REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 46. Junio 2016
Página 09-32

Problematización histórica de temas matemáticos fértiles

Carlos Sánchez Fernández y Concepción Valdés Castro

Resumen	Con este artículo pretendemos insistir en la necesaria renovación del discurso matemático tradicional. Las ideas que exponemos recogen una experiencia particular y quisiéramos compartirlas con profesores de enseñanza secundaria superior y de cursos universitarios básicos. La orientación histórica, la metodología dialéctica y las técnicas de resolución de problemas, nos han servido para darle al discurso matemático un estilo más coherente con el pensamiento actual. Ilustramos las ideas con dos propuestas para el tratamiento del tema de medida de magnitudes geométricas, un tema que consideramos adecuado y fértil para cultivar nuevas generaciones de jóvenes y de docentes. **Palabras claves:** Discurso matemático, historia de la matemática, medidas geométricas, problemas isoperimétricos.
Abstract	With this paper we intend to insist on the necessary renewal of traditional mathematical discourse. The ideas presented collect a particular experience and we would like to share this with teachers in higher secondary education and basic college courses. The historical orientation, the dialectic methodology and problem solving techniques, have helped us to give the mathematical discourse more consistent with current thinking style. We illustrate ideas with two proposals for addressing the issue of measurement of geometrical quantities, one theme that we considered adequate and fertile to cultivate new generations of young people and teachers. **Key Words:** Mathematical discourse, history of mathematics, measurement of geometrical quantities, isoperimetric problems.
Resumo	Com este artigo pretendemos insistir na renovação necessária do discurso matemático tradicional. As ideias apresentadas tratam de uma experiência particular e gostariamos de compartilhá-las com os professores do ensino secundário superior e cursos básicos universitários. A orientação histórica, a metodologia dialética e as técnicas de resolução de problemas, nos ajudaram para dar ao discurso matemático um estilo mais consistente com o pensamento atual. Ilustramos as ideias com duas propostas de como abordar a questão da medida de grandezas geométricas, um tema que consideramos apropriado e fértil para cultivar novas gerações de jovens e professores. **Palavras chaves:** Discurso matemático, historia da matemática, medição de grandezas geométricas, problemas isoperimétricos.

1. Sobre la urgente necesidad de renovar el discurso matemático tradicional

"*Si no cambiamos la manera de dar las clases,*
las matemáticas seguirán siendo aburridas, poco efectivas y
destinadas al fracaso de estudiantes desconectados, empleados insatisfechos,
profesores frustrados y padres preocupados"
Conrad Wolfram
Recuperado de la versión digital del periódico "*El País*", 25/04/2016

1.1 Introducción.

Deseamos compartir ideas concebidas para dinamizar los modos de actuación dentro del escenario docente en esta sociedad digital que nos obliga a renovar la manera en que construimos conocimiento matemático junto con las generaciones actuales. En esta reflexión, no podemos dejar de tomar en cuenta las múltiples y crecientes formas de distracción, la forma encantadora en que "se vende" lo seudocientífico y hasta lo anticientífico. Antes, cuando éramos jóvenes, teníamos la *diversión* de la "telebasura", pero ahora, además, se usa y abusa de la absorbente red de redes sociales que conecta –y *desconecta*- hasta dentro de la sala de clases gracias al teléfono móvil "inteligente". Alguien ha dicho con razón: *La escuela ha perdido el monopolio de la trasmisión de saberes y la familia el monopolio de la trasmisión de valores*.

Para bien o para mal, *todo está cambiando*: los propios contenidos de la información que se trivializan; las formas y medios de transmisión: icónica, fragmentada, rápida, sin tiempo para la reflexión, con una carga efectista muy atractiva. Si compartimos el criterio de que el escenario es dinámico y manipulador de voluntades, que los cambios sociales, culturales, mediáticos, tecnológicos, tanto en la mentalidad como en los intereses, persisten y que cada vez se hace más difícil convencer y persuadir a los jóvenes- y a los menos jóvenes- del papel esencial de las prácticas y saberes matemáticos. Es que no hemos sabido mostrar que todas estas prácticas, que se manejan como una "caja negra", han sido posibles gracias al desarrollo de una tecnología que se sustenta de forma esencial en la matemática. Por tanto, debemos fortalecer la conciencia de que el mismo desarrollo tecnológico precisa de mayor cantidad de profesionales con una buena y adecuada preparación matemática. ¿No les parece que ha aumentado la necesidad de propagar con mayor perspicacia la cultura matemática, que incluye tanto prácticas y saberes, como goces deductivos y estéticos, de números y figuras? ¿Por qué no salir de la rutina y esforzarnos por hacer más activas las clases y más efectiva la comunicación de las bondades de nuestra ciencia?

Como a tantos otros educadores nos preocupa la forma en que se ha transformado la situación. No es que se hayan extinguido los jóvenes interesados en resolver problemas matemáticos ingeniosos y que no existan científicos, ingenieros y economistas, con avidez por ampliar su cultura matemática para hacer su labor social más útil. Pero, observamos con desasosiego que muchos de los que deciden formarse como profesionales (ingenieros, arquitectos, científicos, economistas, agrónomos y un largo etc.) simplemente quieren saber lo imprescindible para sacar exámenes y no sienten el menor interés por ampliar o actualizar su cultura matemática, es más, muchos asocian matemática solo con odiosos recuerdos de la infancia y juventud, por lo que tratan de olvidarla pronto.

El objetivo principal de este artículo es provocar una actitud crítica sobre el discurso matemático habitual que usamos en la sala de clases y/o en la redacción de libros de texto o de divulgación. No pretendemos generalizar experiencias particulares, ni con-vencer del encasillamiento en un "marco teórico" determinado y determinante. Consideramos que cualquier instrumento didáctico, por efectivo que fuese en un cierto contexto, deviene en freno intelectual si sugiere que *aprender a pensar la matemática* es algo que se consigue usando al pie de la letra una suerte de reglas, o principios incuestionables.

Son variadas las opciones que han surgido con el fin de ampliar la cultura matemática de las nuevas generaciones. Nosotros optamos por introducir la dimensión histórica en la estructura del discurso matemático, porque consideramos que con un enfoque historicista suficientemente amplio que contemple tanto los avances en las técnicas de resolución de problemas, como los aspectos socio-culturales del contexto matemático, se contribuye a contrarrestar estas insuficiencias en la formación integral. Ideas muy semejantes a las que desarrollamos aquí han sido planteadas de manera general, con mayor o menor profundidad, en muchos trabajos publicados en la última década (p. e. Furinghetti, 2007, Guzmán, 2007; Katz y Tzanakis, 2009). Nosotros las adaptamos, las desarrollamos a conveniencia y más adelante las aplicamos al caso particular del significativo tema de la medida de magnitudes geométricas.

1.2 La perspectiva historicista en la búsqueda de temas fértiles para cultivar a las nuevas generaciones.

Así es como yo entiendo el uso de la Historia de la Matemática y de las Ciencias en el aula
y así es como el bagaje intelectual de los maestros lo requieren:
***como un conocimiento integrado**.*
Integrado como saber familiar y cornucopia accesible siempre para la instrucción,
no escondido en gavetas que sólo se abren en momentos preestablecidos.
Hans Freudenthal, 1981, p. 31

La perspectiva historicista, presente hoy en día en varias de las tendencias pedagógicas más promisorias, se inspira, sobre todo, en la concepción de la Historia como conjunto de procesos que condicionan, de alguna manera y en algún grado, la situación en la cual se expresan los problemas generadores del conocimiento matemático significativo. Aprovecharse, sin abusos, de esta valiosa oportunidad, quiere decir explotar no sólo sus importantes funciones de *motivación y comunicación*, sino también sus funciones *heurística y humanista* en el proceso de aprendizaje.

Cuando se escarba en la Historia y se ponen en evidencia las raíces de los conceptos, se observan nítidamente las circunstancias que, originalmente, motivaron y promovieron el crecimiento de tales conceptos hacia su transformación en parte esencial de teorías coherentes y significativas. Aunque – es necesario subrayarlo – *no basta observar los hechos y reproducir exactamente la evolución de las ideas*, también es imprescindible una visión evaluadora y crítica, para *seleccionar y reconstruir* aquello que realmente puede ayudar al desarrollo de una actividad creativa.

Se trata de usar el conocimiento de la historia, sin menospreciar el valor de lo lógico del contenido y con atención cuidadosa del objetivo pedagógico, según las características del grupo de alumnos. El éxito de esta propuesta depende precisamente de una acertada combinación de *lo lógico, lo histórico y lo pedagógico* que se nos presenta en la preparación y ejecución de cada acto en el proceso docente. Sin embargo, estos tres factores no deben considerarse en forma simplemente aditiva, sino que su conjugación debe ser siguiendo la *metodología dialéctica*. Con el término *dialéctica* significamos que en la consideración de las partes no debemos perder de vista que todo está interconectado y que hay un proceso continuo de cambio en esta interrelación.

En el pensamiento clásico tradicional se establece una falsa oposición entre las dos categorías de lo histórico y lo lógico. Lo histórico se comprende como secuencia temporal de fenómenos, y la lógica como vinculación de conceptos y leyes del pensamiento. Se establece así una oposición metafísica entre el mundo de fenómenos singulares que transcurren en el tiempo y el mundo de lo necesario esencial, universal. De esta forma, se desconoce, por un lado, que la sucesión temporal de los fenómenos reales responde también a una lógica determinada, y por el otro, que las leyes o estructuras del pensamiento también se forman y se desarrollan históricamente.

El discurso analítico que preconiza el enfoque lógico-formal, apareció en el mundo occidental en la antigüedad clásica grecolatina como inherente al lenguaje matemático y ha evolucionado desmesuradamente de forma que actualmente está completamente "*enajenado"* del lenguaje ordinario. Después de tantas décadas de enseñanza tradicional formalista, es muy natural -y por tanto, bastante común- escuchar todavía a profesores de diferentes niveles de enseñanza decir: *¡Cómo voy a conseguir hablar de la historia o de otros aspectos culturales, si cada vez tengo más contenidos que explicar en un mismo tiempo!* Comúnmente los principales detractores del recurso didáctico de la historia plantean que con el enfoque historicista se pierde el rigor y el tiempo necesario para profundizar en lo que es verdaderamente importante: *los contenidos de los programas vigentes.* Pero, tal pensamiento está ligado con una muy obsoleta concepción del proceso docente que privilegia los contenidos y no da suficiente peso al verdadero sujeto de la actividad que es el estudiante, ni se preocupa por la *reconstrucción conjunta* de prácticas y saberes.

Nuestra propuesta es tender un puente entre la retórica humanista -más preocupada en usos de la imaginación y la consideración del plano afectivo- y el discurso matemático para que este se mantenga riguroso, pero su formalismo lógico sea más atemperado y coherente con la situación actual. Y, lo más importante, este viaducto lo articulamos con el recurso didáctico de la Historia de la Matemática. Se trata, por tanto, de usar la larga historia del desarrollo de prácticas y saberes acumulado, para potenciar la argumentación lógica asociada a un contenido matemático específico, con la promoción meticulosa de sus valores humanistas. Proponemos aumentar el *poder persuasivo* del discurso utilizando imaginativamente el entrañable encanto de la *heurística* -técnica del descubrimiento- y de la *reconstrucción del saber* matemático. Subrayemos que no pretendemos sustituir los contenidos matemáticos por otros contenidos histórico-matemáticos, se trata de darle una flexibilidad a la organización del discurso que incorpore coherentemente las bondades del pensamiento heurístico. Se trata de reconstruir racionalmente la historia, adaptándola a las características del grupo de oyentes o lectores correspondiente, pero sin desvirtuarla, sin traicionarla.

La necesidad de cambiar estereotipos en la comunidad de docentes de matemática y lograr que las actividades fueran más motivadoras nos ha llevado a considerar la búsqueda de *temas fértiles contextualizados con el recurso de la historia de la matemática.* Consideramos *fértiles* aquellos temas que nos permiten desarrollar en el aula varios asuntos que tienen amplia aplicación en la práctica matemática o en el enriquecimiento de la cultura matemática. Por regla general estos asuntos fértiles aparecen como problemas intelectuales en una época remota y muchas veces durante el largo y torcido cauce de su historia varían en la forma como se exponen y en el enfoque metodológico para su tratamiento y resolución. En definitiva se buscan temas que lleven implícito el misterio y la intriga de una aventura intelectual seductora para la juventud.

Estamos convencidos que profesores entusiastas por el quehacer matemático, y sin prejuicios para sumergirse en el universo fascinante de la historia de la matemática, encontrarán múltiples temas con estas características, p.e. los *tríos pitagóricos*, ligados tanto a la geometría de las edificaciones como a la aritmética de la descomposición en sumas de cuadrados, desde su concepción práctica por los babilonios hasta su ligación con el estudio de las formas cuadráticas; las *sumas infinitas* originadas en la resolución de cuadraturas de figuras geométricas, indispensables para el desarrollo del Cálculo Integral y posteriormente para enfrentar los desafíos de la representación de funciones; o las *irracionalidades numéricas* y sus intrincados vericuetos históricos ligados a las ideas fundamentales del álgebra, del cálculo y la teoría de funciones; todos estos temas, y muchos más, esperan para ser tratados con imaginación y emotividad en las salas de clases y los libros de texto de matemática. Por supuesto, si no se tratan de la forma tradicional con reglamentos burocráticos limitantes y prejuiciosos sobre la organización de los cursos y las clases.

En este artículo ilustraremos nuestras ideas con un tema muy fértil que por ser tan práctico y fascinante, lo hemos desarrollado con éxito en diferentes escenarios tanto con grupos de estudiantes novatos, como de docentes en formación posgraduada. No han sido concebidos para una clase ni para tres clases tradicionales, es para estimular el *pensar en la matemática,* siempre y cuando sea posible, en *reconstrucción conjunta* de todos los participantes bajo la batuta de un *maestro concertador.*

2. Ilustración con el tema fértil de la medida de magnitudes geométricas

No hay tema más esencial: la medida de magnitudes
es el punto de partida de todas las aplicaciones de la matemática
H. Lebesgue (1935) *La mesure des grandeurs,* p.3

2.1 Por qué, para qué y para quién escogimos el tema de la medida geométrica

Es imposible mostrar con claridad y eficacia las bondades de un método con el tratamiento de temas demasiado heterogéneos. Hemos decidido circunscribirnos al tema de la medida de magnitudes geométricas, que según nos consta, adolece de una fuerte carencia de *mesura* en su tratamiento: o se desarrolla formalmente reduciéndolo a fórmulas y enrevesadas proposiciones, o se enfoca superficialmente sin mencionar los nexos con las circunstancias prácticas que lo promovieron y sus incalculables aplicaciones.

Desarrollamos una serie de actividades relacionadas con dos asuntos básicos: las cuadraturas de figuras planas y la comparación de polígonos, enmarcados ambos en el tema general de la medida de magnitudes geométricas. Lo exponemos de forma que pueda ser útil para alumnos del nivel secundario superior, y también como un preámbulo a la introducción del concepto de integral y de las técnicas de optimización, en un primer curso de Cálculo de nivel universitario. Sin embargo, *lo que más importa no es el contenido en sí; el contenido sirve de pretexto para ilustrar una forma de actuar en la clase*. Pero la reconstrucción del contenido, por su riqueza y originalidad no acostumbrada en los libros de texto, se presta a la experimentación, discusión y análisis de diferentes estrategias de resolución de problemas, así como al propósito de provocar la reflexión profunda.

Para enseñar a *reconstruir* el conocimiento que satisfará ese deseo de comprender dinámicamente el tema de la medida, se precisa no solo de conocer las razones históricas de por qué y para qué medir, sino también desarrollar habilidades apropiadas de cálculo, estimación y resolución de problemas. Se precisa no sólo el desarrollo de las ideas de forma y tamaño, sino también el desarrollo del pensamiento algebraico, de la capacidad de argumentar y comunicar -en diseños, gráficos, tablas, fórmulas, resultados parciales y/o generales- esas ideas generadoras. Y aún más importante, se necesita de la comprensión de la esencia de los problemas, que permita *persuadir* de la verosimilitud de las respuestas.

Intercaladas en el texto que se desarrolla a continuación, se presentan algunas de las fuentes históricas; el lector puede ampliar su cultura matemática con la bibliografía señalada, que se relaciona al final. En letras cursivas se indican algunas de las diferentes estrategias de resolución de problemas que se utilizan. Para terminar este preámbulo vale citar a ese Maestro de la heurística que tanto nos ha inspirado (Polya, 1974, p. 9):

> *"[…]las matemáticas presentan dos caras: por un lado son la ciencia rigurosa de Euclides, pero también son algo más. Las matemáticas presentadas a la manera euclidiana aparecen como una ciencia sistemática, deductiva; pero las matemáticas en vía de formación aparecen como una ciencia experimental, inductiva."*

2.2 Sobre la cuadratura de polígonos

En la Grecia Antigua existía una gran fascinación por la belleza, por la armonía, por lo simple. En la Ciencia de esa época puede observarse una tendencia a construir lo complejo a partir de lo elemental. Esto explica el por qué tenían gran interés en resolver los problemas de construcción geométrica utilizando solamente regla y compás, los dos instrumentos asociados a las figuras geométricas más sencillas: la recta y la circunferencia. Un tipo de problema que investigaban era la cuadratura de figuras planas.

Para los helenos *cuadrar una figura* era construir con regla y compás un cuadrado que tuviera la misma área que la figura plana original, de esta forma la simplicidad del cuadrado se impondría a la complejidad de la figura. Uno de los problemas que primero resolvieron fue el siguiente:

Problema I. Cuadrar un polígono.

Este problema es de carácter un poco general. Para comprenderlo mejor, para experimentar con él, es necesario *considerar casos particulares más sencillos* y tratar después de *utilizar el método o el resultado*. ¿Qué tipo de figura podemos intentar en primer lugar? El polígono más cercano al cuadrado en la forma es el rectángulo, luego es natural considerar en primer lugar este caso:

Subproblema Ia.*Construir un cuadrado que tenga la misma área que un rectángulo dado*.

Una técnica muy usada en la resolución de problemas matemáticos es *suponer el problema resuelto*. Denotemos por *a* la base *AB* del rectángulo y por *b* su altura *CD* (Fig.1) Supongamos que *c* es lado del cuadrado que tiene la misma área que el rectángulo, entonces *c* deberá cumplir la relación

$$c^2 = a \times b. \qquad (1)$$

o, en forma de proporción, $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$, es decir, hemos convertido el problema de la cuadratura de un rectángulo en el de la construcción de un segmento cuya longitud sea la media proporcional entre dos segmentos de longitudes *a* y *b*.

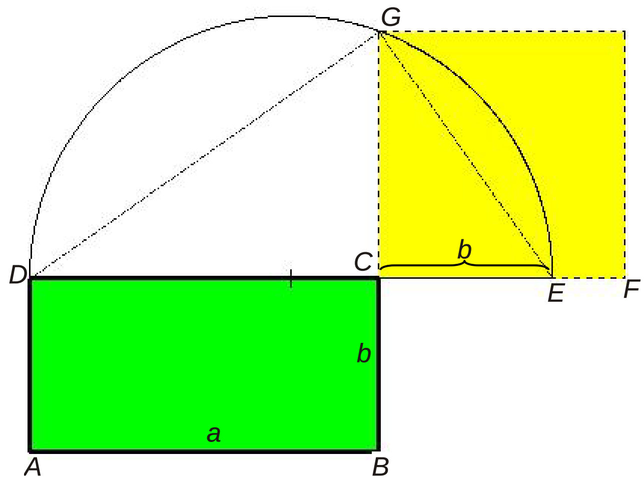

Fig.1 Cuadratura de un rectángulo

Caso que la experiencia de los alumnos sea pobre o nula, el profesor debe ser más sugestivo para lograr la comprensión de esta alternativa, los mismos griegos planteaban su receta para la construcción: Primero construimos el segmento suma $AE = a + b$, después trazamos el semicírculo de diámetro *AE* (ver Fig.1) y el lado *BC* del rectángulo se prolonga hasta intersecar al semicírculo en el punto *G*, entonces, el segmento buscado es *CG*.

Cuando escribimos la relación (1), hemos supuesto conocida la fórmula para el área de un rectángulo. En realidad en la matemática helena sucedía lo contrario, se referían a la operación de multiplicación mediante la construcción de un rectángulo.

¿Cuál puede ser el problema siguiente a ser resuelto? ¿Cómo podríamos *utilizar el resultado obtenido*? Las sugerencias pueden encaminarse por dos vías: intentar con

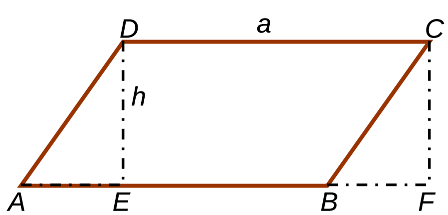

Fig.2 Cuadratura paralelogramo

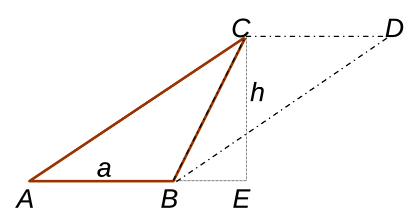

Fig.3 Cuadratura triángulo

otros cuadriláteros particulares o analizar el caso del triángulo.

El resultado anterior, permite cuadrar sin dificultad otros dos tipos de polígonos sencillo: el *paralelogramo* y el *triángulo*. En efecto, dado un paralelogramo *ABCD* trazamos los segmentos *DE* y *CF*, perpendiculares a *AB*, entonces los triángulos *AED* y *BFC* son iguales, luego el rectángulo *EFCD* tiene la misma área que el paralelogramo (Fig.2). Por tanto, la cuadratura del paralelogramo se reduce a la del rectángulo lo que, usando la simbología actual, significa que el área del paralelogramo es igual al producto $a \cdot h$.

Analicemos el polígono de menor número de lados, el triángulo.

Subproblema Ib: Cuadrar un triángulo de base b y altura h.

¿Podemos utilizar el resultado obtenido en el subproblema Ia? Vemos que la cuadratura de un triángulo *ABC* se resuelve a través de la cuadratura de un paralelogramo. Para ello basta trazar el segmento *CD* paralelo a la base *AB* y de igual longitud que ella y después completar el paralelogramo *ABDC* (Fig.3). Como los triángulos *ABC* y *BDC* son iguales, entonces su área será la mitad que la del paralelogramo. Este resultado no es otra cosa que la conocida fórmula para el área del triángulo:

$$A = \frac{a \cdot h}{2}.$$

Es interesante comentar que en los *Elementos* esta fórmula se expresa en forma completamente geométrica:

Un triángulo es equivalente a la mitad del rectángulo que tiene las mismas base y altura.

El próximo paso puede, naturalmente, ser:

Subproblema Ic: Cuadrar un cuadrilátero arbitrario.

Basta darse cuenta que todo cuadrilátero se divide en dos triángulos. Es frecuente, que en este momento ya alguien nos adelante el procedimiento general para resolver el Problema I. Si no es así, motivamos la reflexión a través de este caso particular.

¿Cómo podríamos utilizar los resultados obtenidos? Un polígono arbitrario puede ser dividido mediante diagonales en un número finito de triángulos, para cada uno de los cuales podemos encontrar un cuadrado equivalente. Entonces la cuadratura de un polígono arbitrario se reduce a la construcción de un cuadrado que tenga por área la suma de las áreas de estos cuadrados. Por ejemplo, mediante la diagonal *AC* el cuadrilátero *ABCD* (Fig.4) queda dividido en los triángulos *ADC* y *ABC*. Para cada triángulo construimos los respectivos cuadrados equivalentes, cuyos lados

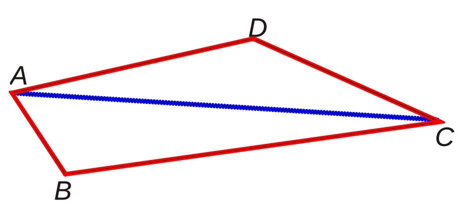

Fig.4 Cuadratura polígono

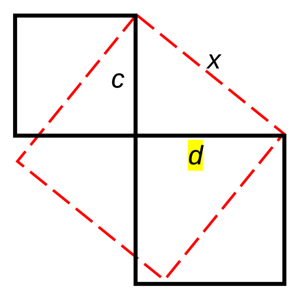

Fig.5 Cuadratura unión rectángulos

denotaremos por c y d.

Entonces para completar la solución del problema debemos resolver el siguiente:

Problema auxiliar. Cuadrar la figura formada por la unión de dos cuadrados.

¿Cómo podemos reformular este problema?

Reformulación: Si denotamos por x el lado del cuadrado buscado, entonces x debe satisfacer la relación pitagórica $x^2 = c^2 + d^2$, lo que sugiere inmediatamente la construcción mostrada en la figura Fig.5.

¿Cuál será el próximo paso? Si consideramos un pentágono, observamos que, por ejemplo, las diagonales lo dividen en 3 triángulos. Podemos entonces aplicar a cada uno de ellos la construcción del subproblema Ib, y mediante la doble aplicación, de la construcción del problema auxiliar podemos cuadrar el pentágono.

Para cuadrar un polígono de mayor número de lados, simplemente es necesario repetir el procedimiento anterior tantas veces como sea necesario. Por supuesto, ni los antiguos helenos, ni nosotros, nos preocupamos en mostrar que siempre es posible triangular un polígono arbitrario. Nótese que en este caso la estrategia utilizada es la de *reducir las "dimensiones" del problema de forma sucesiva,* argumento que convence de la certeza de la afirmación siguiente:

Resultado 1. Todo polígono es cuadrable.

2.3 Sobre la cuadratura del círculo

¿Será posible la cuadratura de figuras limitadas por otros tipos de líneas, no necesariamente rectas? Este es un problema realmente no elemental y cuyo análisis completo sólo puede conseguirse utilizando técnicas de integración. No obstante, sin perder de vista esta meta general, podemos tratar de lograr objetivos parciales mucho más modestos. Entre las figuras planas no limitadas por segmentos rectilíneos la más sencilla, sin duda alguna, es el círculo; al igual que los helenos, comenzamos con el siguiente:

Problema II. Cuadrar un círculo de radio r.

Cuando estamos en presencia de un problema complejo, una táctica recomendada es tratar de buscar, utilizando los datos del problema, algunas *propiedades o relaciones que puedan facilitar el posterior ataque del problema*. ¿Cuáles son los datos? Un círculo de radio r. ¿Qué queremos encontrar? El área. Entonces podemos investigar el problema:

Subproblema IIa. ¿Qué relación existe entre el área de un círculo y su radio?

Nótese que los círculos siempre tienen la misma forma (lo que no ocurre con los triángulos, rectángulos y polígonos en general) y que la única transformación que altera su área es su dilatación o contracción, dependiente del radio. En un plano podemos cambiar la escala cambiando la unidad de medida en dos direcciones mutuamente perpendiculares. Para conservar el círculo, estos dos cambios deben ser iguales. Así, supongamos que efectuamos una dilatación o contracción de r unidades en dos direcciones perpendiculares. Es claro geométricamente que un círculo de radio 1 pasará a tener radio r. ¿Qué ocurrirá con el área del círculo? Para analizar esta última pregunta podemos realizar otra: ¿qué ocurre en el caso que la figura sea un rectángulo, un triángulo u otro polígono?

Para un rectángulo y un triángulo la respuesta es obvia: la nueva área será r^2 veces la anterior. Para un polígono general también puede obtenerse esta misma respuesta con el método de triangulación. Es interesante observar que la posición relativa de las figuras y las direcciones de dilatación o contracción no ejercen ninguna influencia en el resultado. ¿Y para el círculo? Es natural esperar una respuesta dada por analogía: también la nueva área será r^2 veces la original. Pero ¿cómo podemos demostrar eso?

En este momento, con la guía acertada del profesor, pueden discutirse diferentes ideas que pueden conducir a enfoques diversos. Seleccionaremos el método de aproximar el círculo por polígonos inscritos y circunscritos -relacionado con el helénico *método de exhausción* muy utilizado por Arquímedes, p. e. en la cuadratura de la parábola y de la espira principal- que resulta también muy eficaz en otros problemas.

Denotemos por A_r el área del círculo de radio r y por P_r^n y Q_r^n los polígonos de n lados inscritos y circunscritos respectivamente en un círculo de radio r. Es claro que (ver Fig.6):

$$\text{Área}(P_r^n) \leq A_r \leq \text{Área}(Q_r^n)\,.$$

Por otra parte, para cualquier cantidad n de lados se tiene:

$$\text{Área}(P_r^n) = r^2\,\text{Área}(P_1^n) \text{ y } \text{Área}(Q_r^n) = r^2\,\text{Área}(Q_1^n)\,.$$

Así que:

$$r^2\,\text{Área}(P_1^n) \leq A_r \leq r^2\,\text{Área}(Q_1^n)\,.$$

Como tanto el área de P_1^n como la de Q_1^n se acercan cada vez más al área del círculo de radio unidad, se ve de forma intuitiva que:

$$A_r = r^2 A_1\,.$$

Como consecuencia, obtenemos la relación que aparece en los elementos de Euclides:

$$\frac{A_r}{A_s} = \left(\frac{r}{s}\right)^2. \qquad (3)$$

¿*Cómo podríamos utilizar este resultado*? Aquí puede plantearse a los alumnos el análisis de las áreas de algunas figuras limitadas por arcos de círculo, comparándolas con figuras de áreas conocidas. Ejemplos particularmente interesantes son las lúnulas estudiadas por Hipócrates de Quíos (s. V a. C.). Es posible, usando (3) y la propiedad aditiva del área, relacionar el área de la lúnula con la de otras figuras como triángulo, trapecio, semicírculos (ver, p. e. Dunham, 1993, pag.41)

Después de encontrar una relación entre el área de un círculo y su radio, es natural tratar de plantearse el siguiente.

Subproblema IIb Encontrar una relación entre la longitud de una circunferencia y su radio.

En forma análoga al subproblema IIa, Euclides demuestra que

Para dos círculos c y C con radios r y R respectivamente, si l y L denotan las longitudes de las circunferencias correspondientes a c y C, entonces

$$\frac{l}{L}=\frac{r}{R} \quad \text{o} \quad \frac{l}{r}=\frac{L}{R}.$$

La resolución del problema II y los subproblemas IIa y IIb nos brindan la posibilidad de afirmar que hay dos constantes *k* y *k*' tales que si A_r denota el área de un círculo de radio *r* y L_r la longitud de su circunferencia, entonces

$$A_r = kr^2 \quad \text{y} \quad L_r = k'r\ .$$

Notemos que las constantes *k* y *k*' coinciden respectivamente con el área y la longitud del círculo unidad ($r=1$). Esto significa que, si fuéramos capaces de cuadrar el círculo unidad, entonces podríamos cuadrar cualquier otro círculo. Además si pudiéramos construir un segmento de longitud igual a la circunferencia de radio uno, podríamos también construir un segmento con la longitud de una circunferencia dada. Este último problema se conoce como *rectificación de la circunferencia*.

Como ya comentamos, los resultados que aparecen en los *Elementos* permiten reducir la cuadratura del círculo y la rectificación de la circunferencia a la resolución de estos problemas en el caso particular cuando el radio es 1. Sin embargo, también en este caso particular ambos problemas se resistían a los esfuerzos realizados. Será el gran sabio de la antigüedad clásica, Arquímedes de Siracusa, quien ilumine el camino a seguir. Primero consideró un *problema afín* a ambos:

Subproblema IIc. Encontrar una relación entre el área del círculo y la longitud de su circunferencia.

Arquímedes utilizó un método análogo al descrito en la resolución del subproblema IIa: aproximó el área del círculo y la longitud de su circunferencia por las áreas y perímetros respectivos, de los polígonos regulares inscritos y circunscritos al círculo.

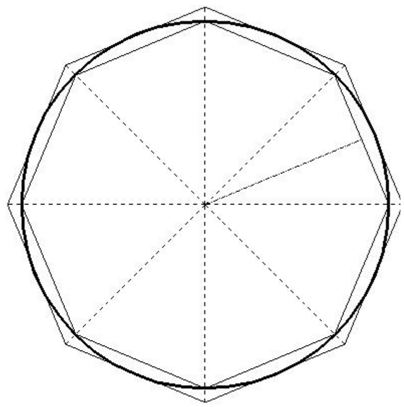

Fig.6 Polígonos inscrito y circunscrito

Dado un círculo de radio *r*, denotemos por Q_n^1, Q_n^2 los polígonos regulares de *n* lados inscritos y circunscritos a un círculo de radio *r* (ver Fig.6) y por $A(Q_n^i)$ y $P(Q_n^i)$, $i=1,2$ sus correspondientes áreas y perímetros. Como los polígonos son regulares, ya vimos que:

$$A(Q_n^1) = n \times \frac{b_n h_n}{2} = \frac{P(Q_n^1) h_n}{2}, \qquad (4)$$

donde h_n es la apotema de Q_n^1. Análogamente se comprueba que

$$A(Q_n^2) = \frac{r}{2} P(Q_n^2).$$

Por otra parte

$$A(Q_n^1) \le A_r \le A(Q_n^2) \quad \text{y} \quad P(Q_n^1) \le L_r \le P(Q_n^2),$$

donde A_r y L_r denotan respectivamente el área del círculo y la longitud de su circunferencia. Como consecuencia de las relaciones anteriores, obtenemos que

$$\frac{h_n}{r} P(Q_n^1) \le \frac{2A_r}{r} \le P(Q_n^2).$$

No es difícil observar que, cuando *n* se hace cada vez mayor los polígonos inscritos y circunscritos se aproximan cada vez más al círculo y, por tanto, $P(Q_n^1)$ y $P(Q_n^2)$ estarán tan próximo como se quiera a la longitud de la circunferencia. Además, en este proceso de aumento de la cantidad de lados de los polígonos inscritos, la apotema h_n se acercará cada vez más al radio *r* del círculo, por lo que el cociente h_n/r se acerca a uno. Los razonamientos heurísticos anteriores evidencian intuitivamente que las cantidades L_r y $2A_r/r$ deberán coincidir, de donde se obtiene la relación

$$A_r = L_r \times \frac{r}{2},$$

es decir, *el área del círculo coincide con el área de un triángulo cuya base tiene la longitud de su circunferencia y cuya altura es igual al radio* (Fig.7)

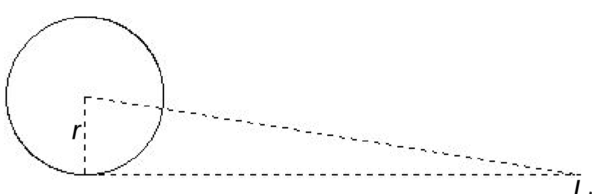

Fig.7 Área y perímetro de un círculo

Es importante notar que, aunque satisfacen completamente las exigencias de la intuición, las consideraciones anteriores no cumplían los cánones de rigor de la matemática helena -ni de la actual- y por tanto, para considerar completamente demostrada esta relación era necesario completar el razonamiento mediante el uso del método de exhausción, lo que aquí omitiremos porque consideramos excesivo para nuestros objetivos.

Hemos identificado el área del círculo con el área de una figura que puede ser cuadrada, el triángulo ¿significa esto que hemos logrado cuadrar el círculo? La respuesta sería afirmativa si fuéramos capaces de construir un segmento de longitud L_r, esto es si pudiéramos rectificar la circunferencia. Aunque Arquímedes no logró cuadrar el círculo, sí estableció una relación trascendental entre dos problemas geométricos teórica y prácticamente importantes: **la cuadratura del círculo y la rectificación de la circunferencia.** Esta relación redujo a solo una la constante de proporcionalidad que era necesario determinar. Mucho después, en el siglo XVIII, **Leonard Euler** popularizó el uso de la letra griega π para denotar el área del círculo de radio unidad, esto es la constante de proporcionalidad *k*, entonces $k' = 2\pi$ y obtenemos las fórmulas usuales:

$$A_r = \pi r^2 \text{ y } L_r = 2\pi r \,.$$

Una vez en posesión de este *resultado parcial*, Arquímedes se dio a la tarea de proporcionar un algoritmo que permitiera su aplicación en la práctica y para ello elaboró un método para el cálculo aproximado de la constante de proporcionalidad π.

Observemos que, en la medida que aumenta la cantidad *n* de lados, el área y el perímetro de los polígonos inscritos crecen y las correspondientes a los polígonos circunscritos decrecen. Por ello, estas magnitudes proporcionan estimaciones por exceso y por defecto de las cantidades A_r y L_r, estimaciones que pueden hacerse tan buenas como queramos. Arquímedes se las ingenió para, con los limitados recursos de cálculo de su época, hallar el perímetro de los polígonos de 96 lados inscritos y circunscritos a un círculo. De este modo encontró que la longitud de la circunferencia unidad, es decir, el número π, satisface la relación

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7},$$

llevado a notación decimal, se escribe como

$$3{,}140845 < \pi < 3{,}142857\,,$$

estimación que tiene dos cifras decimales exactas.

El método de demostración utilizado tiene la ventaja de proporcionar la base de algoritmos para el cálculo aproximado del número π que es posible obtener de los alumnos mediante algunas actividades, que se pueden y deben realizar haciendo uso de softwares como el Mathematica, Maple, Derive u otros de propósitos similares

En definitiva, podemos encontrar en reconstrucción conjunta el siguiente

Resultado 2. Si, por convenio, consideramos $A_1 = \pi$, **entonces:**

$$A_r = \pi r^2 \quad \text{y} \quad C_r = 2\pi r \,.$$

Consideramos que éste es un momento propicio para transmitir a los estudiantes una idea del largo y tortuoso camino recorrido en la búsqueda de aproximaciones cada vez mejores de π, explicarles cómo esta necesidad sirvió de motor impulsor para el desarrollo de algoritmos de métodos aproximados, y que el conocimiento actual de más de 10 billones de cifras exactas no se debe solamente a una jactancia inútil de los matemáticos, sino que resulta un apreciado instrumento para validar la técnica computarizada más reciente. Incluso, es factible señalar problemas *que aún permanecen abiertos* en relación con este singular y fascinante número (ver, p.e. Borwein y Bailey, 2008, Capítulo 3, pag. 103).

Pero, quizás sea más atractivo pasar a considerar un tipo de problemas muy fértil, originado en la antigüedad y con amplia repercusión práctica en la época actual. Trataremos de no abusar de la atención del lector y lo reconstruiremos de forma más expedita.

2.4 Sobre los problemas isoperimétricos

El tema de las figuras isoperimétricas,es decir,
la comparación de las áreas de figuras con formas diferentes,
pero con el mismo perímetro,
fue uno de los que con mayor naturalidad
atrajo a los primeros matemáticos griegos
Sir Thomas Heath, 1981, p. 206

Los problemas de optimización de figuras con igual perímetro o isoperimétricos, por su importancia y fácil formulación, pueden tener un origen anterior a la aparición de la cultura helénica. Por ejemplo, en las tabletas de arcilla de los babilonios aparecen resueltos problemas aritméticos que hacen pensar tuvieran tal procedencia. Pero según relata Proclo (s. V d. C.) la mayoría de los antiguos creía que a áreas mayores corresponden perímetros mayores por lo que esa mayoría no era muy versada en este tipo de problemas. Referencias documentadas ya existen desde los *Elementos* de Euclides (s. IV a. C.) donde se prueba que el triángulo equilátero contiene mayor área que cualquier otro triángulo del mismo perímetro y que entre los rectángulos con perímetro fijo el de mayor área es el cuadrado.

En este epígrafe vamos a limitarnos al llamado *problema isoperimétrico con polígonos* y comenzaremos con el planteamiento de una de sus variantes más sencillas:

Problema III. *Dado un conjunto de polígonos de n lados, todos con el mismo perímetro, encontrar aquel que encierra un área mayor.*

Este problema, así enunciado, tiene un carácter muy general y su dificultad va a depender fundamentalmente del conjunto de figuras considerado. Como todo problema de optimización, incluye relaciones de desigualdad; por tanto, podemos comenzar *experimentando* para encontrar relaciones de desigualdad entre las áreas y perímetros de polígonos sencillos. Por ejemplo, el análisis de rectángulos conduce a situaciones como las mostradas en la tabla, donde *a* y *b* denotan los lados del rectángulo y *A* y *P*, respectivamente, sus áreas y perímetros.

	a	**b**	**A**	**P**
R_1	1	4	4	10
R_2	2	3	6	10
R_3	3	5	15	16
R_4	2	7	14	18

Tabla 1. Área A y perímetro P

Observe que los rectángulos R_1 y R_2 tienen el mismo perímetro; no obstante, el área de R_1 es menor que la de R_2. Por otra parte, R_3 tiene mayor área que R_4 a pesar de tener un perímetro menor. Es decir, que con un mismo perímetro podemos encontrar figuras del mismo género y de áreas diferentes. Entonces, para atacar este problema podemos utilizar la estrategia de *disminuir la dimensión*, en este caso podríamos comenzar con triángulos, que son los polígonos con menor número de lados.

Subproblema IIIa. Entre todos los triángulos con perímetro *P* fijo, ¿cuál es el que tiene área máxima?

Podemos inducir a los estudiantes a *experimentar*. Puede observarse que, fijando un lado, como la altura respectiva es menor que cada uno de los otros dos lados, cuya suma es fija, para obtener una altura lo mayor posible deberán ser también lo mayor posible, simultáneamente, estos lados variables. Esto conduce a la idea intuitiva de que el área es mayor cuando los lados considerados variables son iguales. Como este razonamiento es independiente de cual lado sea el fijado, concluimos que el triángulo de perímetro *P* y área máxima debe ser el equilátero. Este es un razonamiento heurístico que conduce a un resultado. ¿Podríamos demostrar este resultado en forma euclidiana? ¿Será siempre el triángulo de área máxima el equilátero?. Podríamos *enfocar el problema desde una perspectiva diferente*:

¿Cuál será la posición del punto *C* (ver Fig. 8) si queremos conseguir triángulos de la misma área? Tracemos la recta *r,* paralela a *AB* por el punto *C*. Si *C* está sobre *r,* el área del triángulo será siempre la misma, mientras que $\overline{AC}+\overline{BC}$ aumentará con un movimiento hacia la derecha y disminuirá con uno hacia la izquierda. Es decir, la misma área puede ser conseguida con un perímetro menor; ¿cuál será esa posición de *C* donde se logra un triángulo *ABC* con la misma área inicial pero con perímetro lo menor posible? Estamos así ante el siguiente:

Problema auxiliar. Dado un triángulo *ABC* y fijos los puntos *A* y *B,* hallar una posición para *C* tal que conserve el área del triángulo y su perímetro sea lo menor posible, esto es, $\overline{AC}+\overline{BC}$ sea mínimo (ver Fig. 8).

¿Podría reformularse este problema en otro lenguaje? Note que $\overline{AC}+\overline{BC}$ puede interpretarse como una trayectoria recorrida si queremos ir de *A* a *B* visitando la recta *r.* Luego se quiere encontrar el punto *C* de "visita" a *r* tal que la distancia recorrida sea la menor posible. Estamos ante un problema que pide minimizar una distancia: *¿qué problema, con una solicitud semejante, sabemos resolver*? Es claro que la menor distancia entre los puntos *A* y *B* es la longitud del segmento de recta que los une, pero, en tal caso, no visitaríamos la recta *r*. ¿Y si colocamos *B* en una posición *B′* de modo que la visita a *r* sea obligatoria al pasar de *A* a *B′*? Es claro que *B′* debe estar en un semiplano de *r* contrario a *A*. La opción más sencilla es tomar a *B′* simétrico a *B* respecto de *r*. Entonces, la menor distancia entre *A* y *B′* sería la longitud del segmento $\overline{AB'}$, el cual corta a *r* en un punto *C′*. De la simetría de la figura resulta claro que $\overline{AC'}+\overline{BC'}=\overline{AC'}+\overline{C'B'}$, luego la posición buscada de *C* es, precisamente, *C′*. Así que el triángulo *ABC′* resuelve el problema auxiliar, es decir, los triángulos *ABC* y *ABC′* tienen la misma área y $\overline{AC'}+\overline{BC'}\leq\overline{AC'}+\overline{C'B'}$.

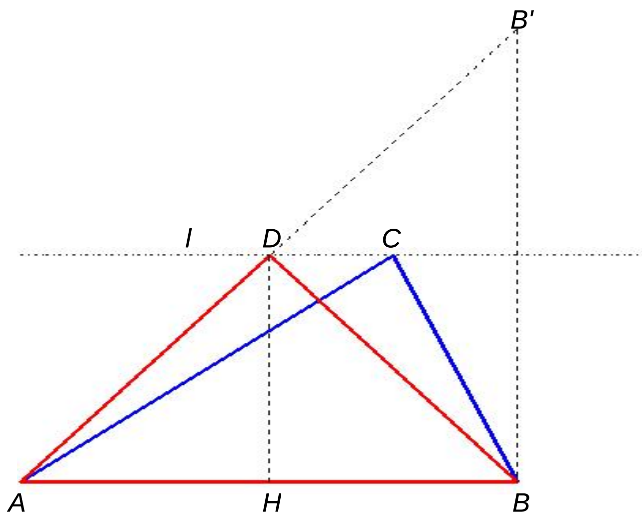

Fig.8 Igual área y perímetro mínimo

Entonces, ¿cómo construir un triángulo que tenga el mismo perímetro que el triángulo *ABC* y un área mayor? Es claro, que si movemos continuamente el punto *C′* a lo largo de la semirrecta *DC′* (origen *D*), conseguiremos aumentar el perímetro continuamente hasta obtener el valor prefijado y, simultáneamente, estamos aumentando la altura, por tanto, el área del triángulo original. Hemos conseguido entonces construir un triángulo *ABC″* con el mismo perímetro que *ABC* pero con un área mayor, lo que contradice la suposición de que *ABC* tenía el área mayor. Esto resuelve totalmente el subproblema IIIa y tenemos el siguiente:

Resultado Parcial 1: Entre todos los triángulos con el mismo perímetro, el de área máxima es el equilátero.

¿Cuál puede ser el próximo paso? Podemos trabajar con cuadriláteros. Si analizamos detalladamente el camino seguido en la resolución del problema para el triángulo, observamos que el mismo razonamiento puede ser repetido para un cuadrilátero con dos lados diferentes e, incluso, llegar a la conclusión de que los lados de un polígono de cualquier número de lados y con área máxima deben ser todos iguales. En otras palabras, hemos obtenido el siguiente:

Resultado Parcial 2: El polígono de *n* lados de mayor área, si existe, debe encontrarse entre aquellos que tienen todos los lados de igual longitud.

¿Resuelve este resultado totalmente el problema III? Limitémonos al caso particular de los cuadriláteros. Un cuadrilátero con sus 4 lados iguales es un rombo, luego hasta ahora sabemos que el cuadrilátero de mayor área con perímetro dado debe ser un rombo. Pero, ¿cuál?. Una construcción sencilla dejando una base fija y variando altura nos muestra que entre todos los rombos de lado dado el área máxima se consigue con el cuadrado. El problema para los cuadriláteros está totalmente resuelto y tenemos el resultado siguiente:

Resultado Parcial 3: De todos los cuadriláteros con perímetro fijo, el de mayor área es el cuadrado.

Zenodoro demostró que para polígonos de n lados con perímetro dado se obtiene mayor área con polígonos que tengan los ángulos iguales (ver p.e. Heath 1981, o Tikhomirov, 1990). Luego, teniendo en cuenta este resultado y lo demostrado respecto a los lados, podemos enunciar el siguiente:

Resultado 3. *De todos los polígonos de n lados con perímetro fijo, el regular es el que tiene área máxima.*

De tal manera queda totalmente resuelto el problema III, en este hemos fijado el número de lados y el perímetro y hemos encontrado que el polígono de área máxima es el polígono regular. Se impone, de forma casi obvia, el problema siguiente:

Problema IV. *Analizar el comportamiento de las áreas de polígonos regulares con perímetro fijo cuando el número n de lados varía.*

Podemos dejar que los alumnos experimenten con valores de n pequeños y simples para realizar los cálculos. Así, pueden encontrar que si denotamos por P el valor del perímetro y A_n el del área del polígono correspondiente a n lados:

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{36}P^2 \qquad , \; A_4 = \frac{P^2}{16}, \qquad A_6 = \frac{\sqrt{3}}{24}P^2 .$$

Fácilmente, se demuestra que $A_3 < A_4 < A_6$. En caso de haber desarrollado previamente el problema III podemos proponer:

Subproblema IVa: Determine una relación entre el área y el perímetro de un polígono regular.

El uso de la formula (4) permite escribir:

$$A_n = \frac{h_n}{2}P_n , \qquad (5)$$

donde A_n , P_n y h_n representan el área, el perímetro y la apotema, respectivamente, del polígono regular de n lados.

Para efectuar la comparación requerida sería útil tener una relación entre n, A_n y P_n. Esto puede conseguirse transformando (5), para ello podemos calcular h_n. Observemos que los ángulos interiores del polígono valen $\alpha_n = \frac{\pi}{n}$. Consideremos, como construcción auxiliar, la circunferencia circunscrita al polígono (el polígono es inscribible por ser regular) de radio R_n , que va a depender del numero de lados. Los triángulos en que se ha dividido el polígono son isósceles, luego puede verse fácilmente que:

$$h_n = R_n \cos\frac{\pi}{n} \quad \text{y} \quad P_n = 2nR_n \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}.$$

Respuesta Parcial: Para un polígono regular de n lados (n>2) se cumple la relación

$$A_n = \frac{P^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}}, \qquad (6)$$

ya que el perímetro es fijo, igual a *P*.

Experimento: Resulta instructivo realizar un experimento numérico para convencerse de la certeza del enunciado de Zenodoro para polígonos con mayor número de lados. Denotemos por A_n el área del polígono regular de n lados con perímetro P fijo, por ejemplo $P=2\pi$, en la tabla a continuación se indican los valores correspondientes de A_n, para algunos valores de n:

n	A_n	n	A_n
3	1,899406252	1000	3.141582319
7	2.927777815	10000	3.141592550
10	3.037551898	100000	3.141592652

Tabla 2: Áreas de polígonos con n lados y perímetro 2π

Estos resultados sugieren la hipótesis siguiente:

Conjetura: Cuando el número de lados n crece también crece el área A_n

¿Cómo podríamos demostrar esta hipótesis? Es claro que basta demostrar, para *m>n,* la desigualdad:

$$n\tan\frac{\pi}{n} > m\tan\frac{\pi}{m}.$$

En el caso general, la demostración de esta desigualdad resulta complicada si no se utilizan los recursos del cálculo diferencial. Si los alumnos poseyeran un mínimo de estos elementos (análisis de crecimiento de una función) podría conducírseles sin mucha dificultad por esa vía y se obtendría una aplicación, nada usual, de esta materia.

En otro caso, podemos analizar *un caso particular más asequible*,

Problema auxiliar: Demostrar que $A_{2n}>A_n$, o de forma equivalente que:

$$\tan\frac{\pi}{n} > 2\tan\frac{\pi}{2n}.$$

Esta desigualdad puede ser verificada fácilmente utilizando las conocidas fórmulas para el seno y coseno del ángulo duplo.

Esto demuestra, por ejemplo, que

$$A_3 < A_6 < A_{12} < \ldots \quad \text{y} \quad A_4 < A_8 < A_{16} < \ldots \text{ etc.}$$

De esta forma el problema IV queda total o parcialmente resuelto en dependencia de los conocimientos previos de los alumnos.

Resultado 4. *Entre los polígonos regulares con igual perímetro el de mayor área es el que tiene el mayor número de lados posible.*

Reconsideremos el problema isoperimétrico, teniendo como "conjunto de figuras" el conjunto de todas las figuras poligonales, es decir:

Problema V. *Entre todas las figuras poligonales con perímetro dado ¿cuál es la que tiene área máxima?*

Conjugando los resultados obtenidos en la solución a los problemas III y IV podemos concluir que el polígono debe ser regular y "con el mayor número de lados posibles". Si consideramos al círculo como *caso límite* de un polígono regular de infinitos lados, inferimos la solución encontrada por Zenodoro:

Resultado 5. *El círculo con perímetro P tiene área mayor que cualquier polígono con ese mismo perímetro.*

Este resultado puede ser demostrado de forma directa: en efecto, si A denota el área de un círculo y P su perímetro, se cumple la relación $A=\dfrac{P^2}{4\pi}$. Teniendo en cuenta, además, (6), se verifica:

$$A \geq A_n \quad \Leftrightarrow \quad \tan\frac{\pi}{n} \geq \frac{\pi}{n}.$$

Esta desigualdad puede demostrarse de forma elemental mediante comparación de áreas de figuras relacionadas con el círculo trigonométrico[1].

[1] Es conveniente explicar a los alumnos que el círculo no sólo es la solución del problema isoperimétrico entre los polígonos, sino que también lo es cuando se consideran figuras limitadas por "curvas cerradas arbitrarias", pero que la demostración de este resultado requiere de conocimientos superiores de matemática. Una demostración rigurosa sólo pudo hallarse en el siglo XIX con los esfuerzos de varios geómetras (ver p.e. Tikhomirov, 1990).

Una manera digna de terminar el tema de los polígonos isoperimétricos es plantearse la posibilidad de una aplicación no muy complicada y bastante natural. Pappus (o tal vez las abejas) proporciona un ejemplo en el capítulo V de su Colección Matemática (s.III d.C.) que conjuga la simplicidad con la belleza:

Problema de Aplicación VI. *¿Por qué la forma de las celdas de los panales de abejas* (celdas hexagonales y sin intersticios entre ellas, ver Fig.9) *es la que permite almacenar la mayor cantidad de miel, utilizando una cantidad de cera dada para la elaboración del panal*?

n	3	4	5	6	7	8
k	6	4	*	3	*	*

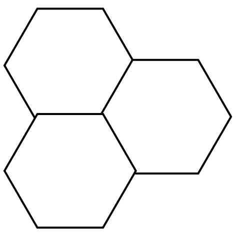

Fig. 9 Optimalidad de las celdas hexagonales

En primer lugar, el uso de polígonos es la mejor forma de no dejar intersticios y usar "paredes" comunes a varias celdas. Por otra parte, el resultado 3 indica que estos polígonos deben ser regulares. Entonces estamos ante el siguiente:

Problema Auxiliar. ¿Cuáles polígonos regulares pueden disponerse en torno de un vértice común sin que haya intersticios?

No es difícil calcular que los ángulos interiores de un polígono regular de n lados valen $\frac{n-2}{n}\pi$. Así que debemos disponer alrededor de un punto un número entero k de ángulos de esa magnitud. Como la suma de los ángulos alrededor de un punto es 2π, obtenemos que debe cumplirse la relación:

$$k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)=1, \qquad (7)$$

entonces debemos encontrar los valores enteros de k y n ($n \geq 3$) que hacen posible la relación anterior.

Experimento Un sencillo experimento con valores de n y k puede resumirse en la tabla que se muestra en Fig.9. Un análisis de los resultados obtenidos permite la siguiente

Conjetura Los únicos polígonos utilizables son: triángulos, cuadrados y hexágonos.

¿Cómo probar esto?

Por una parte, observemos que (7) puede ser escrito en la forma:

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{k},$$

como n y k son enteros positivos, se obtiene que $k \geq 3$, y de (7):

$$1 = k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right) \geq 3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right) = \frac{3}{2}-\frac{3}{n},$$

de donde concluimos que $n \leq 6$. Así que nuestra conjetura es verdadera y obtenemos:

Resultado Parcial. En torno a un vértice los únicos polígonos regulares que pueden colocarse, sin que haya intersticios, son 6 triángulos o 4 cuadrados o 3 hexágonos.

La cantidad de miel será mayor si utilizamos celdas cuya sección plana tenga el área mayor, luego, teniendo en cuenta los resultados anteriores podemos concluir:

Resultado 6. *La elección de los hexágonos, que hacen las abejas para la construcción de sus panales, es la óptima*[2].

3. En definitiva, ¿qué hemos propuesto?

La construcción de los conceptos
depende de la forma de proponer los problemas,
la cual varía a su vez con el contenido mismo de la civilización
Max Weber, 1965, p. 8

Nos ha interesado, sobre todo, estimular la necesaria concepción de una *retórica matemática* que potencie tanto la imaginación y el goce estético como la argumentación dialéctica y el rigor lógico, pero sin formalismo estéril, procurando hacer más apetitoso el discurso que usamos los docentes y autores de textos para comunicar el saber matemático. Ah, todo esto lo concebimos con un enfoque historicista y participativo, si se quiere siguiendo de cerca un enfoque heurístico constructivista –por favor, sin marco teórico dogmático ni doctrinas epistemológicas, sino con mucha *flexibilidad pedagógica*. Somos conscientes de que todavía nos queda mucho por precisar y aún más por transformar de nuestra práctica docente. Pretendemos que quienes nos lean se motiven y nos ayuden en este empeño.

La propuesta que ilustramos aquí a través de dos cuestiones significativas de medida geométrica: las cuadraturas y los problemas isoperimétricos, ambas limitados a figuras poligonales -incluyendo el círculo, por supuesto- tiene cierta originalidad en la forma presentada que hemos llamado *problematización histórica de temas fértiles*, pero no es novedosa en su concepción. En las últimas dos décadas se ha publicado bastante sobre la integración de la investigación histórica con la práctica educativa matemática, citemos, por ejemplo, el estudio ICMI (Fauvel y van Maanen, eds. 2000), el artículo (Furinghetti, 2007) en un número especial dedicado a la Historia de la

[2] El planteamiento más justo atendiendo a la disposición espacial en cilindros hexagonales puede encontrarse en textos especializados que tratan problemas en espacios tridimensionales: *de un conjunto de cuerpos espaciales con una superficie dada fija, encontrar aquel con el mayor volumen.* Aquí nos hemos limitado al caso isoperimétrico plano y en las modalidades tratadas por Pappus de Alejandría en su famosa, y todavía interesante, *Colección Matemática* (Heath, 1982) *.*

Matemática en la Educación Matemática de la prestigiosa revista *Educational Studies in Mathematics,* o todavía más reciente, la colección (Katz y Tzanakis, eds. 2009). Si el lector está interesado en obtener una base de conocimientos históricos, para implementar un enfoque historicista a sus clases, le recomendamos el texto compacto reciente (Grant y Kleiner, 2015). Nosotros, en base a una experiencia de 50 años de labor docente en diferentes escenarios y niveles, hemos elaborado algunas modestas ideas integradas en un proyecto de investigación encaminado a la *fertilización de la cultura matemática* tanto de estudiantes, como de docentes y las hemos expuesto en publicaciones como, por ejemplo, en Sánchez y Valdés (2000, 2004), Valdés y Sánchez (2011a y 2011b), como también en Sanchez Fernández (2013 y 2016).

BIBLIOGRAFÍA

Borwein, J.; Bailey, D. (2008) *Mathematics by Experiment. CRC Press Taylor & Francis Group.* Boca Ratón. FL.

Dunham, W. (1993) *Viaje a través de los genios.* Eds. Pirámide. Madrid.

Edwards, C.H. (1979), *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag. N. Y.

Fauvel y van Maanen (eds. 2000) *History in Mathematics Education* The ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1981), *Should a mathematics teacher know something about the history of mathematics? For the Learning of Mathematics*, vol.2, nº1, 30-33

Furinghetti, F. (2007). *Teacher education through the history of mathematics*. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 131–143.

Grant, H.; Kleiner, I. (2015) *Turning Points in the History of Mathematics*. Springer. Compact Texbooks in Mathematics. N. Y.

Guzmán, M. de (1991) *Para Pensar Mejor*, Ed. Labor, Madrid.

Guzmán, M. de (2007) *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*. *Revista Iberoamericana de Educación* Nº43, pp. 19-58.

Hawkins, T**.** (1979), *Lebesgue's Theory of integration: Its Origins and Development,* Chelsea Publishing Company, N.Y.

Heath, T. (1981), *A History of Greek Mathematics,* vol. II, Dover, N. Y.

Jankvist, U. T. (2009) *A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. Educational Studies in Math*.71 (3), 235-261

Katz, V., Tzanakis, C. (eds. 2009) *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education.* MAA. Notes Series Vol. 78. Washington DC.

Polya, G. (1974) *Cómo plantear y resolver problemas.* 4ª reimpresión. Editorial Trillas. México

Sánchez Fernández, C. (2013) *¿Cómo hacer apetitoso el discurso matemático? Experiencias con sabor cubano. Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática*, Año 8, #11, 225-236, San José, Costa Rica

Sánchez Fernández, C. (2016) *Temas Fértiles para la Cultura Matemática*. *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática*, Año 11, #15, 169-185, San José, Costa Rica

Sánchez, C.; Valdés, C. (2000). Proposiciones para un estudio dinámico de la medida, en John A. Fossa (ed.) *Facetas do Diamante. Ensaios sobre Educação Matemática e Historia da Matemática.* Editora da SBHMAT. Rio Claro.

Sánchez, C.; Valdés, C. (2004). *De los Bernoulli a los Bourbaki. Una historia del arte y la ciencia del cálculo* Ed. Nivola. Madrid

Tikhomirov, V. M. (1990), *Stories about Maxima and Minima,* Am. Math. Soc.-Math. Ass. Amer. Washington DC.

Valdés, C.; Sánchez, C. (2011a). *Introducción al Análisis Matemático*. Ed. Félix Varela. La Habana.

Valdés, C.; Sánchez, C. (2011b). *Historia y rigor en una iniciación al cálculo: una experiencia cubana Educ. Mat. Pesquisa*. Sao Paulo, v.13, n.3, 581-596

Weber, M. (1965) *Essai sur la théorie de la science,* Plon, Paris

Sánchez Fernández, Carlos: Nació y vive en Cuba desde 1947. Es licenciado en Matemática por la Universidad de La Habana (1970) y Dr. en Ciencias Matemáticas por la Universidad “Lomonosov” de Moscú (1976). Ha sido conferencista en Brasil, Colombia, Costa Rica, España, Francia, México, Panamá, Puerto Rico, República Dominicana, Sudáfrica y Uruguay. Tiene más de 60 publicaciones, de éstas 7 textos en uso. Es miembro del Comité Asesor Internacional del CIAEM y del Consejo de Redacción de varias revistas. Profesor Principal de Historia y Metodología de la Matemática en Cuba. Tiene 50 años de experiencia docente.

Valdés Castro, Concepción: Nació y vive en Cuba desde 1946. Es licenciada en Matemática por la Universidad de La Habana (1968) y Dr. en Ciencias Matemáticas por la Universidad “Lomonosov” de Moscú (1976). Ha sido conferencista en Brasil, Costa Rica, España y Panamá. Tiene más de 40 publicaciones, de éstas 5 textos en uso. Es Profesora Principal de Análisis Matemático en Cuba y Profesora Consultante en la Universidad de La Habana. En el 2014 cumplió 50 años de exitosa experiencia docente.