formar la mayor cantidad de grupos de 3 botellas y pagar 6 soles por cada una de las botellas restantes, que en este caso son 2, los correspondientes valores de $p(n)$ son:

$p(2) = p(3x0 + 2) = 12x0 + 6x2 = 12;$

$p(5) = p(3x1 +2) = 12x1 + 6x2 = 24;$

$p(8) = p(3x2 +2) = 12x2 + 6x2 = 36;$

$p(11) = p(3x3 +2) = 12x3 + 6x2 = 48;$

$p(101) = p(3x33 +2) = 12x33 + 6x2 = 18 = 396 + 12 = 408$

Observamos que $p(3q + 2) = 12q + 12$, para $q \in \mathbb{N}$.

Con esta información, ¿ya se puede obtener una expresión general para la función p?

Una posibilidad es resumir en una expresión el patrón que se observa para cada uno de los casos y así tener

$$p(n) = \begin{cases} 12\,q & si\ n = 3q,\ \ q \in \mathbb{N} \\ 12q + 6 & si\ n = 3q + 1,\ \ q \in \mathbb{N} \\ 12q + 12 & si\ n = 3q + 2,\ \ q \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Sin embargo, observamos que la variable no aparece explícitamente en la expresión que da el valor de la función. Aparece la variable *q*. Esto podemos arreglarlo haciendo el cambio de variable correspondiente a cada caso:

$$n = 3q \Rightarrow q = \frac{n}{3} \;\Rightarrow\; p(n) = 12q = 4n$$

$$n = 3q + 1 \Rightarrow q = \frac{n-1}{3} \;\Rightarrow\; p(n) = 12q + 6 = 12\left(\frac{n-1}{3}\right) + 6 = 4n + 2$$

$$n = 3q + 2 \Rightarrow q = \frac{n-2}{3} \;\Rightarrow\; p(n) = 12q + 12 = 12\left(\frac{n-2}{3}\right) + 12 = 4n + 4$$

Así tenemos ahora:

$$p(n) = \begin{cases} 4n & si\ n = 3q,\ \ q \in \mathbb{N} \\ 4n + 2 & si\ n = 3q + 1,\ q \in \mathbb{N} \\ 4n + 4 & si\ n = 3q + 2,\ q \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La función pago está definida por tres funciones afines restringidas a números enteros no negativos y, respectivamente, a múltiplos de 3; múltiplos de 3, más 1; y múltiplos de 3, más 2. Obviamente las imágenes correspondientes a los valores de su dominio son números enteros y podemos visualizar esta correspondencia en una representación gráfica. Hemos usado GeoGebra y hemos denominado *f*, *g* y *h* a las funciones que establecen las correspondencias para los múltiplos de 3; múltiplos de 3, más 1; y múltiplos de 3, más 2. Se ve la ubicación de los puntos en las rectas que corresponden a las funciones afines sin las restricciones discretas que este problema impone.

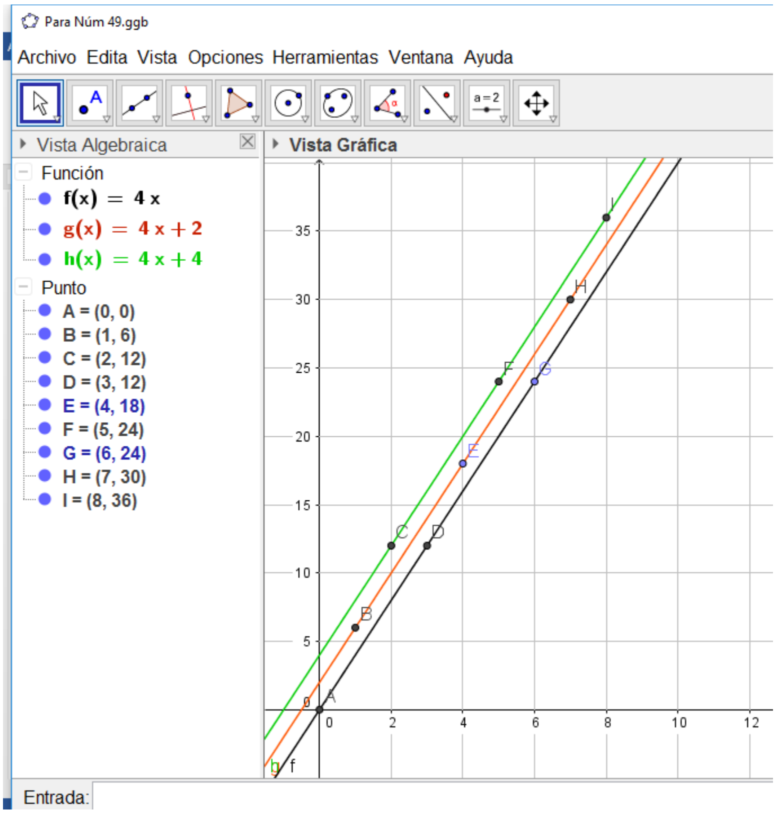

Figura 1

Resulta interesante plantearse el reto de encontrar una función pago que pueda expresarse en una sola línea.

A continuación doy una función pago *k*, usando la función máximo entero, y su gráfico correspondiente en la Figura 2.

$$k(n) = 6\left(n - \left[\!\left[\frac{n}{3}\right]\!\right]\right)\ ;\ n \in \mathbb{N}$$

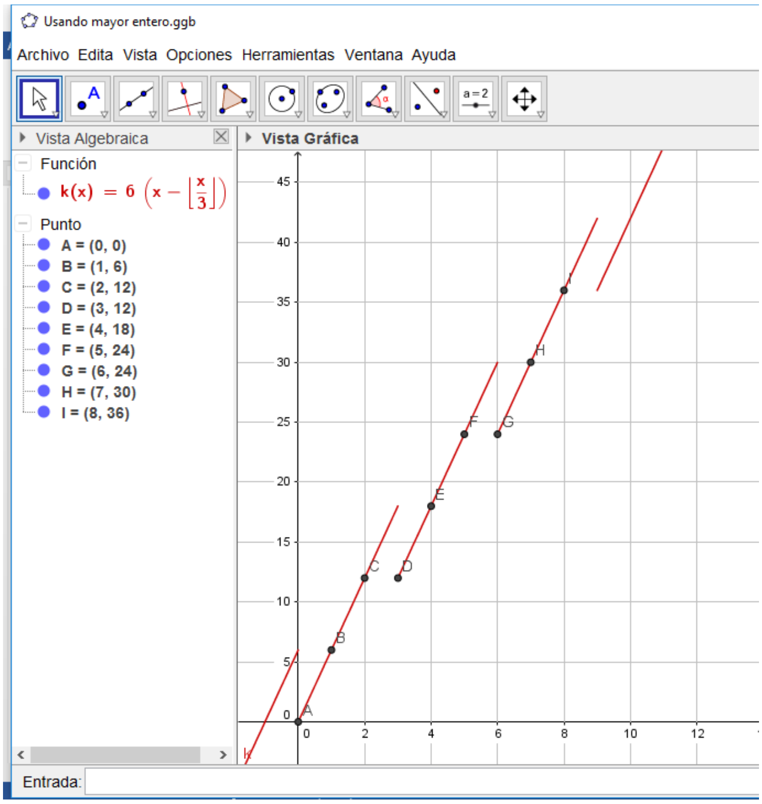

Figura 2

Se ve la coincidencia de las coordenadas de los puntos de A, B, C, D, E, F, G, H e I, con los mostrados en la Figura 1. En cada figura las coordenadas de estos puntos han sido obtenidas usando la(s) función(es) considerada(s) en ella. Queda como ejercicio para el lector encontrar un razonamiento que lleve a la obtención de tal expresión con la función máximo entero.

Comentarios

1. Pocos grupos advirtieron la posibilidad de relacionar el concepto de función con la situación dada y ningún grupo – ni de profesores en formación ni de profesores en ejercicio – propuso un problema usando explícitamente este concepto. Esto revela que en la secundaria y en los cursos de formación de profesores se enfatiza poco la vinculación de las funciones con la realidad. Al tratar el tema funciones, suele ponerse mucho énfasis en la obtención de dominios, rangos y gráficos solo en contextos intra-matemáticos, dejando pasar oportunidades de empleo de las funciones en la observación y análisis de situaciones reales y de estimular la creación de problemas, la modelización y la investigación.

2. Las ideas expuestas pueden servir de base para continuar creando problemas sobre funciones a partir de la misma situación dada. Una posibilidad es construir funciones que expresen el pago por la compra de botellas de jugo, haciendo uso de cada una de las ofertas de las bodegas B y C. También, considerar la posibilidad de combinar ofertas. Otra posibilidad interesante es considerar generalizaciones.

3. Desde el punto de vista del conocimiento matemático de los docentes, resulta interesante evidenciar cómo una situación real lleva a manejar conceptos tanto del conocimiento común, como del conocimiento ampliado, con una mirada que ensancha horizontes y que es fundamental para la formación de los profesores de matemáticas. En este caso particular, la función afín, que es la función real de dominio en R, expresada como $f(x) = ax + b$, con a y b coeficientes también en R, resulta relacionada a otros campos de la matemática por estar restringida a un conjunto discreto (el número n de botellas de jugo que se desea comprar, obviamente varía en $\mathbb{N}$) y de una manera poco habitual, pues está definida en clases de equivalencia del conjunto de números naturales, determinadas por el resto de dividir n entre 3; es decir, entramos al campo de la división entera y la aritmética modular; y en este contexto, a usar la función máximo entero.

4. En los talleres sobre creación de problemas, una manera de iniciar a los participantes en una reflexión de carácter matemático y didáctico, es pedirles, luego de conocer la situación propuesta y antes de crear un problema específico, que hagan:

    a. una lista de conceptos matemáticos que se relacionan con tal situación o que pudieran relacionarse con ella.

    b. una lista de preguntas que les suscite la situación descrita.

    Con suficiente tiempo, en talleres para profesores en formación o en ejercicio, se pueden aplicar las estrategias ERPP (Episodio, Reflexión didáctica, Problema pre, Problema pos) para crear problemas por *variación* de un problema dado, y SPRP (Situación, Problema, Reflexión didáctica, Problema (pre o pos)), para crear problemas por *elaboración*, a partir de una situación dada. Tales estrategias, que usan constructos del EOS, han sido expuestas con detalle en Malaspina (2017).

Referencia

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.*
Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html