UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
Páginas 208-222

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ERRORES, TRIGONOMETRÍA Y VECTORES: APLICACIONES MATEMÁTICAS SOBRE EL MISMO OBJETO DE ESTUDIO

Alejandra Cañibano, Patricia Sastre Vazquez, Rodolfo D´Andrea

Fecha de recepción: 08/03/2016
Fecha de aceptación: 25/10/2016

Resumen	A partir de una situación real y concreta con la cual puede enfrentarse un alumno de la carrera de Ingeniería Agronómica de universidades de Argentina, tanto en la situación de estudiante como posteriormente de profesional, en este trabajo, se pretende hacer uso de tres temáticas diferentes, Errores, Trigonometría y Vectores, incluidas en el plan de estudios e íntimamente relacionadas, con el objeto de poder resolver una problemática donde se integren los conocimientos que se dictan en las asignaturas como también utilizar dos temas inherentes a la matemática como alternativa a la solución del mismo. **Palabras clave**: errores, trigonometría, vectores
Abstract	From a real and specific situation with which a student of agronomic engineering of universities of Argentina, both in the situation of student as a professional, in this work, later may face intends to make use of three different, but included in the curriculum and intimately related issues, in order to be able to resolve a problem where to integrate knowledge as stated in subjects like also use two themes inherent in mathematics as an alternative to the solution of the same. **Keywords**: errors, trigonometry, vectors
Resumo	De uma verdadeira e específica situação com que pode enfrentar um estudante de engenharia agronômica de universidades da Argentina, ambos na situação de estudante e mais tarde profissional, este trabalho, destina-se a fazer uso de três temas diferentes, erros, trigonometria e vetores, incluindo no currículo e intimamente relacionados, a fim de ser capaz de resolver um problema onde se integram conhecimento trabalhados como também dois temas inerentes à matemática como uma alternativa para a solução do mesmo. **Palavras-chave:** Erros, trigonometría, vetores

INTRODUCCIÓN

Sabida la importancia del uso de la matemática en el alumno de carreras de Ingeniería; sabida la importancia de la utilización de la matemática como herramienta para resolver problemas concretos de la disciplina y como co - ayudante de otras disciplinas pertinentes al plan de estudio es necesario, y siempre lo serán, las reflexiones sobre el uso, dictado y forma de transmitir conocimientos que incidirán en el proceso de enseñanza y de aprendizaje del futuro profesional.

A fin de reflexionar sobre estas cuestiones partimos con pequeñas citas de un trabajo de Miguel de Guzmán (1983) en la revista *Investigación y Ciencia*:

> *"La matematización del pensamiento como camino científico es hoy un dogma, a veces llevado a extremos ridículos, de la ciencia moderna.*
>
> *Puede uno preguntarse: ¿Merece la matemática este lugar privilegiado que se le ha atribuido de una forma tan constante? …*
>
> *Y con todo, el pensar matemático merece un lugar privilegiado en el conocimiento por razón de su adecuación a su propio objeto, su evidencia y su certeza…*

El constructivismo propone un paradigma donde el proceso de enseñanza se percibe y se lleva a cabo como un proceso dinámico, participativo e interactivo del sujeto, de modo que el conocimiento sea una auténtica construcción operada por la persona que aprende.

En líneas generales, estas teorías consideran que la enseñanza debe basarse en la producción de estrategias que permitan comprender conceptos y que el conocimiento no puede transferirse de manera aislada, de una persona a otra, sino que el conocimiento conceptual debe ser construido activamente desde la propia experiencia y relacionado con el conocimiento preexistente. En ese sentido, el aprendizaje es un proceso personal del que aprende, aunque necesita un marco social para desarrollarse.

Es así que un ambiente de aprendizaje constructivista se diferencia de otros porque debe proveer a las personas el contacto con representaciones reales, preferentemente situaciones contextualizadas.

OBJETIVO: Hacer uso de una parcela obtenida de una imagen satelital para estudiar tres aspectos distintos, de aplicación matemática, y de gran utilidad para el futuro profesional.

OBJETIVOS PARTICULARES:

- ✓ Mostrar tres aplicaciones concretas sobre el uso de la matemática en un objeto de estudio a la que los alumnos ya tienen acceso (las imágenes satelitales)
- ✓ Otorgar a la matemática un carácter fundamental de herramienta, para algunas aplicaciones concretas en la carrera de Ingeniería Agronómica.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA:

A partir de una porción extraída de una imagen LANDSAT de Abril del 2001, correspondiente a la zona de la cuenca del Arroyo del Azul, Buenos Aires, Argentina se analizarán tres aplicaciones de carácter inminentemente práctico, los cuales tienen como sustento teórico conceptos sobre: Teoría de Errores, Trigonometría y Producto Vectorial entre vectores

JUSTIFICACIÓN:

Respecto a la primera aplicación, Teoría de Errores, los errores, como todos los fenómenos naturales obedecen a ciertas leyes que es indispensable conocer y en las cuales se debe apoyar para establecer métodos y señalar tolerancias. Una medida exacta es imposible de obtener y por lo que se adopta una que más o menos se aproxime al compararla con las diferentes medidas realizadas. Esto dará por resultado una serie de errores aparentes únicos que podemos conocer. Es por eso que la teoría de errores que se debe enseñar debería denominarse con más propiedad *teoría de los errores aparentes accidentales* (Domínguez García- Tejero, 1984)

La trigonometría por su parte ofrece muchísimas ventajas que no siempre se saben aprovechar; la situación por la que pasa el profesional recién egresado hace que no pueda desaprovechar ninguna situación de trabajo profesional y se debería dar por sabido que el cálculo de lados o de superficies o de volúmenes de distintos objetos, forman parte de las incumbencias del Ingeniero Agrónomo.

Por su parte en el tema vectores se cae indefectiblemente en las operaciones de producto escalar y productor vectorial. Estos conceptos, la mayoría de las veces, no son interpretados por los alumnos y tampoco la totalidad de los textos los ofrece de una manera clara. Más allá de las aplicaciones inmediatas con otras materias del plan de estudio, se puede lograr que el alumno identifique las bondades de conocer estas operaciones y las tenga en cuenta como una herramienta más a la hora de resolver situaciones de carácter geométrico.

MATERIALES

Para este trabajo se utilizó una imagen LANDSAT 7, correspondiente al mes de Abril del 2001 que abarca una superficie de 185 x 185 km^2. En esta imagen está incluido un alto porcentaje del Partido de Azul y de la misma se recortó una zona cercana a la ciudad, de fácil acceso en caso que los alumnos deseen realizar una visita a campo, y que tiene una forma geométrica particular, triángulo rectángulo, apta para las aplicaciones posteriores. En la Fig. 1 se muestra la imagen completa y en la Fig. 2 la zona que se recortó para realizar los análisis posteriores; en ella está marcada el área utilizada para las aplicaciones.

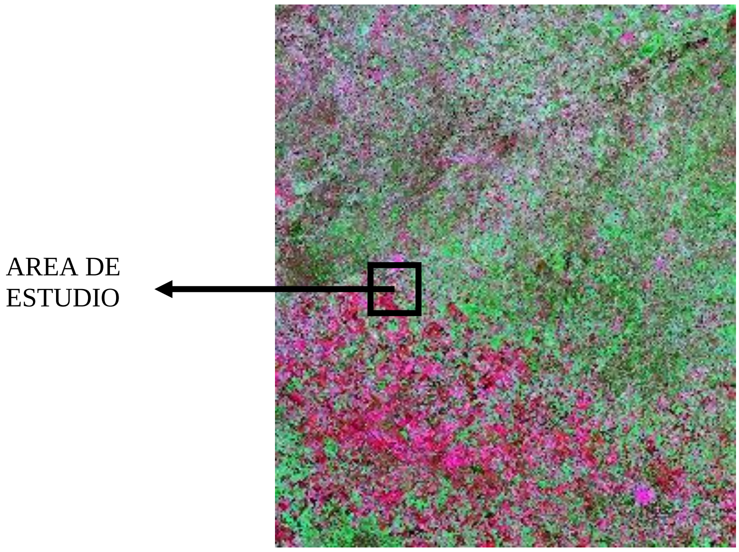


Fig. 1

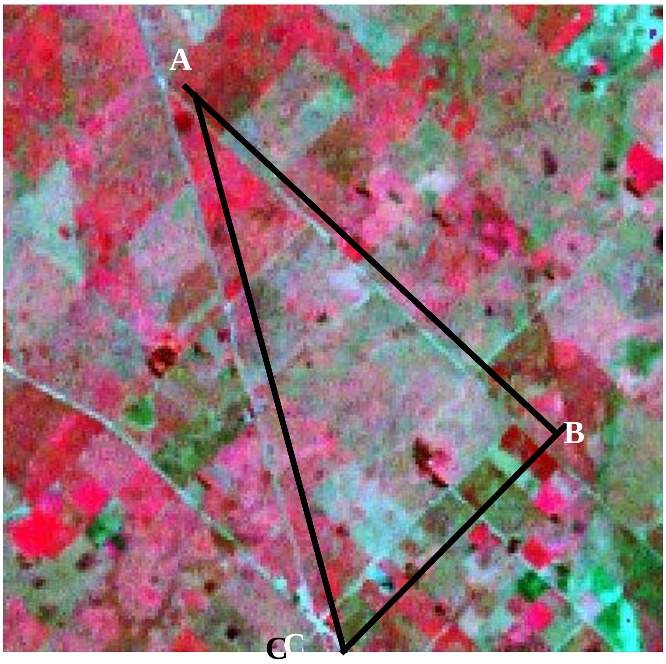


Fig. 2

METODOLOGÍA:

Fundamentalmente los datos que se utilizan son las coordenadas (*X,Y*), expresadas en metros, de los vértices del triángulo, que ofrece la imagen mediante un programa apto para realizar trabajos de Teledetección. El programa utilizado en esta oportunidad, para reconocer la zona de estudio y obtener la serie de coordenadas, se denomina ILWIS 2.2 aunque hay varios disponibles en el mercado. La característica predominante es que las coordenadas pueden observarse en pantalla pero un simple e inadvertido movimiento del ratón ya cambiará las mismas y se torna muy difícil lograr encontrar el punto elegido inicialmente por que, siempre trabajando sobre el mismo punto, se obtienen distintos valores para *X* y para *Y*.

RESULTADOS:

- Aplicación 1: TEORÍA DE ERRORES

Se obtienen distintas medidas de sus coordenadas (*X,Y*) de los puntos A, B y C (en este caso se registran a modo de muestra 5 medidas).

OBSERVACIONES PUNTO A	*X*	*Y*
Observación 1	5507160,51	5938790,83
Observación 2	5507568,17	5938937,36
Observación 3	5507613,41	5938952,99
Observación 4	5507643,52	5938938,28
Observación 5	5.507628,44	5938937,38

OBSERVACIONES PUNTO B	*X*	*Y*
Observación 1	5510377,80	5935730,04
Observación 2	5510363,01	5935821,56
Observación 3	5510378,14	5935791,95
Observación 4	5510362,71	5935730,04
Observación 5	5510392,88	5935730,66

OBSERVACIONES PUNTO C	*X*	*Y*
Observación 1	5508622,23	5933840,49
Observación 2	5508622,38	5933870,83
Observación 3	5508607,20	5933840,18
Observación 4	5508607,25	5938845,17
Observación 5	5508622,23	5933825,17

Al hacer el registro de las coordenadas no es posible determinar la causa en la variación. Afectan al resultado en ambos sentidos y se pueden disminuir para que las desviaciones, por encima y por debajo del valor que se supone debe ser el verdadero, se compensen. En este trabajo se necesita de varias observaciones de un mismo punto, por lo que hay que tener en cuenta la variación, en cada observación, respecto del valor promedio.

Por lo tanto en un ejercicio con estas particularidades el alumno podrá desarrollar los siguientes conceptos:

Cálculo de la media aritmética

Cálculo de los desvíos

Cálculo de la sumatoria de los residuos

- ❖ Aplicación 2: TRIGONOMETRÍA

A través de los valores medios de las coordenadas es posible desarrollar los siguientes conceptos pertinentes a la trigonometría:

Distancia entre puntos

Cálculo de la existencia o no del ángulo recto (Aplicación del Teorema del Coseno)

Aplicación del Teorema del Seno para cálculo de ángulos restantes.

Y, alternativamente, se podrá calcular perímetro y superficie de la parcela. Se podrá hacer uso de distintas unidades de longitud para el cálculo de las mismas.

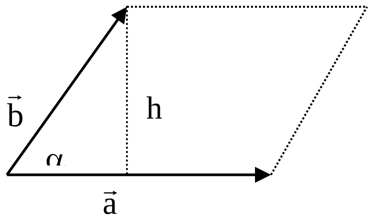
- ❖ Aplicación 3: PRODUCTO VECTORIAL DE VECTORES

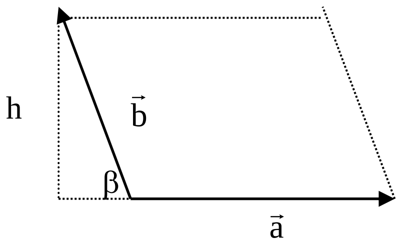
Para esta aplicación se simula que la parcela representa un triángulo rectángulo y se toman los lados del triángulo como vectores a través de sus coordenadas.

El alumno podrá calcular por medio del producto vectorial la superficie del área de estudio ya que la interpretación geométrica del mismo redunda en el área de un paralelogramo.

Esto es:

El producto vectorial tiene una sencilla e importante interpretación geométrica que resuelve bastantes problemas. La norma (o módulo) del vector producto vectorial es igual al área del paralelogramo determinado por los vectores que lo definen.





Si el ángulo determinado por los dos vectores es agudo resulta:

$$S = \|a\|\, h = \|a\|\,\|b\|\, sen\,\alpha$$

Por otra parte:

$$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 - (a,b)^2 = \|a\|^2\|b\|^2 - \left(\|a\|^2\|b\|^2 \cos^2\alpha\right) = \|a\|^2\|b\|^2\left(1-\cos^2\alpha\right) =$$

$$= \|a\|^2\|b\|^2 sen^2\alpha$$

$$S = \|a \times b\| = \|a\|\|b\|\, sen\,\alpha$$

Si el ángulo es obtuso, entonces $\beta = \pi - \alpha$ y tendremos:

$$h = \|b\|\, sen(\pi - \alpha) = \|b\|\, sen\alpha$$

como en el caso anterior.

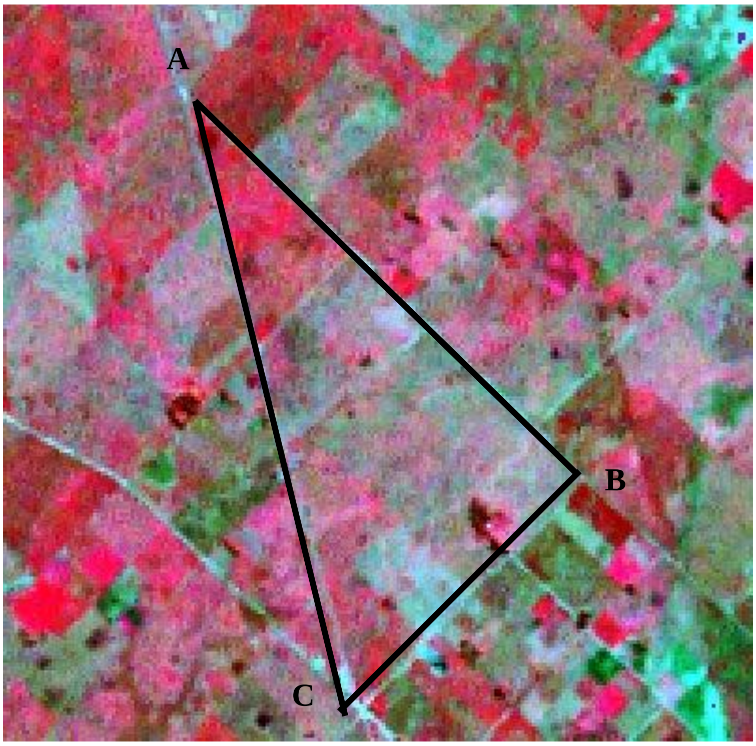
CONCLUSIONES

Si bien la primera de las aplicaciones no suele incluirse en las asignaturas matemáticas y casi siempre se halla relacionada a la estadística, no se deja de reconocer su importancia cuando existen trabajos de este tipo y por lo tanto se deja como una aplicación más.

Respecto a las dos restantes aplicaciones se las toma en este trabajo como independientes una de otra, como alternativa a la solución de un problema ya que a la vista y en los casos en que los alumnos o profesionales no están acostumbrados a la visión de imágenes satelitales, el área de estudio puede verse como un triángulo rectángulo y es por ello que en la tercera de las aplicaciones se lo considera como tal. Podría suceder que la trigonometría resulte más familiar a la hora de recordar conceptos entonces, esta aplicación se desarrolló en forma más exhaustiva. De todas maneras al observar los resultados obtenidos no existen grandes diferencias entre ambos resultados.

Resaltaremos, para este tipo de trabajo, cierta preferencia por las teorías constructivistas porque se fomenta el aprender matemática mediante la construcción de conocimientos en base a las experiencias del alumno, por medio de la realización de actividades que son de utilidad en el mundo real. Y respecto al papel del docente, el mismo debe ser de moderador, coordinador, facilitador, mediador y al mismo tiempo participativo, es decir debe contextualizar las distintas actividades del proceso de aprendizaje

Anexo



APLICACIÓN 1: **TEORIA DE ERRORES**

PUNTO A

X	Y
5507160,51	5938790,83
5507568,17	5938937,36
5507613,41	5938952,99
5507643,52	5938938,28
5507628,44	5938937,38

a) Cálculo del valor promedio de las coordenadas del punto **A**

$$\overline{X_A} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \left(\frac{5507160{,}51 + \cdots + 5507628{,}44}{5}\right)$$

$$\overline{X_A} = 5507522{,}81$$

$$\overline{Y_A} = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i}{5} = \left(\frac{5938790{,}83 + \cdots + 5938937{,}38}{5} \right)$$

$$\overline{Y_A} = 5938911{,}37$$

Por lo tanto coordenadas del punto **A**

A (5507522,81; 5938911,37)

b) Cálculo de la sumatoria de los desvíos del punto **A**

ε_{1x}	362,3
ε_{2x}	-45,36
ε_{3x}	-90,71
ε_{4x}	-120,71
ε_{5x}	-105,63
$\Sigma\varepsilon_{xA}$	**-0,11**

ε_{1y}	120,54
ε_{2y}	-25,99
ε_{3y}	-41,62
ε_{4y}	-28,91
ε_{5y}	-26,01
$\Sigma\varepsilon_{yA}$	**0,01**

PUNTO B

X	Y
5510377,80	5935730,04
5510363,01	5935821,56
5510378,14	5935791,95
5510362,71	5935730,04
5510392,88	5935730,66

a) Cálculo del valor promedio de las coordenadas del punto **B**

$$\overline{X_B} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \left(\frac{5510377{,}80 + \cdots + 5510392{,}88}{5} \right)$$

$$\overline{X_B} = 5510374{,}91$$

$$\overline{Y_B} = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i}{5} = \left(\frac{5935730{,}04 + \cdots + 5935730{,}66}{5} \right)$$

$$\overline{Y_B} = 5935760{,}84$$

Por lo tanto coordenadas del punto **B**

B(5510374,91; 595760,84)

b) Cálculo de la sumatoria de los desvíos del punto **B**

ε_{1x}	-2,89
ε_{2x}	11,9
ε_{3x}	-3,23
ε_{4x}	12,20
ε_{5x}	-17,97
$\Sigma\varepsilon_{xB}$	**0,01**

ε_{1y}	30,80
ε_{2y}	-60,72
ε_{3y}	-31,11
ε_{4y}	30,80
ε_{5y}	30,18
$\Sigma\varepsilon_{yB}$	**-0,05**

PUNTO C

X	Y
5508622,23	5933840,49
5508622,38	5933870,83
5508607,20	5933840,18
5508607,25	5938845,17
5508622,23	5933825,17

a) Cálculo del valor promedio de las coordenadas del punto **C**

$$\overline{X_C} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \left(\frac{5508622{,}23 + \cdots + 5508622{,}23}{5}\right)$$

$$\overline{X_C} = 5508616{,}26$$

$$\overline{Y_C} = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i}{5} = \left(\frac{5933840{,}49 + \cdots + 5933825{,}17}{5}\right)$$

$$\overline{Y_C} = 5933844{,}37$$

Por lo tanto coordenadas del punto **C**

C(5508616,26 ; 5933844,37)

b) Cálculo de la sumatoria de los desvíos del punto **C**

ε_{1x}	-5,97
ε_{2x}	-6,12
ε_{3x}	9,06
ε_{4x}	9,01
ε_{5x}	-5,97
$\Sigma\varepsilon_{xC}$	**0,01**

ε_{1y}	3,88
ε_{2y}	-26,46
ε_{3y}	4,19
ε_{4y}	-0,80
ε_{5y}	19,2
$\Sigma\varepsilon_{yC}$	**0,01**

APLICACIÓN 2: **TRIGONOMETRÍA**

a) Distancia entre puntos

$$\overline{AB} = \sqrt{(5507522.81 - 5510374.91)^2 + (5938911.37 - 5935760.84)^2} = 4249.72m$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(5507522.81 - 5508616.26)^2 + (5938911.37 - 5933844.37)^2} = 5183.63m$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(5510374.91 - 5508616.26)^2 + (5935760.84 - 5933844.37)^2} = 2601.15m$$

b) Aplicación del Teorema del Coseno para verificar si existe el ángulo recto en **B**

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,\overline{AB}\,\overline{BC}\cos\beta$$

$$\therefore \cos\beta = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{-2\,\overline{AB}\,\overline{BC}} = -0.0924502$$

$$\boxed{\beta = 95^\circ\ 18´\ 16´´}$$

c) Aplicación del Teorema del Seno para calcular el ángulo en **C**

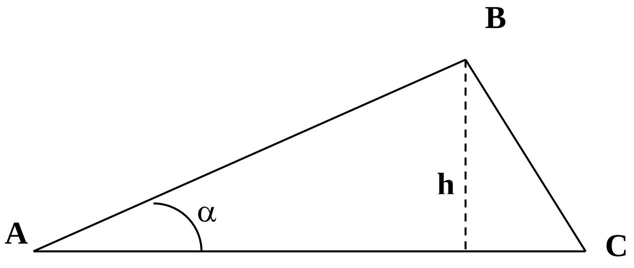
$$\frac{\overline{AC}}{sen\,\beta} = \frac{\overline{AB}}{sen\gamma}$$

$$sen\gamma = \frac{\overline{AB}\ sen\beta}{\overline{AC}}$$

$$\boxed{\gamma = 54^\circ\ 43´\ 6´´}$$

$$\therefore\ \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\alpha = 29^\circ\ 58´\ 38´´}$$

d) Cálculo de la superficie de la parcela



$$sen\alpha = \frac{h}{\overline{AB}} \Rightarrow h = \overline{AB}\, sen\alpha$$

$$h = 2123.40\, m$$

$$Sup A\hat{B}C = \frac{\overline{AC} \times h}{2} = \frac{5183.63m \times 2123.40m}{2} =$$

$$Sup A\hat{B}C = 5503460\, m^2$$

$$Sup A\hat{B}C = 550.346 Ha$$

APLICACIÓN 3: **PRODUCTO VECTORIAL DE VECTORES**

Cálculo de la superficie utilizando el producto vectorial.

Las coordenadas del vector $\vec{a}$ y $\vec{c}$ se obtienen a partir de la diferencia de las coordenadas promedio de los puntos A, B y C. En base a la interpretación geométrica del producto vectorial se consideran los lados $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ como vectores que van a formar parte de los lados del paralelogramo y el módulo del vector producto vectorial es igual al área del paralelogramo determinado por los vectores que lo definen.
Las coordenadas de los vectores vienen dadas en metros.

A partir de la fórmula del área del paralelogramo, si se la parte en dos se puede calcular el área de un triángulo y eso es lo que se aplica a continuación.

$$S = \left| \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{2} \right|$$

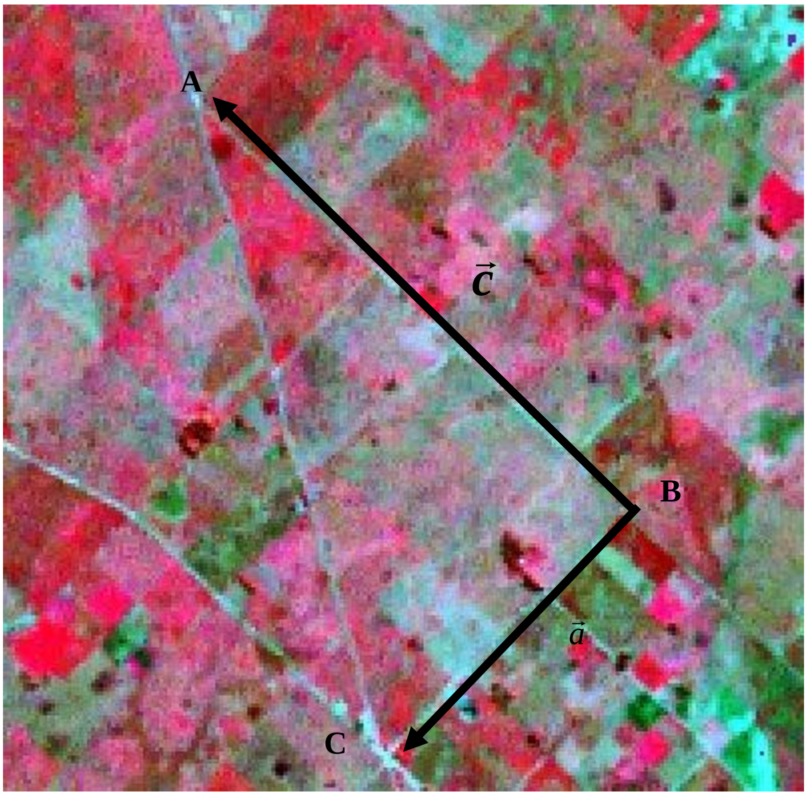
$$\vec{c} = \overrightarrow{BA} = (2852.10; -3150.53)$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{BC} = (-1758.65; -1956.47)$$

$$\vec{a} \times \vec{c} = (2852.10\,\breve{i} - 3150.53\,\breve{j}) \times (-1758.65\,\breve{i} - 1956.47\,\breve{j}) =$$

$$= 5540679\,\breve{j} \times \breve{i} - 5465821.5\,\breve{i} \times \breve{j} = 11006501\,\breve{k}$$

$$\therefore \quad S = \left| \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{2} \right| = 5503250.5\,m^2$$



BIBLIOGRAFÍA

1. de Guzmán M. (1983). *Algunos aspectos insólitos de la actividad matemática*. Investigación y Ciencia, Febrero, 100-108.

2. Domínguez García- Tejero F. (1984). *Topografía General y Aplicada*. Dossat. Madrid

3. Jonassen, D. (2000) *El Diseño de entornos constructivistas de aprendizaje* En: Reigeluth, Ch. (Eds) Diseño de la instrucción Teorías y modelos. Un paradigma de la teoría de la instrucción. Parte I. 225-249 Madrid: Aula XXI Santillana

Alejandra Cañibano. Agrimensora, por la Universidad Nacional de La Plata (Argentina) y Magister en Investigación Biológica Aplicada por la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (Argentina). Docente del Área Matemática de la Facultad de Agronomía de Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, UNCPBA, (Argentina). Comparte su trabajo con la enseñanza de la matemática en el nivel medio y adultos de escuelas estatales. Ha escrito diversos trabajos con la finalidad de mostrar las bondades de la matemática aplicada. mac@faa.unicen.edu.ar

Patricia Sastre Vázquez. Agrimensora, por la Universidad Nacional del Sur (Argentina) y Doctora en Matemática Aplicada, por la Universidad de Alicante (España). Profesora Titular del Área de Matemática de la Facultad de Agronomía de Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires,
UNCPBA, (Argentina). Profesora Titular de Análisis II y Matemática, de la Facultad de Agronomía de la Universidad de Morón (Argentina). Es directora del
Proyecto: "Análisis del Lenguaje Matemático y su influencia en los procesos de Validación en estudiantes universitarios de Ingeniería". Secretaria de Ciencia y Técnica de la UNCPBA. Ha dictado cursos de posgrado en el país y en el extranjero. Tiene publicados trabajos en el área de la Educación Matemática y otras disciplinas relacionadas con la Agronomía y la Modelización, en Revistas
Nacionales e Internacionales. Es autora de libros y capítulos de libros tanto de investigación como de docencia. Ha integrado tribunales de Tesis Doctorales en
España. Formó parte de numerosos comités científicos de Congresos Internacionales. psastre@faa.unicen.edu.ar; pasava2001@yahoo.com.

Rodolfo Eliseo D´Andrea, argentino. Magíster en Educación Matemática y Doctorando por la Universidad Nacional del Comahue. Profesor Adjunto en el Área de Matemática en Pontificia Universidad Católica Argentina (PUCA), Campus Rosario. Integrante de un Proyecto de Investigación sobre Lenguaje Matemático y Procesos de validación en estudiantes de Ingeniería (Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Sede Azul). Ha participado, como ponente, en numerosos congresos sobre Educación Matemática.
Email: rodolfoedandrea@yahoo.com.ar